Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 2, С. 14–24

УДК 519.633
DOI 10.46698/e8852-9245-8236-y

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО МАССАМ ЛЕДЯНЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАПЕЛЬ И КРИСТАЛЛОВ[#]

Б. А. Ашабоков[1], А. Х. Хибиев[2], М. Х. Шхануков-Лафишев[2]

[1] Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. И. Арманд, 37 а;
[2] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Россия, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а

E-mail: ashabokov.boris@mail.ru, akkhibiev@gmail.com, lafishev@yandex.ru

Аннотация. Работа посвящена построению локально-одномерной разностной схемы для расчета первой краевой задачи для параболического уравнения общего вида для функции распределения по массам ледяных частиц. Введены функции $u_1(x,z,m,t)$, $u_2(x,z,m,t)$ такие, что $u_1(x,z,m,t)\,dm$ и $u_2(x,z,m,t)\,dm$ дают в каждой точке (x,z) в момент времени t концентрацию соответственно облачных капель и ледяных частиц, масса которых заключена в интервале от m до $m+dm$. Уравнение записано относительно функции $u_2(x,z,m,t)$, функция $u_1(x,z,m,t)$ (функция распределения по массам капель) в уравнении задана. Уравнение является частью системы интегро-дифференциальных уравнений для функций распределения по массам капель и ледяных частиц, описывающих микрофизические процессы в конвективных облаках на фоне заданной термогидродинамики. Методом суммарной аппроксимации построена локально-одномерная разностная схема для параболического уравнения общего вида в p-мерном параллелепипеде. Для описания взаимодействия капель и кристаллов в уравнение включаются нелокальные (нелинейные) интегральные источники. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка, из которой следует устойчивость и сходимость разностной схемы. Результаты работы будут использованы для построения модели микрофизических процессов в смешанных конвективных облаках, которая будет использована для проведения исследований по таким актуальным направлениям, как исследование роли системных свойств облаков в формировании их микроструктурных характеристик и разработка технологии управления процессами осадкообразования в конвективных облаках путем внесения частиц льдообразующих реагентов.

Ключевые слова: краевая задача, разностная схема, устойчивость, сходимость схемы, погрешность аппроксимации.

AMS Subject Classification: 65M06, 65N06, 65N12.

Образец цитирования: *Ашабоков Б. А., Хибиев А. Х., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для уравнения функций распределения по массам ледяных частиц с учетом взаимодействия капель и кристаллов // Владикавк. мат. журн.—2023.—Т. 25, вып. 2.—С. 14–24. DOI: 10.46698/e8852-9245-8236-y.

1. Постановка задачи

Настоящий период времени является переходным для физики облаков: происходит переход от этапа исследования «элементарных» процессов в облаках к этапу изучения формирования их макро- и микроструктурных характеристик с учетом их системных свойств [1]. К этому следует добавить, что сложным и неоднозначным является состоя-

[#] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-21-00363.

ние существующих технологий управления процессами осадкообразования в конвективных облаках. Они в основном опираются не на методы, полученные в результате строгих исследований, а на концепции, предложенные во второй половине прошлого столетия [1]. Но с учетом недостаточной изученности облачных процессов [2] и связанной с ней ограниченностью знаний о закономерностях формирования макро- и микроструктурных характеристик облаков возможности предложения научно обоснованных концепций активного воздействия на такие сложные и нелинейные системы, как конвективные облака не представляется возможными. В связи с этим, с учетом постоянного повышения потребности в эффективных методах управления процессами осадкообразования в облаках, переход к научно обоснованным технологиям активного воздействия становится чрезвычайно актуальной проблемой [3, 4]. Основным методом проведения исследований по этим направлениям является математическое моделирование [1, 3], что повышает требования к методам проведения расчетов.

