Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 1, С. 62–73

УДК 517.53
DOI 10.23671/VNC.2019.1.27735

РАЗЛОЖЕНИЕ УИТНИ, ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ВОПРОСЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[#]

Ф. А. Шамоян[1], Е. В. Тасоева[2]

[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83;
[2] Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского, Россия, 241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14

E-mail: `shamoyanfa@yandex.ru`, `eka3543628@yandex.ru`

Аннотация. По классической теореме Уитни каждое открытое множество на плоскости можно представить в виде объединения специальных квадратов, внутренности которых не пересекаются. В статье, используя эти свойства квадратов Уитни, вводится новое понятие: для каждого центра a_k квадрата Уитни существует точка $a_k^* \in C/G$ такая, что расстояние до границы открытого множества G заключается между двумя константами независимо от k. Используя свойства Уитни в статье, в частности, устанавливается необходимое и достаточное условие на $z_{k}{}_1^\infty \subset G$, при котором оператор $R(f) = (f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n), \dots)$ отображает обобщенные плоские классы Неванлинны по множеству G в l^p.

Ключевые слова: классы Неванлинны, интерполяция, разложение Уитни, пространство Бергмана.

Mathematical Subject Classification (2000): 30H15, 32A35.

Образец цитирования: *Шамоян Ф. А., Тасоева Е. В.* Разложение Уитни, теоремы вложения и вопросы интерполяции в весовых пространствах аналитических функций // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 62–73. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27735.

1. Введение

Пусть G — область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, обозначим множество всех аналитических функций в G через $H(G)$, плоскую меру Лебега на $\mathbb{C}$ обозначим через m_2. В дальнейшем для вещественнозначных функций f и g с общей областью определения E запишем $g(\zeta) \lesssim f(\zeta)$, $\zeta \in E$, если существует положительное число c такое, что $g(\zeta) \leqslant cf(\zeta)$, $\zeta \in E$. Определим класс S_α^p:

$$S_\alpha^p(G) = \left\{ f \in H(G) : \int\limits_G \left(\ln^+ |f(z)| \right)^p \rho^\alpha(z, \partial G)\, dm_2(z) < +\infty \right\}.$$

[#]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-51-15005-НЦНИ.

Обозначим через $A^p_\alpha(G)$ соответствующее весовое пространство Бергмана [1], т. е.

$$A^p_\alpha(G) = \left\{ f \in H(G) : \int\limits_G |f(z)|^p \rho^\alpha(z, \partial G)\, dm_2(z) < +\infty \right\}.$$

Здесь и в дальнейшем $\rho(F, E)$ — расстояние между двумя множествами F и E.

Пусть Q — некоторое замкнутое множество на $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathring{Q}$ — внутренность множества Q. Если Q — квадрат, то через $Q(s)$, $s \in R_+$, обозначим квадрат, имеющий тот же центр, что и Q, но растянутый в s раз. Если Q — некоторое множество в $\mathbb{C}$, то через $d(Q)$ обозначим диаметр множества Q. Теперь сформулируем известную теорему Уитни о разложении открытых множеств.

Теорема Уитни [2, с. 199]**.** *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$. Тогда существует такой набор квадратов $F = \{Q_k\}_{k=1}^\infty$, что $G = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$,*

а) $\mathring{Q}_k \cap \mathring{Q}_m = \varnothing$, $k \neq m$;

б) $d(Q_k) \leqslant \rho(Q_k, \partial G) \leqslant 4d(Q_k)$;

в) для произвольного $s \in R_+$, $0 \leqslant s < 5/4$, квадраты $\{Q_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$ покрывают множество G конечнократно, т. е. существует число $P = P(s) \in N$ такое, что каждая точка z множества G принадлежит не более чем $P(s)$ квадратам из системы $\{Q_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$.

Определение 1. Пусть G — некоторое открытое множество на комплексной плоскости. Скажем, что G удовлетворяет условию (У), если существует такое разложение Уитни $\{Q_k\}$ и точки $a_k^* \in \mathbb{C} \backslash G$ такие, что $q_1 \rho(a_k^*, \partial G) \geqslant q\rho(a_k, \partial G)$, где a_k — центр квадрата Q_k, $k = 1, 2, \ldots$, а q и q_1 — достаточно большие положительные числа, не зависящие от k.

Замечание 1. Отметим, что произвольное ограниченное множество на комплексной плоскости удовлетворяет условию (У), при этом подходят любые разбиения Уитни. В случае неограниченных множеств это уже не так. Например, если G совпадает с полуплоскостью $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ или $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, то условие (У) очевидно для $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$, а для области $G = \mathbb{C} \backslash \Pi_h^+$, где $\Pi_h^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < h/2\}$, очевидно, что условие (У) не выполняется. В дальнейшем будем предполагать, что множество G удовлетворяет условию (У).

