Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 4, С. 117–126

УДК 517.957
DOI 10.46698/d6373-9335-7338-n

ОБЛАСТЬ ДИФФУЗИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Ревина[1,2]

[1] Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `svrevina@sfedu.ru`

Аннотация. Рассматривается система двух уравнений реакции-диффузии в ограниченной области m-мерного пространства с краевыми условиями Неймана на границе, для которой слагаемые реакции $f(u,v)$ и $g(u,v)$ зависят от двух параметров a и b. Предполагается, что система имеет пространственно-однородное решение (u_0, v_0), причем $f_u(u_0, v_0) > 0$, а $-g_v(u_0, v_0) = F(\mathrm{Det}(\mathrm{J}))$, где J — матрица Якоби соответствующей линеаризованной системы в бездиффузионном приближении, F — гладкая монотонно возрастающая функция. Предложен способ аналитического описания области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга на плоскости параметров системы при фиксированном коэффициенте диффузии d. Показано, что область необходимых условий неустойчивости Тьюринга на плоскости $(\mathrm{Det}(\mathrm{J}), f_u)$ ограничена кривой нулевого следа, дискриминантной кривой и геометрическим местом точек $\mathrm{Det}(\mathrm{J}) = 0$. Найдены явные выражения кривых достаточных условий и доказано, что дискриминантная кривая является огибающей семейства этих кривых. Показано, что одна из границ области неустойчивости Тьюринга состоит из фрагментов кривых достаточных условий, выражается через функцию F и собственные значения оператора Лапласа в рассматриваемой области. Найдены точки пересечения кривых достаточных условий и показано, что их абсциссы не зависят от вида функции F и выражаются через коэффициент диффузии и собственные значения оператора Лапласа. Рассмотрен частный случай $F(\mathrm{Det}(\mathrm{J})) = \mathrm{Det}(\mathrm{J})$. Для этого случая указан диапазон волновых чисел, при которых возникает неустойчивость Тьюринга. Получено разбиение полуоси $d > 1$ на полуинтервалы, каждому из которых соответствует свое минимальное критическое волновое число. Точки пересечения кривых достаточных условий лежат на прямых, не зависящих от коэффициента диффузии d. В качестве примеров приложений доказанных утверждений рассматриваются система Шнакенберга и уравнения брюсселятора.

Ключевые слова: системы реакции-диффузии, система Шнакенберга, область неустойчивости Тьюринга, критическое волновое число.

AMS Subject Classification: 35K57.

Образец цитирования: *Ревина С. В.* Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 117–126. DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n.

Введение

Рассматривается система двух полулинейных параболических уравнений в m-мерной ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $t > 0$ с краевыми условиями Неймана на границе:

$$u_t = \Delta u + f(u,v), \quad v_t = d\Delta v + g(u,v), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Здесь $d > 0$ — коэффициент диффузии, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ — оператор Лапласа, $f(u, v)$, $g(u, v)$ — слагаемые реакции.

Уравнения (1), называемые также уравнениями реакции-дффузии, описывающие физические, химические, биологические и другие процессы, привлекают внимание многих исследователей (см. [1–4] и цитируемую в этих работах литературу).

Предположим, что система (1)–(2) имеет пространственно-однородное стационарное решение (u_0, v_0). В бездиффузионном приближении приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $u(t)$ и $v(t)$:

$$\frac{du}{dt} = f(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = g(u, v). \tag{3}$$

Соответствующее (3) линеаризованное в окрестности (u_0, v_0) уравнение имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \mathrm{J}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \in R^2, \tag{4}$$

где J — матрица Якоби:

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}\Bigg|_{(u_0, v_0)}. \tag{5}$$

Пусть H — гильбертово пространство вектор-функций $\boldsymbol{w} = (u, v)$ с компонентами $u, v \in L_2(\Omega)$. Пусть оператор $\mathrm{A}_0 : H \to H$, действующий по правилу $\mathrm{A}_0 = D\Delta$, определен на множестве вектор-функций $\boldsymbol{w} = (u, v)$ с компонентами из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющими краевым условиям (2), где D — это матрица:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Тогда линеаризованная система (1)–(2) сводится к уравнению в H:

$$\boldsymbol{w}_t = \mathrm{A}\boldsymbol{w}, \quad \mathrm{A} = \mathrm{A}_0 + \mathrm{J}, \quad \boldsymbol{w} \in H. \tag{7}$$

Спектр оператора A дискретен в силу компактности его резольтвенты в H.

