Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 53–69

УДК 517.952
DOI 10.46698/g9113-3086-1480-k

О МНОГОМЕРНЫХ ДЕТЕРМИНАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ

И. В. Рахмелевич[1]

[1] Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: `igor-kitpd@yandex.ru`

Аннотация. Рассмотрен класс многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений, левая часть которых представляет собой определитель с элементами, содержащими произведение линейных одномерных дифференциальных операторов произвольного порядка, а правая часть зависит от искомой функции и ее первых производных. Отдельно исследованы однородные и неоднородные детерминантные дифференциально-операторные уравнения. Доказаны теоремы о понижении размерности уравнения. Получены решения в виде суммы и произведения функций от подмножеств независимых переменных, и в том числе, функций одной переменной. В частности, доказано, что решением рассматриваемого однородного уравнения является произведение собственных функций линейных операторов, входящих в состав уравнения. Для однородного уравнения доказана теорема о взаимосвязи решений исходного уравнения и некоторого вспомогательного линейного уравнения, а также получено решение уравнения для случая, когда линейные дифференциальные операторы, входящие в его состав, имеют пропорциональные собственные значения. Получены решения типа бегущей волны, в том числе решения степенного и экспоненциального вида, а также в виде произвольной функции от линейной комбинации независимых переменных. В случае, когда линейные операторы, входящие в состав уравнения, являются однородными, найдены решения в виде обобщенных мономов. Для неоднородного уравнения получены частные решения в случаях, когда правая часть содержит только независимые переменные, и когда правая часть содержит степенную или экспоненциальную нелинейность от искомой функции, и степени первых производных от этой функции.

Ключевые слова: детерминантное дифференциально-операторное уравнение, определитель, линейный дифференциальный оператор, собственная функция, ядро оператора, решение типа бегущей волны.

Mathematical Subject Classification (2010): 35G20.

Образец цитирования: *Рахмелевич И. В.* О многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнениях // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 53–69. DOI: 10.46698/g9113-3086-1480-k.

Введение

Важнейшим направлением современной математической физики является исследование многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и нахождение их точных решений [1–7]. Одним из наиболее известных нелинейных уравнений является уравнение Монжа — Ампера (МА), которому уделяется большое внимание как в известных справочниках, так и в оригинальных работах [1, 8–10]. Уравнение

МА принадлежит к весьма широкому классу детерминантных уравнений. Исследование двумерного детерминантного дифференциально-операторного уравнения проведено в работе [11]. Общие свойства этого класса уравнений и его решений в случае произвольной размерности в настоящее время практически не исследованы. Целью данной работы является исследование многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений, левая часть которых представляет собой определитель с элементами, содержащими произведение линейных одномерных дифференциальных операторов произвольного порядка. При этом изучаются как однородные уравнения, так и неоднородные, правая часть которых содержит независимые переменные, искомую функцию и ее первые производные.

1. Постановка задачи. Анализ однородных уравнений

Рассмотрим класс многомерных детерминантных дифференциально-операторных уравнений в частных производных относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$\det|\hat{R}u| = F\left(u, x_1, x_2, \ldots, x_N, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right). \tag{1.1}$$

Здесь F — заданная функция, а $\hat{R}$ — операторная матрица, элементы которой определяются выражениями

$$\hat{R}_{ij} = \hat{L}_i \hat{L}_j, \tag{1.2}$$

$\hat{L}_i$ — линейный дифференциальный оператор, действующий по переменной x_i и определяемый выражением

$$\hat{L}_i = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi}(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m, \tag{1.3}$$

a_{mi} — некоторые заданные функции. Наиболее известным и хорошо исследованным уравнением, относящимся к классу уравнений (1.1), является уравнение Монжа — Ампера, для которого $\hat{L}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, N$.

Представим множество значений $I = \{1, \ldots, N\}$ индекса, нумерующего независимые переменные, в виде объединения K непересекающихся подмножеств I_k ($k \in \Xi$, $\Xi = \{1, \ldots, K\}$). Тогда множество переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ может быть разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_n\}_{n \in I_k}$. Далее для сокращения записи будем использовать обозначения вида $u(X)$ вместо $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, и аналогично $u_k(X_k)$; правую часть уравнения (1.1) будем записывать в виде $F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right)$, где введено обозначение

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right\}.$$

Также в дальнейшем используются обозначения $\Lambda_n = \ker \hat{L}_n$, $\tilde{\Lambda}_n = \ker(\hat{L}_n^2)$. В данном параграфе будем предполагать, что правая часть $F \equiv 0$, т. е. уравнение (1.1) является однородным:

$$\det|\hat{R}u| = 0. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $\hat{R}_k = (\hat{R}_{ij})_{i,j \in I_k}$ *для всех* $k \in \Xi$. *Пусть также при некотором* $l \in \Xi$ *функция* $u_l(X_l)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\det|\hat{R}_l u_l| = 0. \tag{1.5}$$

Тогда уравнение (1.4) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} u_k(X_k), \tag{1.6}$$

где $u_k(X_k)$ для всех $k \in \Xi$, $k \neq l$, — произвольные функции своих аргументов, дифференцируемые необходимое число раз.

$\triangleleft$ Пусть $i \in I_{k_1}$, $j \in I_{k_2}$, причем $k_1, k_2 \in \Xi$, $k_1 \neq k_2$. В этом случае $\hat{L}_i \hat{L}_j u_k(X_k) = 0$ для любого $k \in \Xi$. Тогда, используя выражение (1.6), вычисляем соответствующие матричные элементы в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{R}_{ij} u = \hat{L}_i \hat{L}_j \left(\sum_{k=1}^{K} u_k(X_k) \right) = 0. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что

$$\hat{R} u = \operatorname{blockdiag}(\hat{R}_1 u_1, \ldots, \hat{R}_K u_K). \tag{1.8}$$

Согласно известному свойству определителя блочно-диагональной матрицы

$$\det |\hat{R} u| = \prod_{k=1}^{K} \det |\hat{R}_k u_k|. \tag{1.9}$$

В силу (1.5) сомножитель с номером l в правой части (1.9) равен 0, поэтому при любых $u_k(X_k)$ ($k \in \Xi$, $k \neq l$) функция $u(X)$, определяемая выражением (1.6), удовлетворяет уравнению (1.4). $\triangleright$

Теорема 1.2. *Пусть функция $u(X)$ удовлетворяет уравнению*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \hat{L}_i \right) u(X) = 0, \tag{1.10}$$

где c_i — любые вещественные коэффициенты, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{N} c_i^2 > 0. \tag{1.10 a}$$

Тогда функция $u(X)$ является решением уравнения (1.4).