Замечание 2. Оценка числа q снизу возникает при изучении вышеуказанных классов и существенно зависит от p и α (см. (5), (6)).

Основным результатом работы является доказательство теорем 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию (У), $\{z_k\}_1^\infty \subset G$, $\{Q_k\}_1^\infty$ — разложение Уитни множества G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

$$1.\ \sum_{k=1}^\infty \rho\big(z_k, \partial G\big)^{\alpha+2} \big(\ln^+ |f(z_k)|\big)^p \lesssim \int\limits_G \big(\ln^+ |f(\zeta)|\big)^p \big(\rho(\zeta, \partial G)\big)^\alpha dm_2(\zeta),\ f \in S^p_\alpha(D); \tag{1}$$

$$2.\ \sup_{m \geqslant 1} n_m < +\infty,\ \text{где } n_m := \operatorname{card}\{z_k : z_k \in Q_m\}. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть G — открытое множество в $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, $\{z_k\}_1^\infty \subset G$, $\{Q_k\}_1^\infty$ — разложение Уитни множества G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

$$1.\ \sum_{k=1}^{+\infty} \rho(z_k, \partial G)^{\alpha+2} |f(z_k)|^p \lesssim \int\limits_G |f(\zeta)|^p \rho(\zeta, \partial G)^\alpha\, dm_2(\zeta),\ f \in A^p_\alpha(G);$$

2. *выполняется условие* (2).

Для формулировки следующего утверждения введем еще несколько обозначений. Пусть область G совпадает с единичным кругом D:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad k \in Z_+,\ l \in Z,\ -2^k \leqslant l \leqslant 2^k - 1,$$

положим

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z \in D : 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}.$$

Очевидно, что $D = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \big(\bigcup_{l=-2^k}^{2^k-1} \Delta_{k,l} \big)$, система $\{\Delta_{k,l}\}$ является аналогом разложения Уитни для единичного круга D.

Из теорем 1 и 2 следуют теоремы $1'$ и $2'$.

Теорема $1'$. *Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из единичного круга D. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \big(1 - |z_k|\big)^{\alpha+2} \big(\ln^+ |f(z_k)|\big)^p \lesssim \int_D \big(1 - |\zeta|\big)^\alpha \big(\ln^+ |f(\zeta)|\big)^p\, dm_2(\zeta),\ f \in S^p_\alpha(D);$
2. $$\sup_{k\in Z_+} \max_{-2^k \leqslant l < 2^k - 1} \operatorname{card}(z_m : z_m \in \Delta_{k,l}) < +\infty. \tag{3}$$

Теорема $2'$. *Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$, $\{z_k\}_1^\infty \subset D$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} |f(z_k)|^p \lesssim \int_D (1 - |\zeta|)^\alpha |f(\zeta)|^p\, dm_2(\zeta),\ f \in A^p_\alpha(D);$
2. *выполняется условие* (3).

Замечание 3. Метод, применяемый при доказательстве теорем 1, 2, был разработан еще в 1975 г. в работах первого автора [3, 4]. Аналог теоремы 2, в случае единичного круга в других терминах, ранее был получен в хорошо известных работах К. Сейпа [5, с. 56; 6, с. 43].

Замечание 4. Естественно, в случае неограниченных множеств G, мы предполагаем нетривиальность классов $A^p_\alpha(G)$, $S^p_\alpha(G)$. Довольно интересные результаты в этом направлении, при $\alpha = 0$, получены Л. Карлесоном [7, гл. 2].

Из теоремы $1'$ следует, что оператор

$$R(f) = (f(z_1), \ldots, f(z_n), \ldots)$$

при условии (3) отображает $S^p_\alpha(D)$ в пространство

$$\tilde{l}^p_\alpha = \left\{ w = \{w_k\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^{+\infty} \big(1 - |z_k|\big)^{\alpha+2} \big(\ln^+ |w_k|\big)^p < +\infty \right\}.$$

Естественно возникает вопрос: при каких дополнительных условиях на $\{z_k\}_1^\infty$ оператор R отображает S^p_α на $\tilde{l}^p_\alpha$? Такие последовательности назовем *интерполяционными* для класса $S^p_\alpha(D)$. Аналогичная задача для весовых пространств Бергмана A^p_α в единичном круге $\mathbb{D}$ решена в хорошо известных работах К. Сейпа [6, с. 56].

