Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 1, С. 16–26

УДК 514.12, 514.13, 514.752
DOI 10.23671/VNC.2019.1.27656

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ НА ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

А. В. Костин[1]

[1] Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
Россия, 423604, Елабуга, ул. Казанская, 89

E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Аннотация. В трехмерном расширенном гиперболическом пространстве рассмотрим «полную» псевдосферу — поверхность вращения прямой вокруг параллельной ей прямой. Поверхность, лежащая в собственной области гиперболического пространства, локально несёт на себе геометрию плоскости Лобачевского. Одна часть ее вкладывается в евклидово пространство в виде хорошо известной воронки Бельтрами — Миндинга, другая вкладывается в трехмерное пространство Минковского в виде одного из псевдоевклидовых аналогов псевдосферы. Асимптотические линии на псевдоевклидовой части поверхности мнимы. Эти мнимые асимптотические линии можно интерпретировать как вещественные асимптотические линии на поверхностях с индефинитной метрикой постоянной кривизны. Для построения интерпретации привлекаются еще два псевдоевклидовых аналога псевдосферы Бельтрами — Миндинга. Один из них глобально изометричен продолжению «полной» псевдосферы за абсолют гиперболического пространства. В работе изучаются свойства асимптотических линий на рассматриваемых поверхностях постоянной кривизны с метрикой де Ситтера в трехмерном псевдоевклидовом пространстве (пространстве Минковского). Эти свойства во многом аналогичны свойствам асимптотических на псевдосфере Бельтрами — Миндинга. Площадь сетевого четырехугольника асимптотической сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны в евклидовом пространстве может быть найдена по формуле Хаццидакиса. В работе рассматривается аналог этой формулы для сетевых четырехугольников асимптотической сети на поверхностях постоянной кривизны с индефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Эта формула может быть обобщена на произвольные сетевые многоугольники асимптотической сети. С использованием индефинитной метрики можно распространить действие формулы Хаццидакиса за ребро псевдосферы Бельтрами — Миндинга.

Ключевые слова: псевдосфера, плоскость де Ситтера, модель Пуанкаре, плоскость Лобачевского, асимптотические линии, чебышёвская сеть.

Mathematical Subject Classification (2000): 53A35, 53B30.

Образец цитирования: *Костин А. В.* Об асимптотических линиях на псевдосферических поверхностях // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 16–26. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27656.

1. Предварительные сведения, постановка задачи и краткий обзор литературы

Полная псевдосфера — поверхность вращения прямой вокруг параллельной ей прямой в трехмерном пространстве Лобачевского — изометрически вкладывается в плоское пространство, имеющее внутри цилиндра евклидову метрику, а вне его — псевдоевклидову. Ось вращения является общей базой трактрис в евклидовой и псевдоевклидовой метрике. На евклидовой части — псевдосфере Бельтрами — Миндинга — имеется вещественная асимптотическая сеть. Псевдоевклидова часть получается эллиптическим вращением псевдоевклидовой трактрисы, база и касательная которой являются прямыми разных типов. Асимптотическая сеть на ней мнима, т. е. существует только в комплексифицированном пространстве. Нашей целью будет построение интерпретаций этой мнимой сети, точнее, построение ее эрзаца. Вместо мнимой сети можно рассмотреть вещественную чебышёвскую сеть в индефинитной метрике постоянной кривизны. Если параметризовать псевдосферу координатами карты Пуанкаре, все рассуждения можно вести, апеллируя к свойствам модели.

