Владикавказский математический журнал
2023, Том 25, Выпуск 4, С. 5–19

УДК 517.983
DOI 10.46698/x5057-2500-3053-t

ОПЕРАТОРЫ ВЕСОВОЙ КОМПОЗИЦИИ НА КВАЗИБАНАХОВЫХ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А. В. Абанин[1,2], Р. С. Маннаников[1]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: avabanin@sfedu.ru, mannanikov@sfedu.ru

Аннотация. В работе рассматриваются основные топологические свойства операторов весовой композиции на весовых пространствах последовательностей $l^p(\mathrm{w})$, $0 < p < \infty$, где w — весовая последовательность положительных чисел: ограниченность, компактность, компактность разностей операторов, формулы для их существенных норм, а также описание тех из них, чей образ является замкнутым. Ранее данные свойства изучались Д. М. Луаном и Л. Х. Хоем для случая гильбертова пространства ($p = 2$). Предложенные ими методы с небольшими модификациями могут быть применены для случая банаховых пространств $l^p(w)$, $p > 1$. Они существенно опираются на использование сопряженных пространств линейных непрерывных функционалов и, следовательно, не подходят для изучения квазибанахова случая ($0 < p < 1$). Более того, некоторые из них не подходят даже для банахова пространства $l^1(\mathrm{w})$. В соответствии с изложенными выше причинами нами разработан более универсальный подход, позволяющий исследовать всю шкалу пространств $\{l^p(\mathrm{w}) : p > 0\}$. С этой целью установлены необходимые и достаточные условия компактности линейного оператора на абстрактном квазибанаховом пространстве последовательностей, являющиеся новыми также для случая банаховых пространств. Более того, введена в рассмотрение новая характеристика — ω-существенная норма линейного непрерывного оператора L на квазибанаховом пространстве X. Она является расстоянием по операторной квазинорме между L и множеством всех ω-компактных операторов на X. При этом оператор K назван ω-компактным на X, если он компактен и покоординатно непрерывен на X. В связи с этим показано, что для $l^p(\mathrm{w})$ ($p > 1$) существенная и ω-существенная нормы оператора весовой композиции совпадают. При $0 < p \leqslant 1$ справедливость этого утверждения не установлена. Главными результатами данной работы для операторов весовой композиции на $l^p(\mathrm{w})$ ($0 < p < \infty$) являются: критерии ограниченности, компактности и замкнутости образа; полное описание пар операторов, разность которых компактна; точная формула для ω-существенной нормы. Некоторые ключевые моменты разработанного подхода могут быть использованы для других операторов и шкал пространств.

Ключевые слова: квазинормированные весовые пространства, операторы весовой композиции.

AMS Subject Classification: 47B37, 46B45.

Образец цитирования: *Абанин А. В., Маннаников Р. С.* Операторы весовой композиции на квазибанаховых весовых пространствах последовательностей // Владикавк. матем. журн.—2023.—Т. 25, вып. 4.—С. 5–19. DOI: 10.46698/x5057-2500-3053-t.

Введение

Пусть $\mathrm{w} = (\mathrm{w}(k))_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность положительных чисел. При каждом $p \in (0, \infty)$ она задает весовое пространство последовательностей комплексных чисел

$$l^p(\mathrm{w}) := \left\{ x = (x_k) \in \omega : \|x\|_{p,\mathrm{w}}^p := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \, \mathrm{w}^p(k) < \infty \right\},$$

где ω — пространство всех последовательностей из $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. При $p \geqslant 1$ это пространство с нормой $\|\cdot\|_{p,\mathrm{w}}$ является банаховым, причем при $p = 2$ оно будет гильбертовым со стандартным скалярным произведением $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, \overline{y}_k \mathrm{w}^2(k)$, $x, y \in l^2(\mathrm{w})$. При $p \in (0, 1)$ $\|\cdot\|$ — квазинорма, а само $l^p(\mathrm{w})$ является квазибанаховым. Именно, при $p \in (0, 1)$ неравенство треугольника имеет место в ослабленной форме:

$$\|x + y\|_{p,\mathrm{w}} \leqslant 2^{\frac{1}{p} - 1} \big(\|x\|_{p,\mathrm{w}} + \|y\|_{p,\mathrm{w}} \big), \quad x, y \in l^p(\mathrm{w}).$$