Из теорем 1 и 2 непосредственно следуют теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть G — некоторая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, удовлетворяет условию (У), $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из G. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \rho^{\alpha+2}\big(z_k, \partial G\big)\big(\ln^+ |f(z_k)|\big)^p < +\infty,\ f \in S^p_\alpha(G)$;
2. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \rho^{\alpha+2}\big(z_k, \partial G\big)\big|g(z_k)\big|^p < +\infty,\ g \in A^p_\alpha(G)$.

Теорема 4. *Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность из единичного круга D, удовлетворяющая условиям теоремы $1'$. Если $\{z_k\}_1^\infty$ — интерполяционная последовательность для пространства $A^p_\alpha(D)$, $-1 < \alpha < +\infty$, $0 < p < +\infty$, то оператор R отображает S^p_α на $\tilde{l}^p_\alpha$, т. е. $\{z_k\}_1^\infty$ является интерполяционной последовательностью и для класса $S^p_\alpha(D)$.*

2. Доказательство вспомогательных утверждений

Лемма 1. *Пусть $w \in \mathbb{C}, |w| < \sigma < 2^{1/m} - 1$, $m \in N$. Тогда*

$$\operatorname{Re}(1-w)^m \geqslant \delta > 0, \quad \delta = 2^{\frac{1}{m}} - 1 - \sigma.$$

◁ Пусть $w = \rho e^{i\theta}$, ясно, что

$$\operatorname{Re}(1-w)^m = \operatorname{Re}\big(1-\rho e^{i\theta}\big)^m = \rho^m \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\rho} - e^{i\theta}\right)^m = \rho^m \sum_{j=1}^{m} c_m^j (-1)^j \frac{1}{\rho^{m-j}} \cos\theta$$

$$\geqslant \rho^m \left(\frac{1}{\rho^m} - \sum_{j=1}^{m} \frac{c_m^j}{\rho^{m-j}}\right) = \left(1 - \sum_{j=1}^{m} c_m^j \rho^j\right) = \big(2 - (1+\rho)^m\big) = \Big(\big(2^{\frac{1}{m}}\big)^m - (1+\rho)^m\Big)$$

$$= \Big(2^{\frac{1}{m}} - (1+\rho)\Big)\left(\sum_{j=1}^{m-1} 2^{\frac{1}{m}j}(1+\rho)^{m-j-1}\right) \geqslant 2^{\frac{1}{m}} - 1 - \rho.$$

Положим $\delta = 2^{1/m} - 1 - \sigma$. Тогда при $0 \leqslant \rho < \sigma < 2^{1/m} - 1$ получим нужное утверждение. ▷

Следующее утверждение следует из хорошо известных свойств интеграла (см. [2, с. 15]).

Пусть (X, μ) — пространство с мерой, $0 < p < +\infty$, f — измеримая функция. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int |f(y)|^p \, d\mu(y) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} g(t)\, dt,$$

где $g(t) = \mu(x : |f(x)| > t)$, $t > 0$.

Лемма 2. *Пусть G — произвольная область в $\mathbb{C}$, $G \neq \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \backslash (G \cup \partial G) = \Omega$, $\beta > \alpha + 2$, $\alpha > 0$. Тогда, если $z \in \Omega$, то справедлива оценка*

$$\int_G \frac{\rho(\zeta, \partial G)^\alpha}{|\zeta - z|^\beta}\, dm_2(\zeta) \lesssim \frac{1}{(\rho(z, \partial G))^{\beta-\alpha-2}}.$$

$\lhd$ Фиксируем точку $z \in \Omega$. Положим $X = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| \geqslant \rho(z, \partial G)\}$, $\varepsilon = \rho(z, \partial G)$,

$$f_z(\zeta) = \begin{cases} 0, & |z-\zeta| < \varepsilon, \\ \frac{1}{\zeta - z}, & |\zeta - z| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

В качестве μ подберем меру $d\mu_\alpha(\zeta) = \rho(\zeta, \partial G)^\alpha dm_2(\zeta)$. Положив $p = \beta$, будем иметь

$$\int\limits_G \frac{\rho^\alpha(\zeta, \partial G)}{|\zeta - z|^\beta}\, dm_2(\zeta) \leqslant \int\limits_G |f_z(\zeta)|^p \, d\mu_\alpha(\zeta) = \beta \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} g(t)\, dt,$$

где $g(t) = \mu_\alpha(E(\zeta : |f_z(\zeta)| > t))$, $t > 0$. Перейдем к оценке последнего интеграла.