Поверхности вращения постоянной кривизны в евклидовом пространстве найдены Фердинандом Миндингом [1]. Изометрическое вложение класса C^∞ полной псевдосферы в 8-мерное сферическое пространство и в 7-мерное евклидово пространство построил Данило Блануша [2, 3]. Пространство, глобально изометричное идеальной области плоскости Лобачевского [4], впервые рассмотрел, по всей видимости, Людвиг Отто Гессе в 1866 г. в работе [5]. Чебышёвская сеть введена П. Л. Чебышёвым в 1878 г. [6, 7]. Площадь сетевого четырехугольника на поверхностях постоянной отрицательной кривизны через его избыток найдена Хаццидакисом в 1880 г. [8]. С использованием формулы Хаццидакиса Д. Гильбертом была доказана теорема о том, что плоскость Лобачевского (и любая регулярная поверхность постоянной отрицательной кривизны) не вкладывается изометрически в трехмерное евклидово пространство [9]. Класс гладкости, не допускающий вложение, позднее был снижен до C^2. Воронка де Ситтера — Широкова была построена П. А. Широковым в 1917 г. (см. [10]) как поверхность с геометрией идеальной области плоскости Лобачевского, псевдориманову метрику на которой мы будем использовать в виде, приведенном в [11]. Интерпретации решений уравнения sin-Гордона как сетевого угла между асимптотическими на поверхностях постоянной отрицательной кривизны посвящено множество работ. Часть библиографии, посвященной этой тематике имеется в работе Э. Г. Позняка и А. Г. Попова [12], которые и сами внесли существенный вклад в ее развитие. Пионерская работа по геометрической интерпретации решений уравнения sinh-Гордона принадлежит Чженю (или Черну — в другой транслитерации фамилии автора) [13]. Отметим посвященную этой тематике работу Р. Ф. Галеевой и Д. Д. Соколова [14], а также опирающиеся на работу Чженя статьи Т. Клотц-Милнор [15] и Б. А. Розенфельда и Н. Е. Марюковой [16].

Общая теория дифференциальной геометрии кривых и поверхностей трехмерного псевдоевклидова пространства изложена в [17]. Поверхности вращения в этом пространстве описаны в [18]. Такая же связь, какая имеется у псевдосферы Бельтрами — Миндинга с катеноидом (меридиан катеноида является эволютой трактрисы), связывает и рассматриваемые в данной работе псевдоевкдидовы аналоги псевдосферы с соответствующими поверхностями нулевой средней кривизны в псевдоевкдидовом пространстве. О поверхностях такого типа см., например, [19] и [20].

2. Интерпретация, связанная с бабочкой де Ситтера — Широкова

В пространстве Минковского с метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{1}$$

рассмотрим поверхность

$$\begin{cases} x^1 = \cosh(u) \cdot \sin(v), \\ x^2 = \cosh(u) \cdot \cos(v), \\ x^3 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)), \end{cases} \tag{2}$$

являющуюся продолжением псевдосферы Бельтрами — Миндинга. Параметризуем ее координатами карты Пуанкаре $u^1 = v$, $u^2 = \frac{1}{\cosh(u)}$:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{\sin(u^1)}{u^2}, \\ x^2 = \frac{\cos(u^1)}{u^2}, \\ x^3 = \frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{u^2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{u^2}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Метрика на поверхности примет вид

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 + (du^2)^2}{(u^2)^2}. \tag{4}$$

Область, соответствующая одной полости, в конформной карте Пуанкаре задается двойным неравенством $0 < u^2 \leqslant 1$.

Уравнения асимптотических

$$\frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2\sqrt{1-(u^2)^2}}(du^2)^2 = 0 \tag{5}$$

не имеют вещественных решений. Мнимым же асимптотическим можно дать простую наглядную интерпретацию как асимптотическим на поверхностях с индефинитной метрикой постоянной кривизны. Покажем это.

Заменим в (4) и (5) u^1 на $i \cdot u^1$, где $i^2 = -1$. Метрика (4) при этом перейдет в индефинитную метрику

$$ds^2 = -\frac{((du^1)^2 - (du^2)^2)}{(u^2)^2}. \tag{6}$$

Преобразованные уравнения асимптотических

$$-\frac{\sqrt{1-(u^2)^2}}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2\sqrt{1-(u^2)^2}}(du^2)^2 = 0$$

имеют вещественные решения

$$-u^1 + c = \arcsin(u^2), \quad u^1 + c = \arcsin(u^2). \tag{7}$$

Уравнения (7) задают чебышевскую сеть в метрике (6) и в метрике, отличающейся от нее знаком. Эта сеть накрывает асимптотическую сеть на поверхности

$$\begin{cases} x^1 = \cosh(u) \cdot \sinh(v), \\ x^2 = \cosh(u) \cdot \cosh(v), \\ x^3 = \sinh(u) - \arctan(\sinh(u)) \end{cases} \tag{8}$$

в псевдоевклидовом пространстве с метрикой

$$ds^2 = -(dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

и в пространстве с метрикой, отличающейся от нее знаком. Это поверхность постоянной кривизны с индефинитной метрикой. В первом случае кривизна поверхности отрицательна, во втором (при смене знака метрики объемлющего пространства) — положительна. Выберем второй случай для метрики объемлющего пространства:

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{9}$$

Профиль (начальный меридиан) поверхности (8) представляет собой один из псевдоевклидовых аналогов трактрисы. Каждая ветвь трактрисы имеет изотропную асимптоту. Касательная прямая и ось вращения являются прямыми разных типов. Длина отрезка касательной до оси вращения у меридиана равна i. Поверхность получена гиперболическим вращением — лоренцевым бустом этой трактрисы. Такой аналог псевдосферы будем называть бабочкой де Ситтера — Широкова.