Будем интересоваться условиями, при которых имеет место диффузионная неустойчивость (неустойчивость Тьюринга) равновесия (u_0, v_0).

Определение 1. Положение равновесия (u_0, v_0) системы (1)–(2) называется *неустойчивым по Тьюрингу*, если выполняются два условия: 1) собственные значения линеаризованной системы в отсутствие диффузии (4) лежат строго в левой полуплоскости; 2) существует собственное значение линеаризованной системы с диффузией (7), которое лежит в правой полуплоскости.

Предположим, что слагаемые $f(u, v)$, $g(u, v)$ зависят от двух вещественных параметров a и b.

Определение 2. Область на плоскости (a, b) параметров системы с диффузией, содержащая такие параметры, для которых имеет место диффузионная неустойчивость (неустойчивость Тьюринга), а коэффициент диффузии d фиксирован, называется *областью диффузионной неустойчивости* (*неустойчивости Тьюринга*).

Пусть теперь параметры (a, b) системы фиксированы, а коэффициент диффузии меняется. При этом меняется положение собственных значений системы (7). Потеря устойчивости положения равновесия происходит, когда собственные значения пересекают мнимую ось комплексной плоскости. В случае общего положения возможны две ситуации: либо пара комплексно-сопряженных собственных значений выходит на мнимую ось, либо собственное значение проходит через ноль. В первом случае говорят, что имеет место колебательная потеря устойчивости, во втором случае — монотонная. Известно [1], что диффузионной неустойчивости в системах вида (1)–(2) соответствует монотонная потеря устойчивости.

Определение 3. *Критическим значением параметра* d называется такое d_c, при котором спектр линейной задачи (7) лежит строго в левой полуплоскости, за исключением одного собственного значения, которое равно нулю: $\lambda(d_c) = 0$, причем пересечение мнимой оси происходит трансверсально: $\lambda'\big|_{d=d_c} \neq 0$, штрих означает дифференцирование по d.

Необходимые условия диффузионной неустойчивости для системы двух уравнений реакции-диффузии хорошо известны [1]. Достаточные условия, как правило, находятся численно. Целью настоящей работы является аналитическое описание области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга в конечномерном пространстве параметров системы (1)–(2). В работах [2, 3] формулировались достаточные условия неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга.

В настоящей работе предложен подход, состоящий в переходе к новым переменным на плоскости параметров системы, который позволяет методами, аналогичными [4], дать аналитическое описание области неустойчивости Тьюринга, а также указать диапазон волновых чисел, при котором имеет место неустойчивость Тьюринга. Как и в [4], описание области неустойчивости Тьюринга дано в терминах собственных значений оператора Лапласа для задачи Неймана в рассматриваемой области. В качестве примера указанный подход применяется к классическим системам реакции-диффузии — системе Шнакенберга и к брюсселятору. Данный подход может быть применен также к другим системам.

1. Необходимые условия неустойчивости Тьюринга в новых переменных

Выпишем необходимые и достаточные условия принадлежности собственных значений системы (4) левой полуплоскости с помощью следа и определителя матрицы J (5):

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{J}) &\equiv f_u + g_v < 0, \\ \mathrm{Det}(\mathrm{J}) &\equiv f_u g_v - f_v g_u > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Далее рассмотрим линейную спектральную задачу для оператора A (7) в H:

$$\mathrm{A}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} \neq 0. \tag{9}$$

Получим необходимые условия существования собственного значения оператора A в правой полуплоскости.