Пусть, как и прежде, $\varepsilon = \rho(z, \partial G)$. Докажем, что если $t > 1/\varepsilon$, то $g(t) = 0$. Действительно, нетрудно заметить, что из условия $t > 1/\varepsilon$ следует, что $|z-\zeta| < \varepsilon$, по определению $f_z(\zeta) = 0$. Следовательно, $E = \varnothing$, поэтому $g(t) = 0$.

Рассмотрим случай $0 < t \leqslant 1/\varepsilon$. Тогда из условия $|f_z(\zeta)| > t$ следует, что $|\zeta - z| < 1/t$, и поэтому $E \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : \varepsilon < |\zeta - z| < 1/t\} \subset \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < 1/t\}$. Следовательно, поскольку $\rho^\alpha(\zeta, \partial G) \leqslant |\zeta - z|^\alpha \leqslant 1/t^\alpha$, то

$$g(t) = \mu_\alpha\big(E(\zeta : |f_z(\zeta)| > t)\big) \leqslant \int\limits_{|\zeta - z| < \frac{1}{t}} |\zeta - z|^\alpha \, dm_2(\zeta) \leqslant \frac{\pi}{t^{\alpha+2}}.$$

Таким образом,

$$\beta \int\limits_0^{+\infty} t^{\beta-1} g(t)\, dt \leqslant \pi\beta \int\limits_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{t^{\beta-1}}{t^{\alpha+2}}\, dt = \frac{\pi\beta}{(\beta-\alpha-2)\varepsilon^{\beta-\alpha-2}},$$

т. е.

$$\int\limits_G \frac{\rho(\zeta, \partial G)^\alpha}{|\zeta - z|^\beta} \lesssim \frac{1}{\rho^{\beta-\alpha-2}(z, \partial G)}, \quad \beta > \alpha + 2. \rhd$$

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. 1) $\Rightarrow$ 2): Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из G, для которой выполняется оценка (1). Докажем, что если $\{Q_k\}_1^\infty$ — соответствующее разложение Уитни множества G, то

$$\sup_{m \geqslant 1} n_m < +\infty,$$

где

$$n_m = \operatorname{card}\{z_k : z_k \in Q_m\}.$$

Зафиксируем число $s \in N$ и квадрат Q_s в разложении Уитни множества G. Пусть $z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_{n_s}^{(s)}$ — точки из последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, принадлежащей квадрату Q_s, $s \in N$. Тогда оценку

$$\sum_{k=1}^\infty \rho\big(z_k, \partial G\big)^{\alpha+2} \big(\ln^+ |f(z_k)|\big)^p \lesssim \int\limits_G \big(\ln^+ |f(\zeta)|\big)^p \big(\rho(\zeta, \partial G)\big)^\alpha \, dm_2(\zeta)$$

можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \rho^{\alpha+2}(a_m, \partial G) \sum_{l=1}^{n_m} \left(\ln^+ \left| f\left(z_l^{(m)}\right)\right| \right)^p \lesssim \int\limits_G \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p \rho^\alpha(\zeta, \partial G)\, dm_2(\zeta),$$

где a_m — центр квадрата Q_m. Из этой оценки следует, что

$$\rho^{\alpha+2}(a_s, \partial G) \sum_{l=1}^{n_s} \left(\ln^+ \left| f\left(z_l^{(s)}\right)\right| \right)^p \lesssim \int\limits_G \rho(\zeta, \partial G)^\alpha \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta). \tag{4}$$

Перейдем к построению вспомогательной функции. Пусть a_s^* такая точка из $\mathbb{C}\backslash G := \Omega$, что $\rho(a_s^*, \partial G) \geqslant q\rho(a_s, \partial G)$. Положим

$$f_{s,k}(z) = \exp\left\{ \frac{e^{ik\varphi_s}}{(z-a_s^*)^k} \right\}, \quad z \in G,\ k \in N,\ k > \frac{\alpha+2}{p},\ \varphi_s = \arg(a_s - a_s^*), \tag{5}$$

при этом $1/q < 2^{2/k} - 1$.