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : \ 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ рассматривается для функции распределения по массам ледяных частиц задача

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = Lu_2 + f(x, m, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u_2 \mid_\Gamma = \mu, \quad u_2(x, m, 0) = u_0(x, m), \tag{2}$$

где

$$Lu_2 = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u_2, \quad L_\alpha u_2 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{p} q(x,m,t) u_1(x,m,t)$$
$$- \frac{1}{p} u_2(x,m,t) \int_0^{m_1} \beta_2(m,m') u_1(x,m',t)\, dm'$$
$$+ \frac{1}{p} \int_0^{m_1} \beta_2(m, m-m') u_2(x, m-m', t) u_1(x, m', t)\, dm', \tag{3}$$

где $u_1(x, m, t)$ — функция распределения по массам капель, $u_2(x, m, t)$ — функция распределения по массам ледяных частиц, $\beta_2(m, m') = \pi(r(m) + r(m'))^2 \cdot |V_1(m) - V_1(m')| E_2(m, m')$, $E_2(m, m')$ — коэффициент захвата для капель и кристаллов, $r(m)$, $r(m')$ — радиусы сталкивающихся частиц, $V_1(m)$, $V_1(m')$ — их скорости падения.

В работе [4] приводятся выражения для этих функций.

Предположим, что задача (1)–(2) имеет единственное достаточно гладкое решение. При оценке порядка аппроксимации будем предполагать, что $k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T)$, $r_\alpha(x,t), q(x,m,t), f(x,m,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, где $C^{n_1,n_2}(\bar{Q}_T)$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка n_1 по x и n_2 по t в замкнутой области $\bar{Q}_T$.

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha \leqslant c_1, \quad |r_\alpha|, |q| \leqslant c_2, \quad |u_1|, |\beta_2| \leqslant c_3.$$

2. Локально-одномерная схема (ЛОС)

На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, \, j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = \frac{T}{j_0}$. Каждый интервал (t_j, t_{j+1}) разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau$, $\alpha =$

$1, 2, \ldots, p$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \left\{ x_\alpha^{(i\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : \, i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \, \alpha = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathfrak{R} u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} - L u_2 - f = 0, \tag{4}$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathfrak{R}_\alpha u_2 = 0, \quad \mathfrak{R}_\alpha u_2 = \frac{1}{p}\frac{\partial u_2}{\partial t} - L_\alpha u_2 - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f. \tag{5}$$

где $f_\alpha(x, m, t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, — произвольные функции (обладающие той же гладкостью, что и $f(x, m, t)$), удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = f.$$

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\mathfrak{R}_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \;\; t \in \Delta_\alpha, \tag{6}$$

$$v_{(\alpha)} = \mu_{-\alpha}, \quad x_\alpha = 0, \quad v_{(\alpha)} = \mu_{+\alpha}, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

полагая при этом [5, с. 522], что

$$v_{(1)}(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad v_{(1)}(x, m, t_j) = v_{(p)}(x, m, t_j), \quad j = 0, 1, \ldots, j_0,$$

$$v_{(\alpha)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2, 3, \ldots, p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (6) номера α двухслойной схемой на полуинтервале Δ_α. Тогда получим цепочку p одномерных разностных схем:

$$\frac{y_2^{j+\frac{\alpha}{p}} - y_2^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y_2^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_\alpha y_2^{j+\frac{\alpha}{p}} = \varkappa_\alpha \left(a_\alpha y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)_{x_\alpha} &+ b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{2\,x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{1}{p} d y_1^{j+\frac{\alpha}{p}} \\
&- \frac{1}{p} y_2^{j+\frac{\alpha}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_2(m, m_{i_m}) y_1^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m \\
&+ \frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \beta_2(m, m - m_{i_m}) y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) y_1^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \hbar_m,
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
y_1^{j+\frac{\alpha}{p}} \,|_{\gamma_{h,\alpha}} = \nu_\alpha, \quad y_2^{j+\frac{\alpha}{p}} \,|_{\gamma_{h,\alpha}} = \mu_\alpha, \\
y_1(x, m, 0) = u_0^{(1)}(x, m), \quad y_2(x, m, 0) = u_0^{(2)}(x, m), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,
\end{gathered} \tag{8}$$

где $\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных узлов по направлению x_α,

$$a_\alpha = k_\alpha\left(x^{(-0.5h_\alpha)},\bar t\right),\quad x^{(-0.5h_\alpha)} = (x_1,x_2,\dots,x_{\alpha-1},x_\alpha-0.5h_\alpha,x_{\alpha+1},\dots,x_p),$$