Пусть μ_k и ψ_k — собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ с краевыми условиями Неймана, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\Delta\psi_k + \mu_k\psi_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10}$$

В настоящей работе также, как и в [4], предполагается простота μ_k.

Воспользуемся матричным представлением оператора A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}\psi_k, \boldsymbol{e_2}\psi_k\}_{k=0}^{+\infty}$, где $\boldsymbol{e_1} = (1,0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,1)$, ψ_k из (10). Матрица оператора A имеет блочно-диагональную структуру с матрицами $\mathrm{J_k} = \mathrm{J} - \mu_k \mathrm{D}$ на диагонали, где D определена в (6):

$$\mathrm{J_k} = \begin{pmatrix} f_u - \mu_k & f_v \\ g_u & g_v - d\mu_k \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Разыскивая собственную функцию $\boldsymbol{\varphi}$ (9) в виде ряда

$$\boldsymbol{\varphi} = \sum_{k=0}^{+\infty} \boldsymbol{C_k}\psi_k, \quad \boldsymbol{C_k} = \left(c_k^1, c_k^2\right), \tag{12}$$

после подстановки рядов (12) в (9) и приравнивания коэффициентов при одинаковых собственных функциях, для любого фиксированного k получим линейную систему с матрицей $\mathrm{J_k}$ (11), которой соответствует собственное значение λ_k и собственный вектор $\boldsymbol{C_k}$:

$$\mathrm{J_k}\boldsymbol{C_k} = \lambda_k \boldsymbol{C_k}, \quad \boldsymbol{C_k} \neq 0. \tag{13}$$

Интересуясь неустойчивостью (u_0, v_0), найдем след и определитель матрицы $\mathrm{J_k}$:

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{J_k}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{J}) - (1+d)\mu_k,$$

$$\mathrm{Det}(\mathrm{J_k}) = d\mu_k^2 - (d\cdot f_u + g_v)\mu_k + \mathrm{Det}(\mathrm{J}).$$

Так как $\mathrm{Det}(\mathrm{J}) > 0$ (8), то потеря устойчивости может произойти лишь при $k > 0$. В этом случае $\mu_k > 0$. Следовательно, выполняется неравенство $\mathrm{Tr}(\mathrm{J_k}) < \mathrm{Tr}(\mathrm{J}) < 0$, и положение равновесия (u_0, v_0) может потерять устойчивость, только если $\mathrm{Det}(\mathrm{J_k}) = 0$.

Введем обозначение

$$h(\mu) \equiv d\mu^2 - (d\cdot f_u + g_v)\mu + \mathrm{Det}(\mathrm{J}). \tag{14}$$

Тогда $h(\mu_k) = \mathrm{Det}(\mathrm{J_k})$.

Необходимыми условиями существования положительного корня квадратного трехчлена $h(\mu)$ является неотрицательность дискриминанта, а также отрицательность второго коэффициента, что соответствует неравенству

$$d\cdot f_u + g_v > 0. \tag{15}$$

В совокупности из условия отрицательности следа (8) и условия (15) следуют ограничения на параметры системы, при которых возможна неустойчивость Тьюринга:

$$d \neq 1; \quad f_u \cdot g_v < 0.$$

Для определенности в дальнейшем будем предполагать выполнение гипотезы (H_1):

$$f_u > 0. \tag{H_1}$$

Тогда автоматически выполняются неравенства $g_v < 0$ и $d > 1$. Предположим также, что выполняется гипотеза (H_2): $-g_v$ выражается как монотонно возрастающая гладкая функция от $\mathrm{Det}(\mathrm{J})$

$$-g_v = F(\mathrm{Det}(\mathrm{J})). \tag{H_2}$$

Как известно [1], необходимыми условиями неустойчивости Тьюринга называются условия отрицательности следа, положительности определителя матрицы J, а также неотрицательности дискриминанта трехчлена $h(\mu)$ с учетом выполнения условия (15):

$$\begin{gathered}\mathrm{Tr(J)} \equiv f_u + g_v < 0, \quad \mathrm{Det(J)} \equiv f_u g_v - f_v g_u > 0,\\ d \cdot f_u + g_v \geqslant 2\sqrt{d}\,\sqrt{\mathrm{Det(J)}}.\end{gathered} \tag{16}$$