Параметр u в уравнениях (8) совпадает с углом между касательной к меридиану и перпендикуляром к оси вращения, лежащим в плоскости меридиана. Под углом здесь понимается гиперболический угол — удвоенная площадь сектора гиперболы, служащей окружностью единичного или мнимоединичного радиуса в псевдоевклидовой плоскости. При значении $u = 0$ регулярность поверхности нарушается. В локальных координатах конформной карты Пуанкаре $u^1 = v$, $u^2 = \frac{1}{\cosh(u)}$ на псевдоевклидовой плоскости с метрикой $ds^2 = (du^1)^2 - (du^2)^2$ асимптотические линии на поверхности (8) задаются именно уравнениями (7). Угол между прямыми на псевдоевклидовой плоскости обычно определяется через скалярное произведение их направляющих векторов. Этот угол определить можно также через проективный инвариант. А именно, через точку пересечения прямых a, b проведем изотропные прямые c, d. Тогда угол между прямыми a, b будет равен $\frac{1}{2}\ln(ab, cd)$. Если пара (cd) разделяет пару (ab), то величина угла между прямыми a и b будет принимать комплексное значение. В частности, угол между ортогональными прямыми будет равен $\frac{\pi \cdot i}{2}$. Смежный с вещественным углом между прямыми угол также будет задаваться комплексным числом. Псевдоевклидовы углы, получаемые друг из друга антидвижением (в этом случае направления сторон одного угла будут соответственно сопряжены направлениям сторон другого относительно псевдоевкдидовой окружности), мы будем считать равными.

3. Асимптотические линии на бабочке де Ситтера — Широкова

Асимптотические линии на поверхности (8) в пространстве Минковского с метрикой (9) определяются уравнением

$$\frac{du^2}{\cosh(u)} - \cosh(u)dv^2 = 0.$$

Уравнения асимптотических линий таковы:

$$2\arctan(e^u) - v = c_1, \quad 2\arctan(e^u) + v = c_2.$$

Введем на поверхности новые локальные координаты:

$$x = -\arctan(e^u) + \frac{v}{2}, \quad y = \arctan(e^u) + \frac{v}{2}.$$

Первая квадратичная форма поверхности может быть представлена в виде

$$I = -\tanh^2(u)du^2 + \cosh^2 vudv^2 = dx^2 + 2\cosh(2u)\,dxdy + dy^2.$$

Нетрудно видеть, что сетевой угол $z = 2u$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2z}{dxdy} = -\sinh(z).$$

Решение этого уравнения $z = 2u = 2\ln(\tan\frac{y-x}{2})$ регулярно в полосе $0 < y - x < \pi$ (и в полосах, получающихся из нее сдвигами границ на $2\pi n$, $n \in Z$). При удалении от ребра возврата значение z увеличивается. Свойства асимптотических линий на данной поверхности во многом аналогичны свойствам асимптотических на псевдосфере Бельтрами — Миндинга [21, 22]. Отметим некоторые из них.

Теорема 1. *Асимптотические на бабочке де Ситтера — Широкова обладают свойствами a)–f):*

a) Асимптотические линии регулярны всюду, в том числе и в точках ребра возврата, в которых нарушается регулярность самой поверхности [23].

b) Угол между асимптотической и параллелью равен углу между касательной к меридиану и перпендикуляром к оси вращения, лежащим в плоскости меридиана (т. е. углу между касательной к меридиану и плоскостью, перпендикулярной оси вращения).

c) Угол между асимптотической и меридианом равен углу между касательной к меридиану и осью вращения.

d) На асимптотической линии возьмем пару точек A и B. Через эти точки проведем меридианы до пересечения с ребром возврата поверхности. Точки пересечения меридианов с ребром возврата обозначим через A_1 и B_1. Дугу A_1B_1 ребра назовем ортогональной проекцией дуги AB асимптотической линии на ребро возврата псевдосферы. Тогда длина дуги асимптотической линии будет равна длине дуги ее ортогональной проекции на ребро возврата поверхности.

e) Если через две точки A и B асимптотической линии одного семейства провести две асимптотические другого семейства до пересечения с ребром возврата, то длина отсекаемой на ребре дуги будет вдвое больше дуги асимптотической AB.

f) Длина асимптотической от ребра возврата до бесконечности равна $\frac{\pi}{2}$, длина всей обобщенной асимптотической равна π. В соответствии с этим, две асимптотические разных семейств пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между точками пересечения их с ребром возврата меньше π.