$\triangleleft$ С учетом (1.10a) без ограничения общности предположим, что $c_N \neq 0$. Тогда из (1.10) следует

$$\hat{L}_N u = -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{c_j}{c_N} \hat{L}_j u. \tag{1.11}$$

Применяя оператор $\hat{L}_i$ к (1.11) и учитывая (1.2), получаем

$$\hat{R}_{iN} u = -\sum_{j=1}^{N-1} \frac{c_j}{c_N} \hat{R}_{ij} u. \tag{1.12}$$

Соотношение (1.12) означает, что N-й столбец матрицы $\hat{R} u$ представлен в виде линейной комбинации остальных ее столбцов, поэтому определитель этой матрицы тождественно равен 0, т. е. $u(X)$ является решением уравнения (1.4). $\triangleright$

Теорема 1.3. *Пусть функция $u_0(X)$ удовлетворяет уравнению (1.4), а при каждом $n \in I$ функции $w_{n,s_n}(x_n) \in \Lambda_n$ для всех $s_n = 1, \ldots, S_n$. Тогда любая функция $u(X)$, определяемая выражением*

$$u(X) = u_0(X) + \sum_{s_1=1}^{S_1} \ldots \sum_{s_N=1}^{S_N} p_\sigma \prod_{n=1}^{N} w_{n,s_n}(x_n), \tag{1.13}$$

также является решением уравнения (1.4). Здесь $\sigma = \{s_1, \ldots, s_N\}$ — мультииндекс, p_σ — произвольные вещественные коэффициенты.

$\lhd$ Пусть $i, j \in I$ — произвольно выбранные значения. Тогда в силу условия теоремы $w_{n,s_n}(x_n) \in \Lambda_n$ получаем:

а) в случае $i = j$

$$\hat{L}_i \hat{L}_j \prod_{n=1}^{N} w_{n,s_n}(x_n) = w_{1,s_1}(x_1) \ldots \hat{L}_i^2 w_{i,s_i}(x_i) \ldots w_{N,s_N}(x_N) = 0, \tag{1.14 а}$$

б) в случае $i \neq j$

$$\hat{L}_i \hat{L}_j \prod_{n=1}^{N} w_{n,s_n}(x_n) = w_{1,s_1}(x_1) \ldots \hat{L}_i w_{i,s_i}(x_i) \ldots \hat{L}_j w_{j,s_j}(x_j) \ldots w_{N,s_N}(x_N) = 0 \tag{1.14 б}$$

при любых $i, j \in I$. Из (1.13), (1.14 а), (1.14 б) следует, что $\hat{R}_{ij} u = \hat{R}_{ij} u_0$ при всех $i, j \in I$. Тогда, если функция $u_0(X)$ удовлетворяет уравнению (1.4), то и функция $u(X)$ является решением этого уравнения. $\rhd$

Теорема 1.4. *Пусть функции $w_n(x_n) \in \Lambda_n$ при всех $n \in I$. Пусть также функция $u_k(X_k)$ удовлетворяет уравнению (1.5), а $u_l(X_l)$ при всех $l \in \Xi$, $l \neq k$, — произвольные функции своих аргументов, дифференцируемые необходимое число раз. Тогда уравнение (1.4) имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{l=1}^{K} u_l(X_l) \prod_{n \in \bar{I}_l} w_n(x_n), \tag{1.15}$$

где $\bar{I}_l = I \setminus I_l$.

$\lhd$ Используя (1.15), вычисляем матричные элементы в левой части уравнения (1.4).

1. Если $i, j \in I_l$, то

$$\big(\hat{R}_{ij} u\big)_{i,j \in I_l} = \prod_{n \in \bar{I}_l} w_n(x_n) \big(\hat{R}_l u_l\big)_{ij}. \tag{1.16 а}$$

2. Если $i \in I_{l_1}$, $j \in I_{l_2}$, причем $l_1 \neq l_2$, то с учетом условия $w_n(x_n) \in \Lambda_n$ получаем

$$\big(\hat{R}_{ij} u\big)_{i \in I_{l_1}, j \in I_{l_2}} = \hat{L}_i u_i(X_i) \hat{L}_j w_j(x_j) \prod_{\substack{n \in \bar{I}_{l_1}, \\ n \neq j}} w_n(x_n) + \hat{L}_j u_j(X_j) \hat{L}_i w_i(x_i) \prod_{\substack{n \in \bar{I}_{l_2}, \\ n \neq i}} w_n(x_n) = 0. \tag{1.16 б}$$

Из (1.16 а), (1.16 б) следует, что $\hat{R}u$ — блочно-диагональная матрица, поэтому аналогично (1.9) находим

$$\det|\hat{R}u| = \prod_{l=1}^{K}\left\{\left(\prod_{n\in\bar{I}_l} w_n(x_n)\right)^{N_l}\det|\hat{R}_l u_l|\right\}, \tag{1.17}$$

где N_l — число элементов в множестве I_l. Так как по условию теоремы $u_k(X_k)$ удовлетворяет уравнению (1.5), то соответствующий сомножитель в правой части (1.17) тождественно равен 0. Поэтому из (1.17) следует, что $u(X)$ является решением уравнения (1.4). ▷

Теорема 1.5. *Пусть функции $u_n(x_n)$ при всех $n \in I$ удовлетворяют уравнениям*

$$u_n(x_n)\,\hat{L}_n^2 u_n(x_n) = p_n(\hat{L}_n u_n(x_n))^2, \tag{1.18}$$

где p_n — вещественные постоянные. Пусть также выполнено одно из следующих условий:

1) $p_n = 1$ *не менее чем при двух значениях $n \in I$;*

2) *постоянные p_n таковы, что*

$$1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n - 1} = 0. \tag{1.19}$$

Тогда функция, определяемая выражением

$$u(X) = \prod_{n=1}^{N} u_n(x_n), \tag{1.20}$$

является решением уравнения (1.4).