Кроме того, $\rho(x, y) := \|x - y\|_{p,\mathrm{w}}^p$ — метрика на $l^p(\mathrm{w})$, инвариантная относительно сдвигов, причем $\|-x\|_{p,\mathrm{w}}^p = \|x\|_{p,\mathrm{w}}^p$ и $\lim_{n \to \infty} \|\lambda_n \, x^{(n)} - \lambda x\|_{p,\mathrm{w}}^p = 0$, если $\lambda_n \to \lambda$ и $\|x^{(n)} - x\|_{p,\mathrm{w}}^p \to 0$ при $n \to \infty$ (здесь $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{C}$ и $x^{(n)}, x \in l^p(\mathrm{w})$). Таким образом, $\|\cdot\|_{p,\mathrm{w}}^p$ — псевдонорма на $l^p(\mathrm{w})$, задающая на $l^p(\mathrm{w})$ ту же топологию, что и квазинорма $\|\cdot\|_{p,\mathrm{w}}$. Так как $l^p(\mathrm{w})$ относительно этой топологии полно, то оно относится к классу пространств типа (F) в терминологии Банаха (см. [1, глава III]). Поскольку все банаховы пространства принадлежат этому классу, то все $l^p(\mathrm{w})$, $0 < p < \infty$, являются пространствами типа (F).

Во многих работах изучались свойства различных линейных операторов в пространствах $l^p(\mathrm{w})$ в безвесовом ($\mathrm{w}(n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$) и весовом случаях. Так, например, в [2] (при $p = 1$) и [3] (при $p \geqslant 1$) исследовался оператор сдвига, в [4] (при $p > 1$) и [5] (при $p = 1$) — оператор Чезаро, в [6] (при $p = 2$) — оператор весовой композиции. Помимо самостоятельного интереса, установленные в этих работах результаты играют важную роль в теории весовых пространств голоморфных функций и операторов. В частности, в [7] на основе $l^2(\mathrm{w})$ были введены гильбертовы пространства целых функций $H^2(\mathrm{w})$ и в них установлены некоторые динамические свойства операторов дифференцирования и сдвига. В [8] эти исследования были не только существенно дополнены, но и был разработан метод использования $H^2(\mathrm{w})$ для решения аналогичных задач в весовых пространствах целых функций с sup-нормой. В [9] с помощью этого метода удалось получить полное описание инвариантных подпространств операторов интегрирования и дифференцирования в широком классе весовых пространств Бергмана, Блоха, Дирихле и Фока. Наконец, в [10] $l^2(\mathrm{w})$ использовано в изучении операторов композиции на гильбертовых пространствах рядов Дирихле.

Из приведенного краткого обзора следует, что наиболее изученным является гильбертов случай ($p = 2$), также достаточно полно разработана техника исследования в банаховых пространствах $l^p(\mathrm{w})$ ($p \geqslant 1$) и нет работ, посвященных квазибанаховой ситуации ($0 < p < 1$). На наш взгляд, это связано в основном с тем, что в решении многих задач используемые ранее методы были основаны на привлечении сопряженных пространств линейных непрерывных функционалов, что возможно только при $p \geqslant 1$. С этой точки зрения наименее изученным нам представляется оператор весовой композиции, определяемый по заданной последовательности $u = (u_k)_{k=1}^{\infty}$ комплексных чисел и отображению $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$$C_{\varphi,u} : x = \big(x_k\big)_{k=1}^{\infty} \in \omega \longmapsto \big(u_k \, x_{\varphi(k)}\big)_{k=1}^{\infty} \in \omega.$$

Наша основная цель — разработка техники исследования свойства оператора $C_{\varphi,u}$ в $l^p(\mathrm{w})$, подходящей для всех $p \in (0,\infty)$, и, как следствие, обобщение результатов работы [6] на всю шкалу $\{l^p(\mathrm{w}) : p > 0\}$. Ключевые моменты предлагаемой нами модификации могут быть при соответствующей адаптации использованы для других операторов и шкал пространств.