Доказательства этих свойств в силу стандартности методов не приводим. Отметим только в дополнение к пункту а), что регулярность сети в точках ребра возврата нарушается, поскольку касательные векторы к линиям обоих семейств в точках ребра возврата коллинеарны касательным векторам к псевдоевклидовой окружности (аффинной гиперболе), служащей этим ребром возврата. Если ограничиться одной полостью поверхности, то можно также встать на такую точку зрения, что при касании с ребром возврата асимптотические линии одного семейства переходят в асимптотические линии другого семейства. При стремлении параметра u к бесконечности скалярный квадрат касательного вектора асимптотической линии стремится к нулю. Это означает, что в бесконечность асимптотическая уходит в изотропном направлении.

4. Площади сетевых четырехугольников

Для площади сетевого четырехугольника, сторонами которого являются линии асимптотической сети на псевдосфере Бельтрами — Миндинга, хорошо известна формула Хаццидакиса [8], выражающая площадь либо через альтернированную сумму сетевых углов, либо через избыток внутренних углов сетевого четырехугольника. Элемент площади в асимптотических координатах на рассматриваемой псевдосфере де Ситтера — Широкова имеет вид $\sinh(z)\,dx\,dy$. Нетрудно видеть, что и здесь площадь сетевого четырехугольника $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_1), A_3(x_2, y_2), A_4(x_1, y_2)$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, через сетевой угол z — решение гиперболического уравнения с частными производными — выражается по формуле

$$S = z(A_1) - z(A_2) + z(A_3) - z(A_4). \tag{10}$$

Эта формула легко обобщается на сетевые многоугольники произвольной топологической структуры. В частности, площадь односвязного сетевого $2n$-угольника будет равна $S = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{(k+1)}z(A_k)$.

Заменив в формуле (10) сетевые углы внутренними углами сетевого четырехугольника, получим

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 2\pi i.$$

Здесь

$$\alpha_1 = z(A_1), \quad \alpha_3 = z(A_3), \quad \alpha_2 = \pi i - z(A_2), \quad \alpha_4 = \pi i - z(A_4).$$

В некотором смысле сеть (7) дополняет чебышёвскую сеть из гиперболических косинусов $u^2 = \cosh(u^1 - c_1)$, $u^2 = \cosh(c_2 - u^1)$ в модели Пуанкаре гиперболической плоскости, накрывающую асимптотическую сеть на псевдосфере Бельтрами — Миндинга. Площадь фигуры в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского с метрикой (4) совпадает с площадью этой фигуры на плоскости с теми же координатами u^1, u^2 в метрике де Ситтера:

$$ds^2 = \frac{(du^1)^2 - (du^2)^2}{(u^2)^2}. \tag{11}$$

Евклидова (и псевдоевклидова) прямая $u^2 = 1$ в обеих метриках является орициклом. Этот орицикл накрывает ребра возврата всех рассматриваемых псевдосфер. К орициклу $u^2 = 1$ линии обеих сетей подходят тангенциально. В области $u^2 > 0$ (на универсальной накрывающей «полной псевдосферы») рассмотрим единую сеть, объединив чебышёвскую сеть в метрике гиперболической плоскости с чебышёвской сетью в метрике плоскости де Ситтера. При этом в области $u^2 > 1$ берется положительно определенная метрика (4), вне ее — индефинитная метрика (11). Для вычисления через сетевые углы площадей сетевых многоугольников, имеющих вершины в разных областях, потребуются некоторые уточнения. Вблизи границы площадь равностороннего сетевого четырехугольника со стороной x, отсекающего на граничном орицикле дугу длиной $2x$, будет равна

$$2(gd^{-1}(x) - gd(x)) = 2(\lambda(x) - gd(x)).$$

Здесь $gd(x) = \int_0^x \frac{dx}{\cosh(x)}$ — гудерманиан x, $\lambda(x) = gd^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\cos(x)}$ — обратная к гудерманиану функция. Такой четырехугольник с точки зрения применения к нему альтернированного варианта формулы Хаццидакиса следует считать двуугольником. Если A — нижняя вершина, B — верхняя, то площадь его через сетевые углы выражается так $S = z(A) - \tilde{z}(B)$, где z — сетевой угол в метрике де Ситтера, $\tilde{z}$ — сетевой угол в метрике Лобачевского. Формула Хаццидакиса не реагирует на граничную вершину, являющуюся точкой возврата, и не аннулирует граничную вершину, при прохождении через которую линия сети не меняет направления.