◁ Подставляя (1.20) в левую часть уравнения (1.4), представим ее в виде

$$\det|\hat{R}u| = [u(X)]^N \det h, \tag{1.21}$$

где элементы матрицы h определяются выражениями

$$h_{ij} = \begin{cases} s_i, & i = j; \\ t_i t_j, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.22}$$

Здесь введены обозначения

$$s_i = \frac{\hat{L}_i^2 u_i(x_i)}{u_i(x_i)}, \quad t_i = \frac{\hat{L}_i u_i(x_i)}{u_i(x_i)}. \tag{1.22 а}$$

Для дальнейшего преобразования (1.21) используем известный результат [12, с. 43, 197] для определителя матрицы вида (1.22):

$$\det h = \prod_{i=1}^{N}(s_i - t_i^2)\left(1 + \sum_{i=1}^{N}\frac{t_i^2}{s_i - t_i^2}\right). \tag{1.23}$$

Учитывая (1.22 а) и предполагая выполненным условие (1.18), соотношение (1.23) перепишем в виде

$$\det h = \prod_{i=1}^{N}\left\{(p_i - 1)\left(\frac{\hat{L}_i u_i(x_i)}{u_i(x_i)}\right)^2\right\}\left(1 + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{p_i - 1}\right). \tag{1.24}$$

Из (1.21) и (1.24) получаем, что левая часть (1.4) тождественно равна 0 при выполнении любого из условий 1), 2), перечисленных в формулировке теоремы, откуда и следует доказываемое утверждение. $\triangleright$

Следствие 1.1. *Пусть $u_i(x_i)$ при всех $i \in I$ являются собственными функциями соответствующих операторов $\hat{L}_i$. Тогда функция* (1.20) *является решением уравнения* (1.4).

$\triangleleft$ Если $u_i(x_i)$ является собственной функцией оператора $\hat{L}_i$, соответствующей собственному значению λ_i, то легко видеть, что она удовлетворяет уравнению (1.18), при этом $p_i = 1$ для любого $\lambda_i \neq 0$, откуда и следует данное утверждение. $\triangleright$

Определение 1.1. Пусть $\lambda_{is} \neq 0$ — собственные значения операторов $\hat{L}_i$ ($i = 1, \ldots, N$; $s = 1, \ldots, S$). Будем говорить, что λ_{is} обладают свойством пропорциональности, если при всех $i = 1, \ldots, N$, $s = 2, \ldots, S$ выполняются следующие условия:

$$\lambda_{is} = \mu_s \lambda_{i1}, \tag{1.25}$$

где μ_s — некоторые постоянные, не зависящие от i.

Теорема 1.6. *Пусть λ_{is} — простые* (*некратные*) *собственные значения операторов $\hat{L}_i$, обладающие свойством пропорциональности, $u_{is}(x_i)$ — собственные функции, соответствующие этим собственным значениям. Тогда функция, определяемая выражением*

$$u(X) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n), \tag{1.26}$$

является решением уравнения (1.4).

$\triangleleft$ Используя (1.26) и учитывая, что λ_{is} являются собственными значениями операторов $\hat{L}_i$, запишем выражение для матричных элементов в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \sum_{s=1}^{S} \lambda_{is} \lambda_{js} \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n), \tag{1.27}$$

причем это выражение справедливо для всех $i, j \in I$. Учитывая свойство пропорциональности (1.25), перепишем (1.27) в виде

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \lambda_{i1} \lambda_{j1} \sum_{s=1}^{S} \mu_s^2 \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n). \tag{1.28}$$

Тогда на основании (1.28) левую часть уравнения (1.4) можно представить так:

$$\det |\hat{R}u| = [v(X)]^N \det \eta, \quad v(X) = \sum_{s=1}^{S} \mu_s^2 \prod_{n=1}^{N} u_{ns}(x_n). \tag{1.29}$$

Элементы матрицы η определяются выражением

$$\eta_{ij} = \lambda_{i1} \lambda_{j1}. \tag{1.29 a}$$

Из (1.29 a) следует, что $\det \eta = 0$, поэтому $\det |\hat{R}u| \equiv 0$. $\triangleright$

Теорема 1.7. *Пусть $\hat{L}_i$ при всех $i \in I$ определяются выражением*

$$\hat{L}_i = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi,0}\, x_i^{m+r_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m, \tag{1.30}$$

где r_i — вещественные параметры. Тогда уравнение (1.4) *имеет множество решений в виде обобщенных мономов*

$$u(X) = \prod_{i=1}^{N} x_i^{\sigma_i}, \tag{1.31}$$

причем для показателей σ_i справедливы следующие утверждения:

1. *Если $r_i = 0$ не менее чем при двух значениях $i \in I$, то функция* (1.31) *удовлетворяет уравнению* (1.4) *при произвольных σ_i.*

2. *Если $r_i = 0$ не более чем при одном значении $i \in I$, то функция* (1.31) *удовлетворяет уравнению* (1.4) *при выполнении одного из условий:*

$$A_i(\sigma_i) = 0 \tag{1.32 а}$$

хотя бы при одном значении i;

$$A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i) = 0 \tag{1.32 б}$$

не менее чем при двух значениях i;

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{A_i(\sigma_i)}{A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i)} = -1. \tag{1.32 в}$$

Здесь $A_i(\sigma_i)$ определяется выражением

$$A_i(\sigma_i) = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi,0} \prod_{j=0}^{m-1} (\sigma_i - j). \tag{1.33}$$