$\bar t = t^{j+\frac12}$, $\varkappa = \frac{1}{1+R_\alpha}$, $R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}$ — разностное число Рейнольдса, $r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha+|r_\alpha|)\geqslant 0$, $r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha-|r_\alpha|)\leqslant 0$, $r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-$, $b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}$, $b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}$, $a_i = k_{i-\frac12}(\bar t)$, $\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = f_\alpha(x,m,t_{j+0.5})$,

$$\hbar_m = \begin{cases} h_m, & i_m = 1,2,\dots,N_m-1,\\ h_m/2, & i_m = 0,N_m.\end{cases}$$

3. Погрешность аппроксимации ЛОС

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z_2^{i+\frac{\alpha}{p}} = y_2^{i+\frac{\alpha}{p}} - u_2^{i+\frac{\alpha}{p}}$, где $u_2^{i+\frac{\alpha}{p}}$ — решение исходной задачи (1)–(2). Подставляя $y_2^{i+\frac{\alpha}{p}} = z_2^{i+\frac{\alpha}{p}} + u_2^{i+\frac{\alpha}{p}}$ в разностное уравнение (7), получим для погрешности задачу

$$\frac{z_2^{j+\frac{\alpha}{p}} - z_2^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z_2^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{9}$$

$$z_2^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0,\quad x\in\gamma_{h,\alpha},\ \ z_2(x,m,0) = 0. \tag{10}$$

Обозначив через

$$\mathring{\Psi}_\alpha = \left(L_\alpha u_2 + f_\alpha - \frac1p\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^{j+\frac12},$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \mathring{\Psi}_\alpha = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \mathring{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*$. Тогда

$$\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u_2^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u_2^{j+\frac{\alpha}{p}} - u_2^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \mathring{\Psi}_\alpha - \mathring{\Psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u_2^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u_2^{j+\frac12}\right)$$
$$+\left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac12}\right) - \left(\frac{u_2^{j+\frac{\alpha}{p}} - u_2^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac1p\left(\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^{j+\frac12}\right)\right) + \mathring{\Psi}_\alpha = \mathring{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*.$$

Очевидно, что $\Psi_\alpha^* = O(|h|_\alpha^2+\tau)$, $\mathring{\Psi}_\alpha = O(1)$, $\sum\limits_{\alpha=1}^p \mathring{\Psi}_\alpha = 0$, т. е. ЛОС обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2+\tau)$, $|h|^2 = h_1^2+h_2^2+\dots+h_p^2$.

4. Устойчивость ЛОС

Воспользуемся методикой предложенной в работе [6]. Умножим уравнение (7) скалярно на $\rho^2 y_2^{(\alpha)} = \rho^2 y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\left(y_{2\,\bar t}^{(\alpha)},\rho^2 y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha = \left(\Lambda_\alpha y_2^{(\alpha)},\rho^2 y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(\varphi^{(\alpha)},\rho^2 y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha, \tag{11}$$

где

$$\rho_\alpha = \sqrt{x_\alpha(l_\alpha-x_\alpha)},\quad \rho = \prod_{\alpha=1}^p \rho_\alpha,$$

$$(u,v)_\alpha=\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}h_\alpha,\quad (u,v]_\alpha=\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}u_{i_\alpha}v_{i_\alpha}h_\alpha,$$
$$(u,v)=\sum_{x\in\omega_h}uvH,\quad H=\prod_{\alpha=1}^{p}h_\alpha.$$

В дальнейшем будем использовать обозначения $M_i>0$, $i=1,2,\ldots,$ — известные постоянные, не зависящие от параметров сетки.

Преобразуем каждое слагаемое тождества (11):

$$\left(y_{2\,\bar t}^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)=\frac12\left(\|\rho y_2^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)}\right)_{\bar t}+\frac{\tau}{2}\|\rho y_{2\,\bar t}^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$\begin{gathered}\left(\Lambda_\alpha y_2^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha=\left(\varkappa_\alpha\left(a_\alpha y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right)_{x_\alpha},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha+\left(b_\alpha^+a_\alpha^{(+1\alpha)}y_{2\,x_\alpha}^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha\\
+\left(b_\alpha^-a_\alpha y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha-\frac1p\left(dy_2^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)\\
-\frac1p\left(y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\beta_2(m,m_{i_m})y_1^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t)\hbar_m,\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha\\
+\frac1p\left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\beta_2(m,m-m_{i_m})y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m-m_{i_m},t)y_1^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t)\hbar_m,\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha.\end{gathered}\tag{12}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (12) преобразуем следующим образом