5. Интерпретация, связанная с воронкой де Ситтера — Широкова

Заменим в (4) и (5) u^2 на $i \cdot u^2$, где также $i^2 = -1$. Метрика (4) при этом перейдет в индефинитную метрику (6). Преобразованные уравнения асимптотических

$$-\frac{\sqrt{1+(u^2)^2}}{(u^2)^2}(du^1)^2 + \frac{1}{(u^2)^2\sqrt{1+(u^2)^2}}(du^2)^2 = 0$$

имеют вещественные решения

$$-u^1 + c = \operatorname{arcsinh}(u^2), \quad u^1 + c = \operatorname{arcsinh}(u^2). \tag{12}$$

Уравнения (12) тоже задают чебышёвскую сеть в метрике (6) и в метрике (11), отличающейся от нее знаком. Эта сеть накрывает асимптотическую сеть на поверхности

$$\begin{cases} x^1 = \sinh(u) \cdot \sin(v), \\ x^2 = \sinh(u) \cdot \cos(v), \\ x^3 = (\ln(\tanh(\frac{u}{2})) + \cosh(u)) \end{cases} \tag{13}$$

в псевдоевклидовых пространствах с метрикой (1) и с метрикой

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

В этом непосредственно убеждаемся, введя на поверхности параметризацию координатами карты Пуанкаре. Сетевой угол

$$z = 2u = 4 \operatorname{arctanh}(e^{x+y}),$$

понимаемый здесь, как и выше, как гиперболический угол, в асимптотических координатах

$$x = \frac{1}{2} \ln\left(\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right) - \frac{v}{2},$$
$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right) + \frac{v}{2}$$

удовлетворяет уравнению sinh-Гордона:

$$\frac{d^2 z}{dxdy} = \sinh(z).$$

Эта поверхность является еще одним псевдоевклидовым аналогом псевдосферы. Профиль поверхности является регулярным аналогом трактрисы. Касательная и база — ось вращения — являются прямыми одного типа. Кривизна поверхности постоянна, индуцированная метрика индефинитна. Если на расширенной гиперболической плоскости задать действие дискретной группы орициклических вращений, то фактор-пространством собственной области будет полная псевдосфера. Внешняя часть орикруга при этом будет бесконечно-листно накрывать поверхность (2), внутренняя — псевдосферу Бельтрами — Миндинга. Фактор-пространством идеальной области, из которой вследствие проективной двойственности удаляется одна изотропная прямая, будет поверхность (13). Этот аналог псевдосферы будем называть воронкой де Ситтера — Широкова. Многие свойства асимптотических на воронке де Ситтера — Широкова аналогичны свойствам асимптотических на поверхности (8), но с некоторыми изменениями. В частности, в бесконечность в сторону расширения воронки асимптотическая также уходит в изотропном направлении. Если обратиться к проективной интерпретации, то уход в бесконечность соответствует уходу на абсолют. В точке касания к изотропной касательной к абсолюту линии на этих поверхностях подходят с разных сторон. На воронке де Ситтера — Широкова нет ребра возврата. Вместо него нужно взять параллель длины 2π. При этом будут выполняться свойства о связи длины дуги асимптотической и ее проекции, с той разницей, что асимптотическая и параллель будут линиями разных типов. Есть много общих или аналогичных свойств меридианов, их эволют [24] и соответствующих поверхностей вращения для псевдосферы Бельтрами — Миндинга и ее аналогов в псевдоевклидовом пространстве. Кроме того, используя связи сетевых углов с углами параллельности [25], асимптотическим направлениям — внешнегеометрическому понятию — на рассматриваемых псевдосферах можно дать простую геометрическую интерпретацию в рамках внутренней геометрии этих поверхностей [26].