Очевидно, что $f_{s,k} \in S_\alpha^p(G)$. Поэтому можно применить оценку (4) к функции $f_{s,k}$. Получим

$$\rho^{\alpha+2}(a_s, \partial G) \sum_{l=1}^{n_s} \left(\ln^+ \left| f_{s,k}\left(z_l^{(s)}\right)\right| \right)^p \lesssim \int\limits_G \rho^\alpha(\zeta, \partial G)^\alpha \left(\ln^+ |f_{s,k}(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta).$$

Ясно, что

$$\ln^+ \left| f_{s,k}(\zeta)\right| = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ik\varphi_s}}{(\zeta-a_s^*)^k} \right) \leqslant \frac{1}{|\zeta - a_s^*|^k}.$$

Далее по лемме 2

$$\int\limits_G \rho^\alpha(\zeta, \partial G)\left(\ln^+ |f_{s,k}(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta) \leqslant \int\limits_G \frac{\rho^\alpha(\zeta, \partial G)}{|\zeta - a_s^*|^{kp}}\, dm_2(\zeta) \lesssim \frac{1}{\rho\left(a_s^*, \partial G\right)^{pk-\alpha-2}},$$

поскольку $k > (\alpha+2)/p$. Таким образом, получаем

$$\rho^{\alpha+2}(a_s, \partial G) \sum_{l=1}^{n_s} \left(\ln^+ \left| f_{s,l}\left(z_l^{(s)}\right)\right| \right)^p \lesssim \frac{1}{\rho(a_s^*, \partial G)^{pk-\alpha-2}}.$$

Теперь перейдем к оценке $\left(\ln^+ \left|f\left(z_l^{(s)}\right)\right|\right)^p$ снизу. Учитывая равенство

$$\ln^+ \left| f_{s,k}(\zeta)\right| = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ik\varphi_s}}{(\zeta-a_s^*)^k} \right),$$

имеем

$$\ln \left| f_{s,k}\left(z_l^{(s)}\right)\right| = \operatorname{Re} \frac{e^{ik\varphi_s}}{\left(z_l^{(s)} - a_s^*\right)^k} = \operatorname{Re} \frac{\left(e^{ik\varphi_s}\left(\overline{z_l^{(s)}} - \overline{a_s^*}\right)\right)^k}{\left|z_l^{(s)} - a_s^*\right|^{2k}}$$

$$= \frac{1}{\left|z_l^{(s)} - a_s^*\right|^{2k}} \operatorname{Re} e^{ik\varphi_s}\left(\overline{z_l^{(s)}} - \overline{a_s^*}\right)^k.$$

Преобразуем выражение

$$\operatorname{Re} e^{ik\varphi_s}\left(\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a_s^*}\right)^k=\operatorname{Re} e^{ik\varphi_s}\left(\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s+\overline{a}_s-\overline{a_s^*}\right)^k$$

$$=\operatorname{Re} e^{ik\varphi_s}\left(\overline{a}_s-\overline{a_s^*}\right)^k\left(1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k=\left|a_s-a_s^*\right|^k\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k.$$

В последнем равенстве мы пользовались определением φ_s.

Таким образом, из последнего равенства окончательно получим

$$\ln\left|f_{s,k}\left(z_l^{(s)}\right)\right|=\frac{|a_s-a_s^*|^k}{\left|z_l^{(s)}-a_s^*\right|^{2k}}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k.$$

Следовательно,

$$\ln\left|f_{s,k}\left(z_l^{(s)}\right)\right|=\frac{|a_s-a_s^*|^k}{\left|z_l^{(s)}-a_s+a_s-a_s^*\right|^{2k}}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_k^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k$$

$$=\frac{|a_s-a_s^*|^k}{|a_s-a_s^*|^{2k}\left(\left|1+\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|^{2k}\right)}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_k^{(s)}}-\overline{a}_s}{a_s-a_s^*}\right)^k$$

$$=\frac{1}{|a_s-a_s^*|^k\left|1+\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right|^{2k}}\operatorname{Re}\left(1+\frac{\overline{z_k^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}\right)^k.$$

Положим $w_s=\frac{\overline{z_l^{(s)}}-\overline{a}_s}{\overline{a}_s-\overline{a_s^*}}$. Учитывая, что точки $z_l^{(s)}$ и a_s принадлежат прямоугольнику Q_s, а также теорему Уитни, получаем

$$\left|z_l^{(s)}-a_s\right|\leqslant d(Q_k)\leqslant\rho(Q_k,\partial G).$$

В то же время, по выбору a_s^*, можно предположить, что

$$\frac{\rho(a_s,\partial G)}{\rho(a_s^*,\partial G)}\leqslant\frac{1}{q}<2^{\frac{2}{k}}-1, \tag{6}$$

поэтому, применяя лемму 1, положим $\sigma=1/q$ к выражению $(1+w_s)^k$, получаем

$$\ln\left|f_{s,k}\left(z_l^{(s)}\right)\right|\geqslant\frac{\delta}{|a_s-a_s^*|^k}\,\frac{1}{2^{2k}}.$$

Здесь мы применяли оценки:

$$\left|1+\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|\leqslant 1+\left|\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|;\quad\left|\frac{z_l^{(s)}-a_s}{a_s-a_s^*}\right|\leqslant\frac{\rho(a_s,\partial G)}{\rho(a_s,\partial G)}=1,$$

т. е.

$$\left(\ln^+\left|f_{s,k}\left(z_l^{(s)}\right)\right|\right)^p\geqslant\frac{\delta^p}{|a_s-a_s^*|^{kp}}\,\frac{1}{2^{2kp}}$$

при всех $1 \leqslant l \leqslant n_s$.