$$\begin{gathered}\left(\varkappa_\alpha\left(a_\alpha y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right)_{x_\alpha},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha=-\left(a_\alpha y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)},\left(\varkappa_\alpha\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_{\bar x_\alpha}\right]_\alpha\\
=-\Big(a_\alpha y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)},0.5\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\left(\rho^2+\left(\rho^{(-1\alpha)}\right)^2\right)y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}+\varkappa_{\bar x_\alpha}\rho^2y_2^{(\alpha)}+0.5\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}(\rho^2)_{\bar x_\alpha}\\
\times\left(y_2^{(\alpha)}+y_2^{(\alpha)(-1\alpha)}\right)\Big]_\alpha=-0.5\Big(a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\left(\rho^2+\left(\rho^{(-1\alpha)}\right)^2\right),\left(y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2\Big]_\alpha\\
-\Big(a_\alpha\varkappa_{\bar x_\alpha}\rho^2,y_2^{(\alpha)}y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\Big]_\alpha-0.5\Big(a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}(\rho^2)_{\bar x_\alpha},\ \left(\left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\right)_{\bar x_\alpha}\Big]_\alpha\\
=-0.5\left(a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\left(\rho^2+\left(\rho^{(-1\alpha)}\right)^2\right),\left(y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2\right]_\alpha-\left(a_\alpha\varkappa_{\bar x_\alpha}\rho^2,y_2^{(\alpha)}y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right]_\alpha\\
+0.5\Big(\left(a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\right)_{x_\alpha}\left(\rho^2\right)_{x_\alpha},\ \left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\Big)_\alpha-\left(a_\alpha^{(+1\alpha)}\varkappa_\alpha\frac{\rho}{\rho_\alpha},\left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\right)_\alpha\\
+0.5\left(l_\alpha-h_\alpha\right)\Big(a_\alpha^{(+1\alpha)}\varkappa_\alpha\left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\Big|_{i_\alpha=0}+a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\Big|_{i_\alpha=N_\alpha}\Big)\frac{\rho}{\rho_\alpha}.\end{gathered}$$

Выражение (12) перепишем в виде

$$\begin{gathered}\left(\Lambda_\alpha y_2^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha=-0.5\Big(a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\left(\rho^2+\left(\rho^{(-1\alpha)}\right)^2\right),\left(y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2\Big]_\alpha\\
-\Big(a_\alpha\varkappa_{\bar x_\alpha}\rho^2,y_2^{(\alpha)}y_{2\,\bar x_\alpha}^{(\alpha)}\Big]_\alpha+0.5\Big(\left(a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\right)_{x_\alpha}\left(\rho^2\right)_{x_\alpha},\ \left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\Big)_\alpha\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
-\left(a_\alpha^{(+1\alpha)}\varkappa_\alpha\frac{\rho}{\rho_\alpha},\left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\right)_\alpha+0.5(l_\alpha-h_\alpha)\left(a_\alpha^{(+1\alpha)}\varkappa_\alpha\left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\Big|_{i_\alpha=0}\right.\\
\left.+a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\Big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)\frac{\rho}{\rho_\alpha}\\
+\left(b_\alpha^+a_\alpha^{(+1\alpha)}y_{2\,x_\alpha}^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha+\left(b_\alpha^-a_\alpha y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha-\frac{1}{p}\left(dy_2^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)\\
-\frac{1}{p}\left(y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m,t)\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\beta_2(m,m_{i_m})y_1^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t)\hbar_m,\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha\\
+\frac{1}{p}\left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\beta_2(m,m-m_{i_m})y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m-m_{i_m},t)y_1^{j+\frac{\alpha}{p}}(x,m_{i_m},t)\hbar_m,\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Оценим следующие выражения