Литература

1. *Minding F.* Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse // J. für die Reine und Angewandte Mathematik.—1839.—Vol. 1839, № 19.—P. 370–387. DOI: 10.1515/crll.1839.19.370.
2. *Blanusha D.* C^∞-isometric imbeddings of the hiperbolic plane and of cylinders with hiperbolic metric in spherical spaces // Ann. Math. Pura Appl.—1962.—Vol. 57, № 1.—P. 321–337. DOI: 10.1007/BF02417747.
3. *Blanusha D.* C^∞-isometric imbeddings of cylinders with hyperbolic metric in euclidean 7-space // Glas. Mat.-Fiz. i Astron.—1956.—Vol. 11, № 3–4.—P. 243–246.
4. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства.—М.: Наука, 1969.—548 с.
5. *Hesse L. O.* Über ein übertragungsprinzip // J. für die Reine und Angewandte Mathematik.—1866.—Vol. 66.—P. 15–21. DOI: 10.1515/crll.1866.66.15.
6. *Tchebychev P. L.* Sur la coupe de vêtements // Association Francaise pour l'Avancement de Sciences., Congres de Paris.—1878.—P. 154–155.
7. *Чебышев П. Л.* О кройке одежды // Успехи мат. наук.—1946.—Т. 1, № 2 (12).—С. 38–42.
8. *Hazzidakis J. N.* Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmasz // J. für die Reine und Angewandte Mathematik.—1880.—Vol. 88.—P. 68–73. DOI: 10.1515/crll.1880.88.68.
9. *Hilbert D.* Über Flächen von konstanten Gauβscher Krümmung // Trans. Amer. Math. Soc.—1901.—Vol. 2.—P. 87–99.
10. *Широков П. А.* Интерпретация и метрика квадратичных геометрий // Избранные работы по геометрии.—Казань, 1966.—С. 15–179.
11. *Kostin A. V., Sabitov I. K.* Smarandache theorem in hyperbolic geometry // J. of Math. Physics, Analysis, Geometry.—2014.—Vol. 10, № 2.—P. 221–232. DOI: 10.15407/mag10.02.221.
12. *Позняк Э. Г., Попов А. Г.* Геометрия уравнения sin-Гордона // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.—М.: ВИНИТИ, 1991.—Т. 23.—С. 99–130.
13. *Chern S. S.* Geometrical interpretation of sinh-Gordon equation // Annales Polonici Mathematici.—1981.—Vol. 39.—P. 63–69. DOI: 10.4064/ap-39-1-63-69.
14. *Галеева Р. Ф., Соколов Д. Д.* О геометрической интерпретации решений некоторых уравнений математической физики // Исслед. по теории поверхностей в римановых пространствах.—Л.: ЛГПИ, 1984.—С. 8–22.
15. *Klotz-Milnor T.* Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-Space // Trans. Amer. Math. Soc.—1983.—Vol. 280, № 1.—P. 161–185. DOI: 10.2307/1999607.
16. *Rosenfeld B. A., Maryukova N. E.* Surfaces of constant curvature and Geometric interpretation of the Klein–Gordon, sin-Gordon and sinh-Gordon equation // Publications de L'Institut Mathématique.—1997.—Vol. 61 (75).—P. 119–132.
17. *Lopez R.* Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz–Minkowski space // Int. Eletron. J. of Geometry.—2014.—Vol. 7, № 1.—P. 44–107.
18. *Barros M., Caballero M. and Ortega M.* Rotational surfaces in L^3 and solutions of the nonlinear sigma model // Communication in Math. Physics.—2009.—Vol. 290, № 2.—P. 437–477. DOI: 10.1007/s00220-009-0850-0.
19. *Albujer A. L., Caballero M.* Geometric properties of same mean curvature in R^3 and L^3 // J. of Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 445, № 1.—P. 1013–1024. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.07.062.

20. *Lopez R., Kaya S.* New examples of maximal surfaces in Lorentz–Minkowski space // Kyoshu J. of Math.—2017.—Vol. 71, № 2.—P. 311–327. DOI: 10.2206/kyushujm.71.311.
21. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия.—М.: Изд-во МГУ, 1990.—384 с.
22. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия.—М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.—512 с.
23. *Костин А. В.* Регулярность асимптотических линий на псевдосферах де Ситтера // Дни геометрии в Новосибирске — 2012: Тез. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Д. Александрова.—Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С. Л. Соболева СО РАН, 2012.—С. 48–49.
24. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Об эволютах некоторых кривых на псевдоевклидовой плоскости // Тр. участников Междунар. шк.-сем. по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова.—Абрау-Дюрсо, 2004.—С. 34–35.
25. *Костин А. В.* Об асимптотичкских сетях на псевдосферах // Дни геометрии в Новосибирске — 2014: Тез. Междунар. конф., посвящ. 85-летию Ю. Г. Решетняка.—Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С. Л. Соболева СО РАН, 2014.—С. 41.
26. *Костин А. В., Костина Н. Н.* Об интерпретации асимптотических направлений // Сб. тр. междунар. молодеж. шк.-сем. «Современная геометрия и ее приложения» и междунар. науч. конф. «Современная геометрия и ее приложения».—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2017.—С. 75–76.