Теперь применяя полученные выше оценки, приходим к неравенству

$$\rho^{\alpha+2}(Q_s, \partial G)\delta^p \frac{n_s}{|a_s - a_s^*|}^{kp} 2^{2kp} \lesssim \frac{1}{\rho(a_s^*, \partial G)^{pk-\alpha-2}}.$$

Но поскольку

$$|a_s - a_s^*| \leqslant \rho(a_s, \partial G) + \rho(a_s^*, \partial G),$$

$$\rho(a_s, \partial G) + \rho(a_s^*, \partial G) \leqslant \rho(a_s, \partial G)(1 + q_1),$$

то используя условие (У), получаем

$$n_s \leqslant \frac{(1+q_1)^{kp}}{\delta^p},$$

т. е.

$$\sup_{s \geqslant 1} n_s < +\infty.$$

Импликация 1)⇒2) в теореме 1 установлена.

2)⇒ 1): Доказательство импликации 2)⇒1) фактически установлено в работах [3, 4].

Докажем более сильное утверждение. Для этого введем следующий класс функций. Через $H(S, G)$ обозначим класс непрерывных, неотрицательных функций U на G, удовлетворяющих следующему условию:

Существует положительное число A, зависящее только от U, такое, что для произвольной точки $z \in G$ и $\rho > 0$, удовлетворяющим соотношению

$$K_\rho(z) = \{\zeta : |\zeta - z| < \rho\},$$

выполняется оценка

$$U(z) \leqslant \frac{A}{\pi\rho^2} \int\limits_{K_\rho(z)} U(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

Ясно, что если $p \geqslant 1$, $\alpha > -1$, то классы $S^p_\alpha(G)$ и $A^p_\alpha(G)$ входят в $H(S, G)$, поскольку функции $|f|^p$ и $(\ln^+|f|)^p$ являются субгармоническими, а при $0 < p < 1$ такое включение также справедливо и следует из хорошо известной теоремы Стейна — Феффермана (см. [1, 6]).

Перейдем к импликации 2)⇒1) для функции $U \in H(S, G)$. Пусть

$$I(U) = \sum_{m=1}^{+\infty} \rho(z_m, \partial G)^{\alpha+2} U(z_m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{l=1}^{n_k} \rho\Big(z_l^{(k)}, \partial G\Big)^{\alpha+2} U\Big(z_l^{(k)}\Big) \right).$$

Напомним, что $z_l^{(k)}$, $1 \leqslant l \leqslant n_k$, — точки из последовательности $\{z_m\}_1^\infty$, принадлежащие квадрату Q_k, $1 \leqslant k < +\infty$.

Пусть

$$I_k = \sum_{l=1}^{n_k} \rho\Big(z_l^{(k)}, \partial G\Big)^{\alpha+2} U\Big(z_l^{(k)}\Big),$$

$z_l^{(k)}$ — фиксированная точка из квадрата Q_k, $1 \leqslant l \leqslant n_k$. Подбирая достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и положив

$$\rho_k = \frac{\rho(Q_k, \partial G)}{2},$$

можем утверждать, что круг $K_{\rho_k}\Big(z_l^{(k)}\Big) \subset Q_k^*(1+\varepsilon)$.

Поэтому

$$U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant \frac{A}{\pi\rho_k^2} \int\limits_{K_{\rho_k}\left(z_l^{(k)}\right)} U(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

Таким же образом

$$\rho_k^{\alpha+2} U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant C(A) \int\limits_{K_{\rho_k}\left(z_l^{(k)}\right)} U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^\alpha\, dm_2(\zeta).$$

Суммируя последние оценки по l, $1 \leqslant l \leqslant n_k$, получаем

$$I_k \lesssim {\rho_k}^{\alpha+2} \sum_{l=1}^{n_k} U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant C(A) \int\limits_{Q_k^*(1+\varepsilon)} U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^\alpha\, dm_2(\zeta).$$

Если $z_{l_1}^{(k)}, z_{l_2}^{(k)} \in Q_k$, то из теоремы Уитни следует, что

$$\rho\Big(z_{l_1}^{(k)}, \partial G\Big) \leqslant 2\rho\Big(z_{l_2}^{(k)}, \partial G\Big).$$