$\triangleleft$ Используя функцию (1.31), в результате дифференцирования и элементарных преобразований находим выражения для матричных элементов в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \begin{cases} A_i(\sigma_i) A_i(\sigma_i + r_i) u(X) x_i^{2r_i}, & i = j; \\ A_i(\sigma_i) A_j(\sigma_j) u(X) x_i^{r_i} x_j^{r_j}, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.34}$$

где $A_i(\sigma_i)$ имеют вид (1.33). На основании (1.34) можно представить левую часть уравнения (1.4) в виде (1.21), где элементы матрицы h определяются выражением

$$h_{ij} = \begin{cases} A_i(\sigma_i) A_i(\sigma_i + r_i) x_i^{2r_i}, & i = j; \\ A_i(\sigma_i) A_j(\sigma_j) x_i^{r_i} x_j^{r_j}, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.35}$$

Из (1.35) получаем выражение для определителя матрицы h:

$$\det h = \prod_{i=1}^{N} \Big\{ A_i(\sigma_i) \big[A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i) \big] x_i^{2r_i} \Big\} \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i(\sigma_i)}{A_i(\sigma_i + r_i) - A_i(\sigma_i)} \right). \tag{1.36}$$

Из выражения (1.36) следует:

1) Если $r_i = 0$ не менее чем при двух значениях i, то $\det h \equiv 0$, а значит уравнение (1.4) удовлетворяется при произвольных значениях всех показателей σ_i.

2) Если при некотором значении $i = i_0$ выполнено условие (1.32 а), то уравнение (1.4) удовлетворяется при произвольных значениях остальных показателей σ_i $(i \neq i_0)$.

3) Если условие (1.32 б) выполнено не менее чем при двух значениях i, то уравнение (1.4) удовлетворяется при произвольных значениях остальных показателей σ_i.

4) Если выполнено условие (1.32 в), то уравнение (1.4) также удовлетворяется. $\triangleright$

Теорема 1.8. *Пусть при всех $i \in I$ функции $v_i(x_i) \in \tilde{\Lambda}_i$. Тогда функция, определяемая выражением*

$$u(X) = \sum_{i=1}^{N} w_i(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} v_i(x_i) v_j(x_j)(1 - \delta_{ij}), \tag{1.37}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера) является решением уравнения (1.4), *если выполнено одно из следующих условий:*

1) *при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению*

$$\hat{L}_i^2 w_i(x_i) = p_i(\hat{L}_i v_i(x_i))^2, \tag{1.38}$$

причем постоянные p_i удовлетворяют условию (1.19);

2) *при двух значениях $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению* (1.38), *причем $p_i = 1$ для этих значений i, а при остальных значениях $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ могут быть произвольными.*

$\triangleleft$ Используя выражение (1.37), находим элементы матрицы в левой части уравнения (1.4):

$$\hat{R}_{ij} u = \begin{cases} \psi_i(x_i), & i = j; \\ \varphi_i(x_i)\varphi_j(x_j), & i \neq j, \end{cases} \tag{1.39}$$

где

$$\varphi_i(x_i) = \hat{L}_i v_i(x_i), \quad \psi_i(x_i) = \hat{L}_i^2 w_i(x_i). \tag{1.39 а}$$

На основании (1.39) и (1.39 а), левую часть уравнения (1.4) представим в виде:

$$\det|\hat{R}u| = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) \prod_{i=1}^{N} T_i(x_i), \tag{1.40}$$

где

$$T_i(x_i) = \psi_i(x_i) - [\varphi_i(x_i)]^2. \tag{1.40 а}$$

1. Если при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (1.38), то выражение (1.40) можно представить в виде

$$\det|\hat{R}u| = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i - 1}\right) \prod_{i=1}^{N} (p_i - 1)[\varphi_i(x_i)]^2. \tag{1.41}$$

Из (1.41) следует, что если постоянные p_i удовлетворяют условию (1.19), то $\det|\hat{R}u| \equiv 0$, т. е. уравнение (1.4) удовлетворяется.

2. Пусть $i_1, i_2 \in I$ — произвольно выбранные значения, $\tilde{I}(i_1, i_2) = I \setminus \{i_1, i_2\}$. Тогда выражение (1.40) можно записать так:

$$\det|\hat{R}u| = \left\{ T_{i_1}(x_{i_1}) T_{i_2}(x_{i_2}) \left(1 + \sum_{i \in \tilde{I}(i_1,i_2)} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) + T_{i_1}(x_{i_1}) + T_{i_2}(x_{i_2}) \right\} \prod_{i \in \tilde{I}(i_1,i_2)} T_i(x_i). \tag{1.42}$$

Далее, если при $i = i_1$, $i = i_2$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (1.38) и при этом $p_i = 1$, то из (1.39 а) и (1.40 а) получаем

$$T_{i_1}(x_{i_1}) \equiv 0, \quad T_{i_2}(x_{i_2}) \equiv 0. \tag{1.43}$$

Тогда из (1.42) и (1.43) следует $\det|\hat{R}u| \equiv 0$, так что и в этом случае функция (1.37) удовлетворяет уравнению (1.4). ▷

Теорема 1.9. *Пусть при некотором $i \in I_k \subset I$ функция $v_i(x_i) \in \Lambda_i$, а при всех $n \neq i$ $u_n(x_n)$ — произвольные функции. Тогда уравнение* (1.4) *имеет множество решений, определяемое выражением*

$$u(X) = \Bigg(v_i(x_i) + \sum_{n \in \tilde{I}_k(i)} u_n(x_n)\Bigg) \prod_{\substack{l=1,\\ l \neq k}}^{K} \sum_{n \in I_l} u_n(x_n), \tag{1.44}$$

где $\tilde{I}_k(i) = I_k \setminus \{i\}$.

◁ Используя выражение (1.44), найдем матричные элементы в левой части уравнения (1.4).