Как правило [1, 3], область необходимых условий (16) рассматривается на плоскости параметров (a, b). Следуя [4], назовем кривой нулевого следа геометрическое место точек, для которых $\mathrm{Tr(J)} = 0$, а дискриминантной кривой — кривую, на которой дискриминант обращается в ноль. Тогда область необходимых условий неустойчивости Тьюринга ограничена кривой нулевого следа, дискриминантной кривой и, возможно, геометрическим местом точек, соответствующим равенству нулю определителя Det(J). Если параметры системы входят в задание области сложным образом, то аналитическое исследование ее границ затруднительно. В [3, 4] введение новых переменных привело к упрощению системы (16).

При выполнении гипотез (H_1) и (H_2) область необходимых условий диффузионной неустойчивости задается неравенствами

$$f_u < F(\mathrm{Det(J)}), \quad \mathrm{Det(J)} > 0, \quad d \cdot f_u \geqslant F(\mathrm{Det(J)}) + 2\sqrt{d}\,\sqrt{\mathrm{Det(J)}}.$$

В настоящей работе для описания области необходимых (а затем и достаточных) условий диффузионной неустойчивости применяются переменные $(\mathrm{Det(J)}, f_u)$. В этих переменных кривая нулевого следа задается формулой

$$f_u = F(\mathrm{Det(J)}), \tag{17}$$

а дискриминантная кривая — формулой

$$(f_u)_0 = \frac{1}{d}\,F(\mathrm{Det(J)}) + \frac{2}{\sqrt{d}}\,\sqrt{\mathrm{Det(J)}}. \tag{18}$$

2. Достаточные условия неустойчивости Тьюринга в переменных $(\mathrm{Det(J)}, f_u)$

При выводе необходимых условий неустойчивости Тьюринга не учитывается дискретность спектра оператора A.

Пусть параметры системы фиксированы, коэффициент диффузии принимает критическое значение. Критическим волновым числом называется такое $k \in N$, при котором

$$\mathrm{Det(J_k)} = h(\mu_k) = 0, \tag{19}$$

где многочлен $h(\mu)$ задан в (14).

Выразим из уравнения (19) переменную f_u через Det(J):

$$(f_u)_k(\mathrm{Det(J)}) = \mu_k + \frac{\mathrm{Det(J)}}{d \cdot \mu_k} + \frac{1}{d}\,F(\mathrm{Det(J)}). \tag{20}$$

Далее будет показано, что граница области достаточных условий неустойчивости Тьюринга состоит из фрагментов кривых $(f_u)_k$, поэтому назовем кривые (20) кривыми достаточных условий. Элементарными выкладками доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1 (Свойства дискриминантной кривой)**.** *Пусть выполняются гипотезы* (H_1) *и* (H_2)*. Тогда дискриминантная кривая* $(f_u)_0(\mathrm{Det(J)})$ (18):

1) *лежит не выше кривых достаточных условий* $(f_u)_k$ *на плоскости* $(\mathrm{Det(J)}, f_u)$;

2) *имеет с каждой кривой* $(f_u)_k$ *единственную точку пересечения, абсцисса и ордината которой находятся по формулам*

$$\mathrm{Det(J)} = d\mu_k^2, \quad f_u = \frac{1}{d}\,F\big(d\mu_k^2\big) + 2\mu_k;$$

3) *является огибающей семейства* $(f_u)_k$, $k \in N$.

Замечание 1. От вида функции F зависит лишь ордината точки пересечения дискриминантной кривой и кривой достаточных условий, абсцисса выражается через собственные значения оператора Лапласа и коэффициент диффузии.