Статья поступила 26 марта 2018 г.

Костин Андрей Викторович
Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета,
доцент кафедры математики и прикладной информатики
Россия, 423604, Елабуга, ул. Казанская, 89
E-mail: kostin_andrei@mail.ru
http://orcid.org/0000-0002-5353-6138

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 1, P. 16–26

ASYMPTOTIC LINES ON THE PSEUDO-SPHERICAL SURFACES

Kostin, A. V.[1]

[1] Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89, Kazanskaya St., Elabuga 423600, Russia
E-mail: kostin_andrei@mail.ru

Abstract. Consider the three-dimensional extended Lobachevsky space. In a proper area of Lobachevsky space take the 'complete' pseudosphere, that is, a surface of rotation of a straight line around a given parallel straight line. One part of it is embedded into Euclidean space in the form of the Beltrami–Minding funnel, the other one into three-dimensional Minkowski space as an analogue of the pseudosphere in this space. The interpretations of imaginary asymptotic lines on this pseudospherical surface with the Lobachevsky metric in Minkowski space are considered. Imaginary asymptotic lines on the pseudo-Euclidean continuation of the pseudosphere can be interpreted as real asymptotic lines on the surface of constant curvature with indefinite metric. These surfaces are other pseudo-Euclidean analogs of the Beltrami–Minding pseudosphere. The properties of the asymptotic lines on the pseudospheres with de Sitter metric in the three-dimensional Minkowsky space are studied. The considered properties of asymptotic lines on pseudospheres of pseudo-Euclidean space (Minkowski space) are similar to that of asymptotic lines on the Beltrami–Minding pseudosphere in Euclidean space. Areas of quadrangles of the asymptotic net on a surface of constant negative curvature in Euclidean space can be found by the Hazzidakis formula. These results are transferred to surfaces of constant curvature with indefinite metric in Minkowski space.

Key words: pseudosphere, Lobachevsky plane, de Sitter plane, asymptotic line, Chebyshev net, Minkowski space.

Mathematical Subject Classification (2000): 53A35, 53B30.

For citation: *Kostin, A. V.* Asymptotic Lines on the Pseudo-Spherical Surfaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 16–26 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27656.