1. Если $i \in I_k$, $j \in I_k$, то при любых $j \neq i$ можно записать

$$\hat{L}_i \hat{L}_j \Bigg(v_i(x_i) + \sum_{n \in \tilde{I}_k(i)} u_n(x_n)\Bigg) = 0. \tag{1.45}$$

При $j = i$ (1.45) также выполняется, так как по условию теоремы $v_i(x_i) \in \Lambda_i$.

2. Если $i \in I_k$, $j \in I_{k_1}$, $k \neq k_1$, то

$$\hat{L}_i \hat{L}_j u(X) = \hat{L}_i v_i(x_i) \hat{L}_j u_j(x_j) \prod_{\substack{l=1,\\ l \neq k, k_1}}^{K} \sum_{n \in I_l} u_n(x_n) = 0 \tag{1.46}$$

в силу условия теоремы $v_i(x_i) \in \Lambda_i$. Из (1.45) и (1.46) следует, что при данном i и при любых $j \in I$ $\hat{R}_{ij}u \equiv 0$. Это означает, что i-я строка определителя в левой части (1.4) состоит только из нулевых элементов. Тогда, в силу известного свойства определителей [13], $\det|\hat{R}u| \equiv 0$. ▷

Теорема 1.10. *Пусть все операторы $\hat{L}_i$ имеют постоянные коэффициенты, т. е. $a_{mi}(x_i) = \mathrm{const}$ при всех $i \in I$, $1 \leqslant m \leqslant M_i$. Тогда уравнение* (1.4) *имеет решение типа бегущей волны*

$$u(X) = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n, \tag{1.47}$$

где c_n — постоянные коэффициенты, причем функция $U(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\det\left|\sum_{m_i=1}^{M_i} \sum_{m_j=1}^{M_j} a_{m_i i} a_{m_j j} c_i^{m_i} c_j^{m_j} U^{(m_i+m_j)}(z)\right| = 0. \tag{1.48}$$

◁ Так как по условию теоремы $a_{mi}(x_i) = \mathrm{const}$ при всех $i \in I$, $1 \leqslant m \leqslant M_i$, то уравнение (1.4) инвариантно относительно преобразования сдвига, и поэтому имеет решение типа бегущей волны (1.47). Подставляя это решение в (1.4), получаем ОДУ (1.48) для функции $U(z)$. $\triangleright$

Рассмотрим некоторые частные случаи решения типа бегущей волны.

Пусть при всех $i \in I$

$$\hat{L}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{M_i}. \tag{1.49}$$

Тогда уравнение (1.48) принимает вид

$$\det\left|c_i^{M_i} c_j^{M_j} U^{(M_i+M_j)}(z)\right| = 0. \tag{1.50}$$

Вынося общие множители в левой части (1.50) за знак определителя и учитывая, что $c_i \neq 0$ при всех $i \in I$, так как решение предполагается существенно зависящим от всех переменных, приводим уравнение к виду

$$\det\left|U^{(M_i+M_j)}(z)\right| = 0. \tag{1.51}$$

а) Если одновременно с (1.49) также выполнено условие $M_i = M$ при всех $i \in I$, то (1.51) преобразуется к виду

$$[U^{(2M)}(z)]^N \det|d_{ij}| = 0, \tag{1.51 a}$$

где $d_{ij} = 1$ при всех $i, j \in I$. Так как $\det|d_{ij}| = 0$, то из (1.51 a) следует, что в данном случае уравнению (1.4) удовлетворяет решение вида (1.47) с произвольными коэффициентами c_i и произвольной функцией $U(z)$, дифференцируемой $2M$ раз.

б) Пусть теперь M_i, вообще говоря, различны. Рассмотрим возможные решения уравнения (1.51). Непосредственной подстановкой легко убедиться, что экспоненциальное решение $U(z) = U_0 \exp(z)$ удовлетворяет этому уравнению.

Покажем, что для данного случая имеется также степенное решение

$$U(z) = U_0 z^{\alpha}, \tag{1.52}$$

где α — неизвестный параметр, подлежащий определению. Подставляя функцию (1.52) в уравнение (1.51), получаем

$$U_0^N z^{N\alpha} \prod_{i=0}^{N} \left(\frac{c_i}{z}\right)^{2M_i} \det|Q(\alpha, M_i + M_j)| = 0 \tag{1.53}$$

или

$$\det|Q(\alpha, M_i + M_j)| = 0. \tag{1.54}$$

Здесь используется обозначение

$$Q(\alpha, m) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - m + 1).$$

Таким образом, в случае б) уравнение (1.51) имеет степенное решение (1.52), а возможные значения показателя α являются корнями уравнения (1.54).

2. Анализ неоднородного уравнения

Данный параграф посвящен исследовавнию решений уравнения (1.1) при ненулевой правой части. Простейшие решения неоднородного уравнения при определенных условиях имеют вид суммы функций от различных подмножеств переменных, что определяется следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *определяется выражением*

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \exp(\gamma u) \prod_{k=1}^{K} f_k(X_k) \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i}. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} u_k(X_k), \tag{2.2}$$

где функции $u_k(X_k)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\det|\hat{R}_k u_k| = b_k f_k(X_k) \exp(\gamma u_k) \prod_{i \in I_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i}, \tag{2.3}$$

причем постоянные b_k *должны удовлетворять условию*

$$\prod_{k=1}^{K} b_k = 1. \tag{2.3 a}$$

◁ Подставляя (2.2) в уравнение (1.1) и учитывая (2.1), нетрудно представить (1.1) в виде

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \det|\hat{R}_k u_k| \left(f_k(X_k) \exp(\gamma u_k) \prod_{i \in I_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i} \right)^{-1} \right\} = 1. \tag{2.4}$$

Левая часть уравнения (2.4) представлена в виде произведения K сомножителей, зависящих от разных подмножеств независимых переменных X_k. Поэтому, в соответствии с известной схемой разделения переменных [1, 2], из (2.4) следует, что функции $u_k(X_k)$ удовлетворяют уравнениям (2.3), а постоянные разделения b_k — условию (2.3 a). ▷

Теорема 2.2. *Пусть* $w_k(x_k) \in \tilde{\Lambda}_k$ *при некотором* $k \in I$, *а* $v_n(x_n) \in \Lambda_n$ *при всех* $n \neq k$, $n \in I$. *Также пусть функция* $u_0(X)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1), *причем предполагается, что правая часть этого уравнения зависит только от* X, *т. е.* $F = f(X)$. *Тогда любая функция, определяемая выражением*

$$u(X) = u_0(X) + w_k(x_k) \sum_{s=1}^{S} \prod_{n \in \Omega_s} v_n(x_n), \tag{2.5}$$

также является решением уравнения (1.1).