Теорема 2 (Свойства кривых достаточных условий)**.** *Пусть выполняются гипотезы* (H_1) *и* (H_2), $1 \leqslant k < m$. *Тогда кривые* $(f_u)_k(\mathrm{Det(J)})$ *и* $(f_u)_m(\mathrm{Det(J)})$ *в полуплоскости* $\mathrm{Det(J)} > 0$*:*

1) *имеют единственную точку пересечения* $((\mathrm{Det(J)})_{k,m}, (f_u)_{k,m})$,

$$(\mathrm{Det(J)})_{k,m} = d\mu_k\mu_m, \quad (f_u)_{k,m} = \mu_k + \mu_m + \frac{1}{d}\,F(d\mu_k\mu_m);$$

2) *на промежутке* $\mathrm{Det(J)} < (\mathrm{Det(J)})_{k,m}$ *выполняется неравенство* $(f_u)_k < (f_u)_m$, *а на промежутке* $\mathrm{Det(J)} > (\mathrm{Det(J)})_{k,m}$ *выполняется неравенство* $(f_u)_k > (f_u)_m$.

Замечание 2. Согласно теореме 2, на множестве кривых $\{(f_u)_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно ввести отношение порядка. Это отношение порядка позволяет найти «минимальную» кривую, которая состоит из фрагментов соседних (k-й и $(k+1)$-й) кривых и является искомой границей области достаточных условий.

Из теоремы 2 следует утверждение.

Теорема 3 (Свойства соседних кривых $(f_u)_k$)**.** *Пусть выполняются гипотезы* (H_1) *и* (H_2). *Тогда кривые* $(f_u)_k(\mathrm{Det(J)})$ *и* $(f_u)_{k+1}(\mathrm{Det(J)})$ *в полуплоскости* $\mathrm{Det(J)} > 0$:

1) *имеют единственную точку пересечения* $((\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}, \Gamma_k)$

$$(\mathrm{Det(J)})_{k,k+1} = d\mu_k\mu_{k+1}, \quad \Gamma_k = \mu_k + \mu_{k+1} + \frac{1}{d}\,F(d\mu_k\mu_{k+1}); \tag{21}$$

2) *на промежутке* $\mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]$, $k \in N$, *выполняется неравенство*

$$\Gamma_{k-1} \leqslant (f_u)_k(\mathrm{Det(J)}) \leqslant \Gamma_k; \tag{22}$$

3) *на промежутке* $\mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]$, $k \in N$,

$$(f_u)_k(\mathrm{Det(J)}) = \min_m (f_u)_m(\mathrm{Det(J)}).$$

Замечание 3. Так как $\mu_0 = 0$, то в теореме 3 $(\mathrm{Det(J)})_{0,1} = 0$.

Выразим из уравнения $h(\mu_k) = 0$ (19) коэффициент диффузии d:

$$d_k = \frac{\mathrm{Det(J)} - g_v\mu_k}{\mu_k(f_u - \mu_k)}. \tag{23}$$

Пусть $\mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]$, тогда числитель дроби (23) положителен в силу рассматривваемых гипотез, и из (22) следует, что $f_u > \mu_k$.

Лемма 1. *Пусть* $k \in N$ *таково, что* $\lambda_k = 0$ *является собственным значением задачи* (13)*;* d_k *определено в* (23). *Тогда при* $\mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]$ *и* $d = d_k$ *собственное значение* $\lambda_k(d)$ *пересекает мнимую ось трансверсально.*

$\lhd$ Доказательство следует из равенства $\lambda_k'\big|_{d=d_k} = \frac{\mathrm{Det}'(\mathrm{J_k})}{\mathrm{Tr}(\mathrm{J_k})} = f_u - \mu_k$. $\rhd$