References

1. *Minding, F.* Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1839, vol. 1839, no. 19, pp. 370–387. DOI: 10.1515/crll.1839.19.370.
2. *Blanusha, D.* C^∞-Isometric Imbeddings of the Hiperbolic Plane and of Cylinders with Hiperbolic Metric in Spherical Spaces, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1962, vol. 57, pp. 321–337. DOI: 10.1007/BF02417747.
3. *Blanusha, D.* C^∞-Isometric Imbeddings of Cylinders with Hyperbolic Metric in Euclidean 7-Space, *Glas. Mat.-Fiz. i Astron.*, 1956, vol. 11, no. 3–4, pp. 243–246.
4. *Rosenfeld, B. A. Neyevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean Space], Moscow, Nauka, 1969, 548 p. (in Russian).
5. *Hesse, L. O.* Über ein übertragungsprinzip, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1866, vol. 66, pp. 15–21. DOI: 10.1515/crll.1866.66.15.
6. *Tchebychev, P. L.* Sur la coupe de vêtements, *Association Francaise pour l'Avancement de Sciences. Congres de Paris*, 1878, pp. 154–155.
7. *Chebyshev, P. L.* On the Cutting of Garments, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1946, vol. 1, no. 2 (12), pp. 38–42 (in Russian).
8. *Hazzidakis, J. N.* Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmasz, *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 1880, vol. 88, pp. 68–73. DOI: 10.1515/crll.1880.88.68.
9. *Hilbert, D.* Über Flächen von konstanten Gauβscher Krümmung, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1901, vol. 2, pp. 87–99.
10. *Shirokov, P. A.* Interpretation and Metric of Quadratic Geometries, *Izbrannyye raboty po geometrii* [Selected Works on Geometry], Kazan, 1966, pp. 15–179 (in Russian).
11. *Kostin, A. V. and Sabitov, I. K.* Smarandache Theorem in Hyperbolic Geometry, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 221–232. DOI: 10.15407/mag10.02.221.
12. *Poznyak, É. G. and Popov A. G.* The Geometry of the sine-Gordon Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 70, no. 2, pp. 1666–1684. DOI: 10.1007/BF02110595.
13. *Chern, S. S.* Geometrical Interpretation of sinh-Gordon Equation, *Annales Polonici Mathematici*, 1981, vol. 39, pp. 63–69. DOI: 10.4064/ap-39-1-63-69.
14. *Galeeva, R. F. and Sokolov, D. D.* On the Geometric Interpretation of Solutions of Some Nonlinear Equations of Mathematical Physics, *Issledovaniya po teorii poverkhnostey v rimanovykh prostranstvakh* [Research on the Theory of Surfaces in Riemann Spaces], Leningrad, 1984, pp. 8–22 (in Russian).
15. *Klotz-Milnor, T.* Harmonic Maps and Classical Surface Theory in Minkowski 3-Space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 280, no. 1, pp. 161–185. DOI: 10.2307/1999607.
16. *Rosenfeld, B. A. and Maryukova, N. E.* Surfaces of Constant Curvature and Geometric Interpretation of the Klein–Gordon, sin-Gordon and sinh-Gordon equation, *Publications de L'Institut Mathématique*, 1997, vol. 61 (75), pp. 119–132.
17. *Lopez, R.* Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz–Minkowski Space, *International Electronic Journal of Geometry*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 44–107.
18. *Barros, M., Caballero, M. and Ortega, M.* Rotational Surfaces in L^3 and Solutions of the nonlinear Sigma Model, *Communication in Math. Physics*, 2009, vol. 290, no. 2, pp. 437–477. DOI: 10.1007/s00220-009-0850-0.
19. *Albujer, A. L. and Caballero, M.* Geometric Properties of Same Mean Curvature in R^3 and L^3, *Elsevier Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2017, vol. 445, no. 1, pp. 1013–1024. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.07.062.
20. *Lopez R. and Kaya S.* New examples of maximal surfaces in Lorentz–Minkowski space, *Kyushu Journal of Mathematics*, 2017, vol. 71, no. 2, pp. 311–327. DOI: 10.2206/kyushujm.71.311.
21. *Poznyak, É. G. and Shikin, E. V. Differentsial'naya geometria* [Differential Geometry], Moscow, Moscow State Univ. Publ., 1990, 384 p. (in Russian).
22. *Vygodskii, M. Ya. Differentsial'naya geometria* [Differential Geometry], Moscow–Leningrad, 1949, 512 p. (in Russian).
23. *Kostin, A. V.* The Regularity of Asymptotic Lines on the de Sitter Pseudosphere, *Geometry Days in Novosibirsk — 2012: Abstracts of the Inter. Conf. dedicated to 100th anniversary of A. D. Aleksandrov*, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the RAS, 2012, pp. 48–49 (in Russian).
24. *Kostin, A. V. and Kostina, N. N.* On the Evolutes of some Curves on the Pseudo-Euclidean Plane, *Trudy uchastnikov Mejdunarodnoi shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyati N. V. Efimova*

[Proceedings of the Participants of the International School-Seminar on Geometry and Analysis in Memory of N. V. Efimov], Abrau-Durso, 2004, pp. 34–35 (in Russian).

25. *Kostin, A. V.* On Asymptotic Nets on Pseudospheres, *Geometry Days in Novosibirsk — 2014: Abstracts of the Inter. Conf. dedicated to 85th anniversary of academian Yu. G. Reshetnyak*, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the RAS, 2014, p. 41 (in Russian).

26. *Kostin, A. V. and Kostina, N. N.* On the Interpretation of Asymptotic Directions, *Proceedings International Youth School-Seminar «Modern Geometry and its Applications», International Scientific Conference «Modern Geometry and its Applications»*, Kazan, Kazan Univ. Publ., 2017, pp. 75–76 (in Russian).

Received March 26, 2018

Andrey V. Kostin
Elabuga Institute of Kazan Federal University,
89, Kazanskaya St., Elabuga 423600, Russia,
Associate Professor of Mathematics and Applied Informatics
E-mail: `kostin_andrei@mail.ru`
http://orcid.org/0000-0002-5353-6138