Из оценки

$$I_k \leqslant C(A) \int\limits_{Q_k^*(1+\varepsilon)} U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^\alpha\, dm_2(\zeta)$$

получаем

$$I_k \lesssim \sum_{l=1}^{n_k} \rho\Big(z_l^{(k)}, \partial G\Big)\, U\Big(z_l^{(k)}\Big) \leqslant C_1(A) \int\limits_{Q_k^*(1+\varepsilon)} U(\zeta)\, (\zeta, \partial G)\, \rho^\alpha\, dm_2(\zeta).$$

Теперь, учитывая, что $\{Q_k(1+\varepsilon)\}_{k=1}^\infty$ при $0 < \varepsilon < 1/4$ (см. [2]) покрывает G конечно-кратно, непосредственно получаем

$$\sum_{m=1}^\infty \rho(z_m, \partial G)^{\alpha+2}\, U(z_m) \lesssim \int\limits_G U(\zeta)\, \rho(\zeta, \partial G)^\alpha\, dm_2(\zeta). \ \triangleright$$

Ясно, что из теоремы 1 следуют теорема 2, $1'$, $2'$ и 3.

Доказательство теоремы 4. Как отмечено выше, из теоремы $1'$ следует, что если оператор R отображает S_α^p в $\widetilde{l}_\alpha^p$, где

$$\widetilde{l}\,_\alpha^p = \Big\{ w = \{w_k\}_{k=1}^{+\infty} : \sum_{k=1}^\infty \big(\ln^+ |w_k|\big)^p \big(1 - |z_k|\big)^{\alpha+2} < +\infty \Big\},$$

то количество точек в каждом прямоугольнике

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z \in D : 1 - \frac{1}{2^k} \leqslant |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\},$$

$$n_{k,l} = \operatorname{card}\big\{ z_m : z_m \in \Delta_{k,l} \big\},$$

удовлетворяет условию

$$\sup_{k\in Z_+} \max_{-2^k\leqslant l<2^k-1} \{n_{k,l}\} < +\infty.$$

Докажем, что если $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — интерполяционная последовательность для A^p_α, то R отображает S^p_α на $\tilde{l}^p_\alpha$. Действительно, из теоремы $2'$ следует, что выполняется условие (2), а из теоремы $1'$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bigl(1-|z_k|\bigr)^{\alpha+2} \bigl(\ln^+|f(z_k)|\bigr)^p < +\infty$$

для произвольного $f\in S^p_\alpha$, $0<p<+\infty$, $\alpha>-1$.

Докажем, что если $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — интерполяционная последовательность для A^p_α, то для произвольной последовательности $w=\{w_k\}_{k=1}^{\infty}\in\tilde{l}^p_\alpha$ существует функция $f\in S^p_\alpha$ такая, что $R(f)=w$, т. е. $f(z_k)=w_k$, $k=1,2,\ldots$

Итак, пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bigl(1-|z_k|\bigr)^{\alpha+2} \bigl(\ln^+|w_k|\ \bigr)^p < +\infty.$$

Последовательность $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ разобьем на две части:

1. $\{w_{k_n}\}_1^{\infty}$: $|w_{k_n}|>1$;
2. $\{w_{m_n}\}_1^{\infty}$: $|w_{m_n}|\leqslant 1$.

Не ограничивая общности можно предполагать, что количество таких чисел бесконечно.

Поскольку $\{z_n\}_1^{\infty}$ — интерполяционная последовательность для A^p_α, то существует функция $g_1\in A^p_\alpha$ такая, что

$$g_1(z_{m_n})=0,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$g_1(z_{k_n})=\ln w_{k_n},\quad n=1,2,\ldots,$$

где выбрана главная ветвь логарифма. Аналогично построим функцию $g_2\in A^p_\alpha$ такую, что

$$g_2(z_{k_n})=1,\quad n=1,2,\ldots,$$

$$g_2(z_{m_n})=w_{m_n},\quad n=1,2,\ldots$$

Положим

$$f(z)=e^{g_1(z)}g_2(z),\quad z\in\mathbb{D}.$$

Докажем, что функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 3, т. е.

$$f\in S^p_\alpha,\quad f(z_k)=w_k,\quad k=1,2,\ldots$$

Пусть $k=k_n$ при некотором n, тогда

$$f(z_k)=e^{g_1(z_{k_n})}g_2(z_{k_n})=w_{k_n}=w_k.$$

Пусть теперь $k=m_n$ при некотором n, тогда

$$f(z_k)=e^{g_1(z_{m_n})}g_2(z_{m_n})=g_2(z_{m_n})=w_{m_n}=w_k.$$

Из последних равенств следует, что $f(z_k)=w_k, k=1,2,\ldots$ $\rhd$

Авторы статьи выражают благодарность рецензенту статьи за внимательное ознакомление с рукописью и конструктивные замечания.