3. Случай $F(\mathrm{Det(J)}) = \mathrm{Det(J)}$

Рассмотрим частный случай $F(\mathrm{Det(J)}) = \mathrm{Det(J)}$. В этом случае кривая нулевого следа и дискриминантная кривая (17)–(18) принимают вид

$$f_u = \mathrm{Det(J)}, \quad (f_u)_0 = \frac{1}{d}\,\mathrm{Det(J)} + \frac{2}{\sqrt{d}}\,\sqrt{\mathrm{Det(J)}},$$

кривые достаточных условий (20) являются прямыми:

$$(f_u)_k(\mathrm{Det(J)}) = \mu_k + \frac{\mu_k + 1}{d \cdot \mu_k}\,\mathrm{Det(J)},$$

а Γ_k (21) не зависят от коэффициента диффузии d: $\Gamma_k = \mu_k + \mu_{k+1} + \mu_k\mu_{k+1}$.

Через $Z_1(\mathrm{Det(J)})$ обозначим объединение кривых $(f_u)_k(\mathrm{Det(J)})$ для $\mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]$, $k \geqslant 1$,

$$Z_1(\mathrm{Det(J)}) = \bigcup_{k\geqslant 1} \big\{(f_u)_k(\mathrm{Det(J)}), \mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]\big\}, \tag{24}$$

при этом через $(\mathrm{Det(J)})_{0,1}$, в отличие от теоремы 3, будем обозначать абсциссу точки пересечения кривой нулевого следа и кривой $(f_u)_1$. Абсцисса точки пересечения кривой нулевого следа и кривой $(f_u)_m$ задается равенством

$$(\mathrm{Det(J)})_{0,m} = \frac{d\mu_m^2}{\mu_m(d-1) - 1}. \tag{25}$$

Теорема 4 (Область неустойчивости Тьюринга для больших d)**.** *Пусть выполняются гипотезы* (H_1) *и* (H_2) *с* $F(\mathrm{Det(J)}) = \mathrm{Det(J)}$, *а также неравенство*

$$d > 1 + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}. \tag{26}$$

Если отсутствуют иные ограничения на параметры системы, то область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга задается неравенствами

$$\mathrm{Det(J)} > 0; \quad f_u < \mathrm{Det(J)}; \quad f_u \geqslant Z_1(\mathrm{Det(J)}),$$

где Z_1 *определено в* (24).

$\lhd$ Доказательство использует взаимное расположение кривых нулевого следа, $(f_u)_k$, и дискриминантной кривой и проводится по схеме, предложенной в [4] для системы Шнакенберга. Неравенство (26) геометрически соответствует тому, что точка пересечения кривых $(f_u)_1$ и $(f_u)_2$ расположена правее точки пересечения кривой нулевого следа и кривой $f_u = \Gamma_1$. $\rhd$

Аналогично рассматривается случай, когда диапазон критических волновых чисел начинается не с $k = 1$, а с $k = m$.

Через $Z_m(\mathrm{Det(J)})$ обозначим объединение фрагментов кривых $(f_u)_k(\mathrm{Det(J)})$, $k \geqslant m$:

$$Z_m(\mathrm{Det(J)}) = \bigcup_{k\geqslant m+1} \big\{(f_u)_k(\mathrm{Det(J)}), \mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]\big\}$$
$$\bigcup \big\{(f_u)_m(\mathrm{Det(J)}), \mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{0,m}; (\mathrm{Det(J)})_{m,m+1}]\big\}, \tag{27}$$

где $(\mathrm{Det(J)})_{0,m}$ определено в (25).

Теорема 5 (Область неустойчивости Тьюринга)**.** *Пусть выполняются гипотезы* (H_1) *и* (H_2) *с* $F(\mathrm{Det(J)}) = \mathrm{Det(J)}$, *а также неравенства* $k \geqslant m$ *и*

$$1 + \frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_{m-1}} < d \leqslant 1 + \frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_{m+1}}.$$

Если отсутствуют иные ограничения на параметры системы, то область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга задается неравенствами

$$\mathrm{Det(J)} > 0; \quad f_u < \mathrm{Det(J)}; \quad f_u \geqslant Z_m(\mathrm{Det(J)}),$$

где Z_m *определено в* (27).