◁ Для функции $u(X)$, определяемой выражением (2.5), справедливы следующие соотношения:

$$\hat{L}_k^2 u(X) = \hat{L}_k^2 u_0(X) + \hat{L}_k^2 w_k(x_k) \sum_{s=1}^{S} \prod_{n \in \Omega_s} v_n(x_n) = \hat{L}_k^2 u_0(X), \tag{2.6 a}$$

$$\hat{L}_i\hat{L}_k u(X) = \hat{L}_i\hat{L}_k u_0(X) + \hat{L}_k w_k(x_k)\hat{L}_i v_i(x_i) \prod_{\substack{n\in\Omega_s,\\ n\neq i}} v_n(x_n) = \hat{L}_i\hat{L}_k u_0(X), \tag{2.6 б}$$

$$\hat{L}_i\hat{L}_j u(X) = \hat{L}_i\hat{L}_j u_0(X) + w_k(x_k)\hat{L}_i v_i(x_i)\hat{L}_j v_j(x_j) \prod_{\substack{n\in\Omega_s,\\ n\neq i,j}} v_n(x_n) = \hat{L}_i\hat{L}_j u_0(X), \tag{2.6 в}$$

причем в (2.6 б, в) $i \neq k$, $j \neq k$. Из (2.6 а), (2.6 б) и (2.6 в) следует, что

$$\det|\hat{R}u(X)| = \det|\hat{R}u_0(X)|. \tag{2.7}$$

Так как по условию теоремы правая часть (1.1) зависит только от X, то из (2.7) следует, что функция $u(X)$ также удовлетворяет уравнению (1.1). $\rhd$

Теорема 2.3. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *имеет вид*

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i). \tag{2.8}$$

Пусть также при всех $i \in I$ функции $v_i(x_i) \in \tilde{\Lambda}_i$. Тогда функция, определяемая выражением (1.37), *является решением уравнения* (1.1), *если выполняется одно из следующих условий:*

1) *при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i), v_i(x_i)$ удовлетворяют системе уравнений*

$$\hat{L}_i^2 w_i(x_i) = p_i(\hat{L}_i v_i(x_i))^2, \quad \hat{L}_i^2 w_i(x_i) = \lambda_i f_i(x_i), \tag{2.9}$$

причем постоянные p_i, λ_i удовлетворяют условию

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i - 1}\right) \prod_{i=1}^{N} \left\{\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\lambda_i\right\} = 1; \tag{2.10}$$

2) *при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют системе уравнений* (2.9), *а функции $w_j(x_j)$, $v_j(x_j)$ удовлетворяют уравнению*

$$D_j\hat{L}_j^2 w_j(x_j) - B_j(\hat{L}_j v_j(x_j))^2 = \lambda_j f_j(x_j), \tag{2.11}$$

где коэффициенты D_j, B_j определяются выражениями

$$B_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \frac{1}{p_i - 1} \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), \quad D_j = B_j + \prod_{i=1, i\neq j}^{N} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right), \tag{2.11 а}$$

а постоянные λ_i удовлетворяют условию

$$\prod_{i=1}^{N} \lambda_i = 1. \tag{2.12}$$

$\lhd$ Подставив (1.37) в (1.1) и используя соотношения (1.40) и (2.8), уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) \prod_{i=1}^{N} T_i(x_i) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i), \tag{2.13}$$

где $T_i(x_i)$ определяется выражением (1.40 а).

1. Пусть при всех $i \in I$ функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют первому уравнению системы (2.9). Тогда уравнение (2.13) можно переписать так:

$$P \prod_{i=1}^{N} \frac{\psi_i(x_i)}{f_i(x_i)} = 1, \tag{2.14}$$

где

$$P = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{p_i - 1}\right) \prod_{i=1}^{N} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \right\}. \tag{2.14 а}$$

Разделяя переменные в (2.14) и учитывая (1.39 а), получаем второе уравнение системы (2.9) и условие (2.10) для постоянных p_i, λ_i.

2. Пусть теперь выбрано некоторое значение $j \in I$, и при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ удовлетворяют первому уравнению системы (2.9). В этом случае уравнение (2.13) принимает вид

$$\left(1 + \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \frac{1}{p_i - 1} + \frac{[\varphi_j(x_j)]^2}{T_j(x_j)}\right) T_j(x_j) \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \left\{ \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \psi_i(x_i) \right\} = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i) \tag{2.15}$$

или

$$\frac{D_j \psi_j(x_j) - B_j [\varphi_j(x_j)]^2}{f_j(x_j)} \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \frac{\psi_i(x_i)}{f_i(x_i)} = 1, \tag{2.16}$$

где коэффициенты D_j, B_j определяются выражениями (2.11 а). Разделяя переменные в (2.16) и учитывая (1.39 а), получаем второе уравнение системы (2.9) для функций $w_i(x_i)$, $v_i(x_i)$ при всех $i \neq j$, уравнение (2.11) для функций $w_j(x_j)$, $v_j(x_j)$ и условие (2.12) для постоянных λ_i. $\triangleright$

Теорема 2.4. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *имеет вид*

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = [u(X)]^{\gamma} \prod_{i=1}^{N} \left\{ f_i(x_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\beta_i} \right\}, \tag{2.17}$$

где γ, β_i — вещественные параметры. Пусть также выполнено одно из следующих условий:

1) *при всех $i \in I$ функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют переопределенным системам уравнений*

$$u_i(x_i) \hat{L}_i^2 u_i(x_i) = p_i (\hat{L}_i u_i(x_i))^2, \tag{2.18 а}$$

$$\hat{L}_i^2 u_i(x_i) = \lambda_i f_i(x_i) [u_i'(x_i)]^{\beta_i} [u_i(x_i)]^{\theta_i}. \tag{2.18 б}$$

Здесь постоянные p_i, λ_i удовлетворяют условию (2.10), *а θ_i определяется выражением*

$$\theta_i = \beta_\Sigma + \gamma + 1 - N - \beta_i, \quad \beta_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \beta_n. \tag{2.19}$$

2) *при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют системам уравнений* (2.18 а), (2.18 б), *а функция $u_j(x_j)$ удовлетворяет уравнению*

$$D_j \hat{L}_j^2 u_j(x_j) - B_j \frac{(L_j u_j(x_j))^2}{u_j(x_j)} = \lambda_j f_j(x_j) [u_j'(x_j)]^{\beta_j} [u_j(x_j)]^{\theta_j}. \tag{2.20}$$

Здесь D_j, B_j *определяются выражениями* (2.11 а), *а постоянные* λ_i *удовлетворяют условию* (2.12). *Тогда функция* $u(X)$, *определяемая выражением* (1.20), *является решением уравнения* (1.1).

$\lhd$ Подставив выражение (1.20) в правую часть уравнения (1.1), нетрудно привести ее к виду

$$F\left(u, X, \frac{\partial u}{\partial X}\right) = \prod_{i=1}^{N} \left\{ f_i(x_i)[u_i'(x_i)]^{\beta_i}[u_i(x_i)]^{\beta_\Sigma+\gamma-\beta_i} \right\}, \tag{2.21}$$

где β_Σ определяется выражением (2.19). Используя рассуждения из доказательства теоремы 1.5, получаем, что левая часть уравнения (1.1) определяется выражением (1.21), причем выражение для $\det h$ запишется так:

$$\det h = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{[\varphi_i(x_i)]^2}{T_i(x_i)}\right) \prod_{i=1}^{N} T_i(x_i), \tag{2.22}$$

где $T_i(x_i)$ определяется выражением (1.40 а),

$$\psi_i(x_i) = \frac{\hat{L}_i^2 u_i(x_i)}{u_i(x_i)}, \quad \varphi_i(x_i) = \frac{\hat{L}_i u_i(x_i)}{u_i(x_i)}. \tag{2.22 а}$$

1. Пусть при всех $i \in I$ функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (2.18 а). Тогда, учитывая (1.21), (2.22), (2.22 а), левую часть уравнения (1.1) можно представить так:

$$\det|\hat{R}u| = P \prod_{i=1}^{N} \left\{ [u_i(x_i)]^{N-1} \hat{L}_i^2 u_i(x_i) \right\}, \tag{2.23}$$

где P определяется выражением (2.14 а). На основании (2.21) и (2.22) уравнение (1.1) приводим к виду

$$P \prod_{i=1}^{N} \frac{\hat{L}_i^2 u_i(x_i)}{f_i(x_i)[u_i'(x_i)]^{\beta_i}[u_i(x_i)]^{\beta_\Sigma+\gamma-\beta_i-N+1}} = 1. \tag{2.23 а}$$

Разделяя переменные в (2.23) и учитывая (2.19), получаем уравнение системы (2.18 б) и условие (2.10) для постоянных p_i, λ_i.

2. Пусть теперь выбрано некоторое значение $j \in I$, и при всех $i \in I$, $i \neq j$, функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют уравнению (2.18 а). В этом случае левую часть уравнения (1.1) можно представить в виде (1.21), а выражение (2.22) для $\det h$ преобразовать так:

$$\det h = \left\{ D_j \psi_j(x_j) - B_j \big[\varphi_j(x_j)\big]^2 \right\} \prod_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{N} \psi_i(x_i), \tag{2.24}$$

где коэффициенты D_j, B_j определяются выражениями (2.11 а). Подставляя в уравнение (1.1) выражения (1.21), (2.21), (2.24) и разделяя переменные в полученном уравнении, получаем уравнение (2.18 б) для функций $u_i(x_i)$, и уравнение (2.20) для функции $u_j(x_j)$. $\rhd$

Заключение

Таким образом, в данной работе исследован новый класс уравнений — многомерные детерминантные дифференциально-операторные уравнения вида (1.1). Левая часть этих уравнений представляет собой определитель с элементами, содержащими произведения линейных одномерных дифференциальных операторов произвольного порядка, а правая часть зависит от искомой функции и ее первых производных. Доказаны теоремы о решениях однородных и неоднородных детерминантных дифференциально-операторных уравнений. Доказаны теоремы о понижении размерности уравнения. Для однородного уравнения доказана теорема о взаимосвязи решений исходного уравнения и некоторого вспомогательного линейного уравнения, а также получено решение уравнения для случая, когда линейные операторы, входящие в его состав, имеют пропорциональные собственные значения. Получены решения типа бегущей волны, решения в виде обобщенных мономов, а также решения, выражающиеся через собственные функции линейных операторов, входящих в состав уравнения, и решения, выражающиеся через функции, принадлежащие ядрам этих операторов.