$$
\begin{gathered}
-\left(a_\alpha\varkappa_{\bar{x}_\alpha}\rho^2,y_2^{(\alpha)}y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\right]_\alpha+\left(b_\alpha^+a_\alpha^{(+1\alpha)}y_{2\,x_\alpha}^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha+\left(b_\alpha^-a_\alpha y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha\\
\leqslant\varepsilon\big\|\rho y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\big]\big|_{L_2(\alpha)}^2+c_4(\varepsilon)\big\|\rho y_2^{(\alpha)}\big\|_{L_2(\alpha)}^2,
\end{gathered}
$$

$$
\frac{1}{p}\left(dy_2^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha\leqslant c_5\big\|\rho y_2^{(\alpha)}\big\|_{L_2(\alpha)}^2,
$$

$$
0.5\left(\left(a_\alpha\varkappa_\alpha^{(-1\alpha)}\right)_{x_\alpha}\left(\rho^2\right)_{x_\alpha},\ \left(y_2^{(\alpha)}\right)^2\right)_\alpha\leqslant c_6\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha}y_2\right\|^2,
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{p}\left(\rho y_2^{(\alpha)}(x,m,t)\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\beta_2(m,m_{i_m})y_1^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m,\rho y_2^{(\alpha)}\right)_\alpha\\
\leqslant\frac{1}{p}\left\|\rho y_2^{(\alpha)}(x,m,t)\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\beta_2(m,m_{i_m})y_1^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\right\|_{L_2(\alpha)}\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\alpha)}\\
\leqslant\frac{1}{p}\left\|\rho y_2^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\beta_2(m,m_{i_m})y_1^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\right\|_{L_2(\alpha)}^2+\frac{1}{4p}\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\alpha)}^2,
\end{gathered}
$$

$$
\left(\varphi^{(\alpha)},\rho^2y_2^{(\alpha)}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left\|\rho\varphi^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\alpha)}^2+\frac{1}{2}\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\alpha)}^2.
$$

Подставляя полученные оценки в тождество (11) с учетом ограниченности функции распределения по массам капель (см. [7, с. 53]), находим

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\left(\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|_\alpha^2\right)_{\bar{t}}+\frac{\tau}{2}\left\|\rho y_{2\,\bar{t}}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|_{L_2(\alpha)}^2+\theta_1\big\|\rho y_{2\bar{x}_\alpha}\big]\big|_\alpha^2+2\theta_1\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha}y_2^{(\alpha)}\right\|_\alpha^2\\
\leqslant M_1\left(\varepsilon\big\|\rho y_{2\,x_\alpha}^{(\alpha)}\big]\big|_\alpha^2+\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha}y_2^{(\alpha)}\right\|_\alpha^2\right)\\
+M_2(\varepsilon)\left(\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|_\alpha^2+\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\alpha,m)}^2+\left\|\rho\varphi^{(\alpha)}\right\|_\alpha^2+\frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\mu_{-\alpha}^2+\mu_{+\alpha}^2\right)\right),
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где

$$\|y_2^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\alpha,m)} = \sum\nolimits_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} h_\alpha \sum\nolimits_{i_m=0}^{N(m_1)} \left(y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t)\right)^2 \hbar_m,$$
$$m_1 = N(m_1)\hbar_m, \quad \theta_1 = \frac{c_0^2}{2(c_0 + 0.5\, lc_2)}.$$

Пользуясь леммой 2 из [6], при $\varepsilon = \frac{\theta_1}{4M_1}$, из (14) получим неравенство

$$\frac{1}{2}\left\|\rho y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)} - \frac{1}{2}\left\|\rho y_2^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{\theta_1}{2}\tau\left\|\rho y^{(\alpha)}_{2\,\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\alpha)} + 2\theta_1\tau\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha} y_2^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}$$
$$\leqslant \tau M_3\left(\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha,m)} + \left\|\rho\varphi^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}\right)\right). \tag{15}$$

Просуммируем (15) по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$. Тогда получим

$$\frac{1}{2}\left\|\rho y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} - \frac{1}{2}\left\|\rho y_2^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + \frac{\theta_1}{2}\tau\left\|\rho y^{(\alpha)}_{2\,\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)}$$
$$+2\theta_1\tau\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha} y_2^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \leqslant \tau M_3\Bigg(\left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + \left\|\rho y_2^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} \tag{16}$$
$$+\left\|\rho\varphi^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha} + \mu^2_{+\alpha}\right)H/h_\alpha\Bigg),$$