Из леммы 1 вытекает утверждение.

Следствие 1. *В условиях теорем 4 и 5 при* $\mathrm{Det(J)} \in [(\mathrm{Det(J)})_{k-1,k}; (\mathrm{Det(J)})_{k,k+1}]$ *критическое значение коэффициента диффузии вычисляется по формуле*

$$d_c = d_k = \frac{\mathrm{Det(J)}(1+\mu_k)}{\mu_k(f_u - \mu_k)}.$$

4. Примеры приложений

Пример 1. Рассмотрим систему Шнакенберга, для которой

$$f(u,v) = u^2v - u + a, \quad g(u,v) = -u^2v + b, \tag{28}$$

а единственное положение равновесия имеет вид

$$(u_0, v_0) = \left(a+b,\, \frac{b}{(a+b)^2}\right).$$

В [4] получено аналитическое описание области диффузионной неустойчивости системы Шнакенберга (28) на плоскости параметров системы. При этом использовалась замена переменных, предложенная в [3]: $Y = b - a;\ X = a + b$.

Элементы матрицы Якоби J для (28) имеют вид

$$f_u = \frac{b-a}{a+b}; \quad f_v = (a+b)^2; \quad g_u = -\frac{2b}{a+b}; \quad g_v = -(a+b)^2.$$

Так как $\mathrm{Det(J)} = (a+b)^2$, то $F(\mathrm{Det(J)}) = \mathrm{Det(J)}$, и при условиях $b - a > 0, \quad a + b > 0$ для системы Шнакенберга справедливы результаты теорем 1–5.

Заметим, что дополнительное предположение $a > 0$, вытекающее из физического смысла рассматриваемой модели, приводит к ограничению $f_u < 1$. Геометрически это соответствует тому, что область неустойчивости Тьюринга становится конечной и, в частности, может быть пустой (см. теоремы 6, 7 работы [4]).

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений брюсселятора с

$$f(u,v) = u^2v - (B+1)u + A, \quad g(u,v) = -u^2v + Bu. \tag{29}$$

В предположениях $A > 0$, $B > 0$ единственное положение равновесия имеет вид

$$(u_0, v_0) = \left(A,\, \frac{B}{A}\right).$$

Элементы матрицы Якоби J для (29) имеют вид

$$f_u = B - 1; \quad f_v = A^2; \quad g_u = -B; \quad g_v = -A^2.$$

Так как $\mathrm{Det(J)} = A^2$, то $F(\mathrm{Det(J)}) = \mathrm{Det(J)}$, и при условиях $B > 1$, $A > 0$ для уравнений брюсселятора (29) также справедливы результаты теорем 1–5.

Литература

1. *Murray J. D.* Mathematical biology II: Spatial Models and Biomedical Applications.—N. Y.: Springer, 2003. DOI: 10.1007/b98869.
2. *Li P., Shi J., Wang Y., Feng X.* Bifurcation analysis of reaction-diffusion Schnakenberg model // J. Math. Chemistry.—2013.—Vol. 51, № 8.—P. 2001–2019. DOI: 10.1007/s10910-013-0196-x.
3. *Jiang W., Wang H., Cao X.* Turing instability and Turing–Hopf bifurcation in diffusive Schnakenberg systems with gene expression time delay // J. Dyn. Differ. Equ.—2019.—Vol. 31, № 4.—P. 2223–2247. DOI: 10.1007/s10884-018-9702-y.
4. *Revina S. V., Lysenko S. A.* Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system // Вестн. Удмурт. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.—2021.—Т. 31, № 3.—С. 424–442. DOI: 10.35634/vm210306.

Статья поступила 31 октября 2021 г.