Литература

1. *Djrbashyan A. E., Shamoyan F. A.* Topics in the Theory of A^p_α Spaces.—Leipzig: B. G. Teubner, 1988.—200 p.—(Teubner-Texte zur Math. Bd. 105).
2. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.
3. *Шамоян Ф. А.* Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H^p, $0 < p < +\infty$ // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Математика.—1976.—Т. 11, № 2.—С. 124–131.
4. *Шамоян Ф. А.* Теорема вложения в пространствах n-гармонических функций и некоторые приложения // Докл. АН Арм. ССР.—1976.—Т. 62, № 1.—С. 10–14.
5. *Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K.* Theory of Bergman Spaces.—N. Y.: Springer, 2000.—199 p.—(Grad. Texts in Math.).
6. *Seip K.* Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions.—Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 2004.—139 p.—(Univ. Lect. Ser. Vol. 33).
7. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств.—М.: Мир, 1971.—125 с.

Статья поступила 28 февраля 2018 г.

Шамоян Файзо Агитович
Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru

Тасоева Екатерина Владимировна
Брянский государственный университет им. И. Г. Петровского,
аспирант, преподаватель кафедры АИСиТ
РОССИЯ, 241036, Брянск, ул. Бежицкая, 14
E-mail: eka3543628@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 1, P. 62–73

WHITNEY DECOMPOSITION, EMBEDDING THEOREMS, AND INTERPOLATION IN WEIGHTED SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Shamoyan, F. A.[1] and Tasoeva, E. V.[2]

[1] Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia;
[2] Bryansk State University, 14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia
E-mail: shamoyanfa@yandex.ru, eka3543628@yandex.ru

Abstract. According to the classical Whitney theorem, each open set on the plane can be decomposed as a union of special squares whose interiors do not intersect. In the paper, using the properties of Whitney squares, a new concept is introduced. For each center a_k of the Whitney square, there is a point $a_k^* \in \mathbb{C} \setminus G$ such that the distance to the boundary of the open set G is between two constants, regardless of k. In particular, a necessary and sufficient condition for a sequence $(z_k)_1^\infty \subset G$ under which the operator $R(f) = (f(z_1), f(z_2), \dots, f(z_n), \dots)$ maps generalized Nevanlinna's flat classes in a domain G of a complex plane in l^p.

Key words: Nevanlinna class, interpolation, Witny decomposition, Berman space.

Mathematical Subject Classification (2000): 30H15, 32A35.

For citation: *Shamoyan, F. A. and Tasoeva, E. V.* Whitney Decomposition, Embedding Theorems and Interpolation Questions in Weight Spaces of Analytic Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 62–73 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27735.

References

1. *Djrbashyan, A. E. and Shamoyan, F. A. Topics in the Theory of A^p_α Spaces. Teubner-Texte zur Math. Bd.* 105, Leipzig, B. G. Teubner, 1988, 200 p.
2. *Stein, E. M. Singular Integrals Differentiability Properties of Functions*, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, 1970, xiv+287 p.
3. *Shamoyan, F. A.* Imbedding Theorems Connected With Problem of Multiple Interpolation in Spaces H^p, $0 < p < +\infty$, *Izv. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1976, vol. 11, no. 2, pp. 124–131 (in Russian).
4. *Shamoyan, F. A.* The Embending Theorem in Space of n-Harmonic Functions and Some Applications, *Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR*, 1976, vol. 62, no. 1, pp. 10–14 (in Russian).
5. *Hedenmalm, H., Korenblum, B. and Zhu, K. Theory of Bergman Spaces. Grad. Texts in Math.*, N. Y., Springer, 2000, 199 p.
6. *Seip, K. Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions. Univ. Lect. Ser. Vol.* 33, Providence, R. I., Amer. Math. Soc., 2004, 139 p.
7. *Carleson, L. Selected Problems on Exceptional Sets*, Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand, 1967, vi+151 p.

Received February 28, 2018

Faizo A. Shamoyan
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia,
Professor of the Mathematical Analysis Department
E-mail: `shamoyanfa@yandex.ru`

Ekaterina V. Tasoeva
Bryansk State University,
14 Bezhitskaya St., Bryansk 241036, Russia,
Post-Graduate Student
E-mail: `eka3543628@yandex.ru`