где $\|y_2^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\omega_h,m)} = \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \|y_2^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m, \quad m_1 = N(m_1)\hbar_m.$

Из неравенства (16) после суммирования по i_m от 0 до $N(m_1)$ получим

$$\left\|\rho y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} - \left\|\rho y_2^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \theta_1\tau\left\|\rho y^{(\alpha)}_{2\,\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h,m)}$$
$$+2\theta_1\tau\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha} y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} \leqslant \tau M_4\Bigg(\left\|\rho y_2^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \left\|\rho\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} \tag{17}$$
$$+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\left\|\mu_{-\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)} + \left\|\mu_{+\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\right)H/h_\alpha\Bigg).$$

Просуммируем (17) сначала по $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, затем по j' от 0 до j :

$$\left\|\rho y_2^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \theta_1\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho y^{j'+\frac{\alpha}{p}}_{2\,\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h,m)} + 2\,\theta_1\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha} y_2^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}$$
$$\leqslant M_4\Bigg(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho y_2^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} \tag{18}$$
$$+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\left\|\mu_{-\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)} + \left\|\mu_{+\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\right)H/h_\alpha\Bigg) + \|\rho y_2^0\|^2_{L_2(\omega_h,m)}.$$

Из (18) имеем

$$\left\|\rho y_2^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)} \leqslant M_4\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho y_2^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}\right) + F^j, \tag{19}$$

где

$$F^j = M_4\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}\right.$$
$$\left.+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\left\|\mu_{-\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}+\left\|\mu_{+\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\right)H/h_\alpha\right)+\left\|\rho y_2^0\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}.$$

С помощью неравенства (19), при $\tau\leqslant\tau_0=1/(2M_4)$, на основании леммы 4 из [8, с. 171] из неравенства (18) получим априорную оценку

$$\left\|\rho y_2^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\Big|^2_{L_2(\omega_h,m)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha}y_2^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}$$
$$\leqslant M_5(T)\left(\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\frac{\rho}{\rho_\alpha}\left(\left\|\mu_{-\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left\|\mu_{+\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(m)}\right)H/h_\alpha+\left\|\rho y_2^0\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}\right). \tag{20}$$

Из оценки (20) следует

Теорема 1. *Локально-одномерная схема* (7)–(8) *устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи* (7)–(8) *при любых* h_α, $\alpha=1,2,\ldots,p$, *и* $\tau\leqslant\tau_0$ *справедлива оценка* (20).

5. Сходимость локально-одномерной схемы

По аналогии с [5, с. 528] представим решение задачи (9)–(10) в виде суммы $z_{(\alpha)}=v_{(\alpha)}+\eta_{(\alpha)}$, $z_{(\alpha)}=z^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau}=\overset{\circ}{\Psi}_\alpha,\quad x\in\omega_{h_\alpha}+\gamma_{h,\alpha},\quad \alpha=1,2,\ldots,p,\quad \eta(x,0)=0. \tag{21}$$

Из (21) следует $\eta^{j+1}=\eta_{(p)}=\eta^j+\tau(\overset{\circ}{\Psi}_1+\overset{\circ}{\Psi}_2+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_p)=\eta^j=\ldots=\eta^0=0$. Для $\eta_{(\alpha)}=\tau(\overset{\circ}{\Psi}_1+\overset{\circ}{\Psi}_2+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_\alpha)=-\tau(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1}+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_p)=O(\tau)$. Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)}-v_{(\alpha-1)}}{\tau}=\Lambda_\alpha v_{(\alpha)}+\tilde{\Psi}_\alpha,\quad x\in\omega_h,\ \ \alpha=1,2,\ldots,p, \tag{22}$$

$$v_{(\alpha)}=-\eta_{(\alpha)},\quad x_\alpha\in\gamma_{h,\alpha},\quad v_{(\alpha)}(x,0)=0,\quad \tilde{\Psi}_\alpha=\Psi^*_\alpha+\Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)}. \tag{23}$$

Решение задачи (22)–(23) оценим с помощью теоремы 1. Так как $\eta^j=0$, $\eta_{(\alpha)}=O(\tau)$, $\|z^j\|\leqslant\|v^j\|$, то из оценки (20) следует