Ревина Светлана Васильевна
Институт математики, механики
и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ,
доцент
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, пр. Маркуса, 22
E-mail: svrevina@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-9216-8892

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 4, P. 117–126

DIFFUSION INSTABILITY REGION FOR SYSTEMS OF PARABOLIC EQUATIONS

Revina, S. V.[1,2]

[1] I. I. Vorovich Institute for Mathematics, Mechanics and Computer Science SFedU,
8 a Milchakova St., 344090 Rostov-on-Don, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute,
22 Markus St., 362027 Vladikavkaz, Russia

E-mail: svrevina@sfedu.ru

Abstract. We consider a system of two reaction-diffusion equations in a bounded region of m-dimensional space with Neumann boundary conditions on the boundary, for which the reaction terms $f(u, v)$ and $g(u, v)$ depend on two parameters a and b. It is assumed that the system has a spatially homogeneous solution (u_0, v_0), moreover, $f_u(u_0, v_0) > 0$, and $-g_v(u_0, v_0) = F(\mathrm{Det(J)})$, where J is the Jacobi matrix of the corresponding linearized system in the diffusionless approximation, F is a smooth, monotonically increasing function. A method is proposed for the analytical description of the region of necessary and sufficient conditions for Turing instability on the plane of the parameters of the system at a fixed diffusion coefficient d. It is shown that the region of necessary conditions for Turing instability on the plane $(\mathrm{Det(J)}, f_u)$ is bounded by the zero trace curve, the discriminant curve and the points $\mathrm{Det(J)} = 0$. Explicit expressions for the curves of sufficient conditions are found and it is proved that the discriminant curve is the envelope of the family of these curves. It is shown that one of the boundaries of the Turing instability region, which consists of fragments of curves of sufficient conditions, is expressed in terms of the function F and the eigenvalues of the Laplace operator in the considered region. The points of intersection of the curves of the sufficient conditions are found and it is shown that their abscissas do not depend on the form of the function F and are expressed in terms of the diffusion coefficient and the eigenvalues of the Laplace operator. The particular case $F(\mathrm{Det(J)}) = \mathrm{Det(J)}$ is considered. For this case, the range of wave numbers at which the Turing instability occurs is indicated. A partition of the semiaxis $d > 1$ into half-intervals is obtained, each of which has its own minimum critical wave number. The intersection points of the curves of the sufficient conditions lie on straight lines independent of the diffusion coefficient d. The Schnackenberg system and the Brusselator equations are considered as examples of applications of the proved statements.

Key words: reaction-diffusion systems, Schnackenberg system, Turing instability region, critical wave number.

AMS Subject Classification: 20D05.

For citation: *Revina, S. V.* Diffusion Instability Region for Systems of Parabolic Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 4, pp. 117–126 (in Russian). DOI: 10.46698/d6373-9335-7338-n.

References

1. *Murray, J. D. Mathematical biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, New York, Springer, 2003. DOI: 10.1007/b98869.
2. *Li, P., Shi, J. Wang, Y. and Feng, X.* Bifurcation Analysis of Reaction-Diffusion Schnakenberg Model, *Journal of Mathematical Chemistry*, 2013, vol. 51, no. 8, pp. 2001–2019. DOI: 10.1007/s10910-013-0196-x.
3. *Jiang, W., Wang, H. and Cao, X.* Turing Instability and Turing–Hopf Bifurcation in Diffusive Schnakenberg Systems with Gene Expression Time Delay, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2019, vol. 31, no. 4, pp. 2223–2247. DOI: 10.1007/s10884-018-9702-y.
4. *Revina, S. V. and Lysenko, S. A.* Sufficient Turing Instability Conditions for the Schnakenberg System, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, no. 3, pp. 424–442. DOI: 10.35634/vm210306.

Received October 31, 2021

Svetlana V. Revina
I. I. Vorovich Institute for Mathematics, Mechanics
and Computer Science SFedU
8 a, Milchakova St., Rostov-on-Don, 344090, Russia,
Docent;

Southern Mathematical Institute,
22 Markus St., Vladikavkaz, 362027, Russia,
Reseacher
E-mail: `svrevina@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0002-9216-8892