Литература

1. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения.—М.: Физматлит, 2002.—432 с.
2. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики.—М.: Физматлит, 2005.—256 с.
3. *Zhdanov R. Z.* Separation of variables in the nonlinear wave equation // J. of Physics A: Mathematical and General.—1994.—Vol. 27, № 9.—P. L291–L297. DOI: 10.1088/0305-4470/27/9/009.
4. *Рахмелевич И. В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2015.—№ 1 (33).—С. 12–19. DOI: 10.17223/19988621/33/2.
5. *Рахмелевич И. В.* О редукции многомерных уравнений первого порядка с мультиоднородной функцией от производных // Изв. вузов. Математика.—2016.—№ 4.—С. 57–67.
6. *Рахмелевич И. В.* О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным // Уфимск. мат. журн.—2017.—Т. 9, № 1.—С. 98–109.
7. *Рахмелевич И. В.* Многомерное неавтономное уравнение, содержащее произведение степеней частных производных // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.—2018.— Т. 5 (63), вып. 1.—С. 119–130. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.113.
8. *Хабиров С. В.* Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа — Ампера // Мат. сб.—1990.—Т. 181, № 12.—С. 1607–1622.
9. *Кушнер А. Г.* Контактная линеаризация уравнений Монжа — Ампера и инварианты Лапласа // Докл. АН.—2008.—Т. 422, № 5.—С. 597–600.
10. *Рахмелевич И. В.* О решениях двумерного уравнения Монжа — Ампера со степенной нелинейностью по первым производным // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2016.— № 4 (42).—С. 33–43. DOI: 10.17223/19988621/42/4.
11. *Рахмелевич И. В.* Двумерное детерминантное дифференциально-операторное уравнение // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2019.—Т. 51, № 2.—С. 163–173. DOI: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-163-173.
12. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре.—М.: Наука, 1977.—288 с.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.—М.: Физматлит, 2004.—560 с.

Статья поступила 6 февраля 2020 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин
Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 53–69

ON MULTIDIMENSIONAL DETERMINANT DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATIONS

Rakhmelevich, I. V.[1]
[1] Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Abstract. We consider a class of multi-dimensional determinant differential-operator equations, the left side of which represents a determinant with the elements containing a product of linear one-dimensional differential operators of arbitrary order, while the right side of the equation depends on the unknown function and its first derivatives. The homogeneous and inhomogeneous determinant differential-operator equations are investigated separately. Some theorems on decreasing of dimension of equation are proved. The solutions obtained in the form of sum and product of functions in subsets of independent variables, in particular, of functions in one variable. In particular, it is proved that the solution of the equation under considering is the product of eigenfunctions of linear operators contained in the equation. A theorem on interconnection between the solutions of the initial equation and the solutions of some auxiliary linear equation is proved for the homogeneous equation. Also a solution of the homogeneous equation is obtained under the hypotheses that the linear differential operators contained in the equation have proportional eigenvalues. Traveling wave type solution is obtained, in particular, the solutions of exponential form and also in the form of arbitrary function in linear combination of independent variables. If the linear operators in the equation are homogeneous then the solutions in the form of generalized monomials are also found. Some partial solutions to inhomogeneous equation are obtained provided that the right-hand side contains only either independent variables or power or exponential nonlinearity in unknown function and the powers of its first derivatives.

Key words: determinant differential-operator equation, determinant, linear differential operator, eigenfunction, kernel of an operator, traveling wave type solution.

Mathematical Subject Classification (2010): 35G20.

For citation: *Rakhmelevich, I. V.* On Multidimensional Determinant Differential-Operator Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 53–69 (in Russian). DOI: 10.46698/g9113-3086-1480-k.

References

1. *Polyanin, A. D.* and *Zaytsev, V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Ed.*, Boca Raton–London, Chapman and Hall-CRC Press, 2012.
2. *Polyanin, A. D., Zaytsev, V. F.* and *Zhurov, A. I. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki i mekhaniki* [Methods of Solving of Nonlinear Equations of Mathematical Physics and Mechanics], Moscow, Fizmatlit, 2005, 256 p. (in Russian).
3. *Zhdanov, R. Z.* Separation of Variables in the Nonlinear Wave Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994, vol. 27, no. 9, pp. L291–L297. DOI: 10.1088/0305-4470/27/9/009.
4. *Rakhmelevich, I. V.* On Two-Dimensional Hyperbolic Equation with Power Non-linearity on the Derivatives, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2015, no. 1 (33), pp. 12–19 (in Russian).
5. *Rakhmelevich, I. V.* Reduction of Multi-Dimensional First Order Equations with Multi-Homogeneous Function of Derivatives, *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 4, pp. 47–55. DOI: 10.3103/S1066369X16040071.
6. *Rakhmelevich, I. V.* On Multi-Dimensional Partial Differential Equations with Power Nonlinearities in First Derivatives, *Ufa Mathematical Journal,* 2017, vol. 9, no. 1, pp. 98–108. DOI: 10.13108/2017-9-1-98.
7. *Rakhmelevich, I. V.* A Multidimensional Nonautonomous Equation Containing a Product of Powers of Partial Derivatives, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics,* 2018, vol. 51, pp. 87–94. DOI: 10.3103/S1063454118010090.

8. *Khabirov, S. V.* Nonisentropic One-Dimensional Gas Motions Constructed with by Means of Contact Group of the Nonhomogeneous Monge–Ampere Equation, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1992, vol. 71, no. 2, pp. 447–462. DOI: 10.1070/SM1992v071n02ABEH001405.
9. *Kushner, A. G.* Contact Linearization of the Monge–Ampere Equations and Laplace Invariants, *Doklady Akademii nauk* [Doklady Mathematics], 2008, vol. 78, no. 2, pp. 751–754 (in Russian).
10. *Rakhmelevich, I. V.* On the Solutions of Two-dimensional Monge–Ampere Equation with Power-Law Non-Linearity on the First Derivatives, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics], 2016, no. 4 (42), pp. 33–43 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/42/4.
11. *Rakhmelevich, I. V.* Two-Dimensional Determinant Differential-Operator Equation, *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo universiteta. Matematika. Fizika* [Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics. Physics], 2019, vol. 51, no. 2, pp. 163–173 (in Russian). DOI: 10.18413/2075-4639-2019-51-2-163-173.
12. *Faddeev, D. K. and Sominsky, I. S. Sbornik zadach po vyshey algebre* [Collection of Problems on Highest Algebra], Moscow, 1977, 288 p. (in Russian).
13. *Gantmakher, F. R. Teoriya matritz* [Theory of Matrices], Moscow, Fizmatlit, 2004, 560 p. (in Russian).

Received February 6, 2020

Igor V. Rakhmelevich
Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia,
Assosiate Professor
E-mail: `igor-kitpd@yandex.ru`