Теорема 2. *Пусть задача* (1)–(2) *имеет единственное непрерывное в* $\bar{Q}_T$ *решение* $u_2(x,m,t)$ *и существуют непрерывные в* $\bar{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_\alpha^2\partial x_\beta^2},\ \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_\alpha^2\partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2},\quad \alpha=1,2,\ldots,p,\ \ \alpha\neq\beta.$$

Тогда локально-одномерная схема (7)–(8) *сходится со скоростью* $O(|h|^2+\tau)$, *так что*

$$\left\|y_2^{j+1}-u_2^{j+1}\right\|_1 \leqslant M(|h|^2+\tau), \quad |h|^2=h_1^2+h_2^2+\ldots+h_p^2,$$

$$\left\|y_2^{j+1}\right\|_1^2=\left\|\rho y_2^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\rho y_{2\,\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\right|^2_{L_2(\omega_h,m)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left\|\frac{\rho}{\rho_\alpha}y_2^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h,m)}.$$

Благодарность. Авторы выражают признательность Алиханову Анатолию Алиевичу за его ценные обсуждения и полезные предложения во время подготовки этой статьи.

Литература

1. *Ашабоков Б. А., Федченко Л. М., Шаповалов А. В., Шаповалов В. А.* Физика облаков и активных воздействий на них.—Нальчик: Печатный двор, 2017.—240 с.
2. *Пастушков Р. С.* Модель активных воздействий на конвективные облака льдообразующими аэрозолями. Современное состояние и перспективы развития // Труды ГГО.—2016.—Вып. 582.—С. 128–157.
3. *Коган Е. Л., Мазин И. П., Сергеев Б. Н., Хворостьянов В. Н.* Численное моделирование облаков.—М.: Гидрометеоиздат, 1984.—178 с.
4. *Ашабоков Б. А., Шаповалов А. В.* Конвективнвые облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии.—Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2008.—252 с.
5. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1977.—656 с.
6. *Alikhanov A. A.* On the stability and convergence of nonlocal difference schemes // Diff. Equat.—2010.—Vol. 46.—P. 949–961. DOI: 10.1134/S0012266110070037.
7. *Ашабоков Б. А., Хибиев А. Х., Шхануков-Лафишев М. Х.* Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в конвективных облаках // Докл. Адыгской (Черкесской) междунар. академии наук.—2021.—Т. 21, № 4.—С. 45–55. DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-45-55.
8. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—480 с.

Статья поступила 19 августа 2022 г.

Ашабоков Борис Азреталиевич
Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН,
заведующий отделом физики облаков
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. И. Арманд, 37 а
E-mail: ashabokov.boris@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-2889-0864

Хибиев Асланбек Хизирович
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
стажер-исследователь
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: akkhibiev@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5727-7540

Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
главный научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, 89 а
E-mail: lafishev@yandex.ru
https://orcid.org/0000-0002-7242-975X

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 2, P. 14–24

A LOCALLY ONE-DIMENSIONAL SCHEME FOR THE DISTRIBUTION FUNCTIONS EQUATION BY ICE PARTICLES MASSES, CONSIDERING THE INTERACTION OF DROPLETS AND CRYSTALS

Ashabokov, B. A.[1], Khibiev, A. Kh.[2] and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.[2]

[1] Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of the KBSC RAS, 37 a I. Armand St., Nalchik 360000, Russia;
[2] Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 89 a Shortanova St., Nalchik 360000, Russia

E-mail: `ashabokov.boris@mail.ru`, `akkhibiev@gmail.com`, `lafishev@yandex.ru`

Abstract. The work is devoted to the construction of a locally one-dimensional difference scheme for calculating the first boundary value problem for a general parabolic equation for the mass distribution function of ice particles. The functions $u_1(x,z,m,t)$, $u_2(x,z,m,t)$ are introduced such that $u_1(x,z,m,t)\,dm$ and $u_2(x,z,m,t)\,dm$ give at each point (x,z) at time t, the concentration of cloud droplets and ice particles, respectively, whose mass is in the range from m to $m+dm$. The equation is written with respect to the function $u_2(x,z,m,t)$, the function $u_1(x,z,m,t)$ (the droplet mass distribution function) is given in the equation. The equation is part of a system of integro-differential equations for the mass distribution functions of droplets and ice particles describing microphysical processes in convective clouds against the background of a given thermohydrodynamics. A locally one-dimensional difference scheme for a general parabolic equation in a p-dimensional parallelepiped is constructed by the method of total approximation. To describe the interaction of droplets and crystals, nonlocal (nonlinear) integral sources are included in the equation. By the method of energy inequalities, an a priori estimate is obtained, from which the stability and convergence of the difference scheme follow. The results of the work will be used to build a model of microphysical processes in mixed convective clouds, which will be used to conduct research in such topical areas as the study of the role of the system properties of clouds in the formation of their microstructural characteristics and the development of technology for managing precipitation processes in convective clouds by introducing particles of ice-forming reagents.

Keywords: boundary value problem, difference scheme, stability, convergence of the scheme, approximation error.

AMS Subject Classification: 65M06, 65N06, 65N12.

For citation: *Ashabokov, B. A., Khibiev, A. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* A Locally One-Dimensional Scheme for the Distribution Functions Equation by Ice Particles Masses, Considering the Interaction of Droplets and Crystals // *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 2, pp. 14–24 (in Russian). DOI: 10.46698/e8852-9245-8236-y.

References

1. *Ashabokov, B. A., Fedchenko, L. M., Shapovalov, A. V. and Shapovalov, V. A. Fizika oblakov i aktivnykh vozdeystviy na nikh* [Physics of Clouds and Active Effects on them], Nalchik, Pechatnyy dvor, 2017, 240 p. (in Russian).
2. *Pastushkov, R. S.* The Model of Convective Cloud Modification with Ice-Forming Aerosols. Present-Day Status and Perspective, *Trudy GGO* [Proceedings of the Main Geophysical Observatory], 2016, no. 582, pp. 128–157 (in Russian).
3. *Kogan, E. L., Mazin, I. P., Sergeev, B. N. and Khvorost'yanov, V. N. Chislennoe modelirovanie oblakov* [Numerical Modeling of Clouds], Moscow, Gidrometeoizdat, 1984, 178 p. (in Russian).
4. *Ashabokov, B. A. and Shapovalov, A. V. Konvektivnvye oblaka: chislennye modeli i rezul'taty modelirovniya v estestvennykh usloviyakh i pri aktivnom vozdeystvii* [Convective Clouds: Numerical Models and Simulation Results Under Natural Conditions and Active Influence], Nalchik, Publishing House of KBSC RAS, 2008, 252 p. (in Russian).

5. *Samarskiy, A. A. Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1977, 656 p. (in Russian).
6. *Alikhanov, A. A.* On the Stability and Convergence of Nonlocal Difference Schemes, *Differential Equations*, 2010, vol. 46, pp. 949–961. DOI: 10.1134/S0012266110070037.
7. *Ashabokov, B. A., Khibiev, A. Kh. and Shkhanukov-Lafishev, M. Kh.* A Locally One-Dimensional Scheme for a General Parabolic Equation Describing Microphysical Processes In Convective Clouds, *Reports Adyghe* (*Circassian*) *International Academy of Sciences*, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 45–55. DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-45-55.
8. *Samarskiy, A. A. and Gulin, A. V. Ustoychivost' raznostnykh skhem* [Stability of Difference Schemes], Moscow, Nauka, 1973, 480 p. (in Russian).

Received August 19, 2022

Boris A. Ashabokov
Institute of Computer Science and Problems
of Regional Management of the KBSC RAS,
37 a I. Armand St., Nalchik 360000, Russia,
Head of Department of Cloud Physics
E-mail: `ashabokov.boris@mail.ru`
https://orcid.org/0000-0002-2889-0864

Aslanbek Kh. Khibiev
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Intern Researcher
E-mail: `akkhibiev@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0002-5727-7540

Mukhamed Kh. Shkhanukov-Lafishev
Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89 a Shortanova St., Nalchik 360000, Russia,
Chief Researcher of the Department
of Mathematical Modeling of Geophysical Processes
E-mail: `lafishev@yandex.ru`
https://orcid.org/0000-0002-7242-975X