1. Ограниченность оператора весовой композиции

Приведем нужные для дальнейшего изложения свойства оператора весовой композиции в пространстве ω, наделенном стандартной топологией покоординатной сходимости. Отметим, что $l^p(\mathrm{w}) \hookrightarrow \omega$ при любом $p > 0$. Здесь и далее $\hookrightarrow$ — символ непрерывного вложения. Очевидно, что $C_{\varphi,u}$ действует непрерывно из ω в ω. Далее, обозначим через $e_n = (\delta_{nk})_{k=1}^{\infty}$, где δ_{nk} — символ Кронекера, орты в ω ($n \in \mathbb{N}$). Напомним, что последовательность ортов образует базис в ω. Так как, для любого $x \in l^p(\mathrm{w})$

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k\Big\|_{p,\mathrm{w}}^{p} = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\, \mathrm{w}^p(k) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ будет базисом и в $l^p(\mathrm{w})$. Действие оператора $C_{\varphi,u}$ на ортах выражается следующей формулой:

$$\left(C_{\varphi,u}\,(e_n)\right)_k = \begin{cases} u_k, & k \in \varphi^{-1}(n), \\ 0, & k \notin \varphi^{-1}(n), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

При этом

$$\left\|C_{\varphi,u}\, e_n\right\|_{p,\mathrm{w}}^{p} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} |u_k|^p\, \mathrm{w}^p(k), & \varphi^{-1}(n) \neq \varnothing, \\ 0, & \varphi^{-1}(n) = \varnothing, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Положим $I_\varphi := \{n \in \mathbb{N} : \varphi^{-1}(n) \ \text{счетно}\}$. Из (2) вытекает, что следующее условие является необходимым для того, чтобы $C_{\varphi,u}$ действовал из $l^p(\mathrm{w})$ в $l^p(\mathrm{w})$:

$$I_\varphi = \varnothing \quad \text{или} \quad \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} |u_k|^p\, \mathrm{w}^p(k) < \infty \ \ (\forall\, n \in I_\varphi). \tag{$*$}$$

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, не оговаривая этого дополнительно, что условие ($*$) выполняется. Ключевую роль в исследовании различных топологических свойств оператора $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ играет следующая числовая последовательность:

$$\xi_{p,\mathrm{w}}(n) := \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{w}^p(n)} \displaystyle\sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} |u(k)|^p\, \mathrm{w}^p(k), & \varphi^{-1}(n) \neq \varnothing, \\ 0, & \varphi^{-1}(n) = \varnothing. \end{cases}$$

В случае необходимости мы будем подчеркивать зависимость этой последовательности от φ и u и писать $\xi_{p,w}^{\varphi,u}$ вместо упрощенной записи $\xi_{p,w}$. Следующий критерий доказывается по схеме, использованной при $p = 2$ в [6, теорема 2.3].

Теорема 1. *Пусть $p \in (0,\infty)$. Следующие условия эквивалентны:*
(i) $C_{\varphi,u}\,(l^p(\mathrm{w})) \subset l^p(\mathrm{w})$.

(ii) $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ *ограничен.*

(iii) $\sup_n \xi_{p,\mathrm{w}}(n) < \infty$.

При выполнении одного из этих условий операторная квазинорма оператора $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ *вычисляется по формуле*

$$\|C_{\varphi,u}\|_{p,\mathrm{w}} = \sup_{n \geqslant 1} \xi_{p,\mathrm{w}}(n)^{1/p}. \tag{3}$$

$\lhd$ $(i) \Rightarrow (ii)$: Нетрудно видеть, что из условия (i) следует замкнутость графика оператора $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$. В самом деле, если $x^{(m)} \to x$ и $C_{\varphi,u}(x^{(m)}) \to y$ в $l^p(\mathrm{w})$ при $m \to \infty$, то, в силу того, что $l^p(\mathrm{w}) \hookrightarrow \omega$, $x_k^{(m)} \to x_k$ и $u_k x_{\varphi(k)}^{(m)} \to y_k$ при $m \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, очевидно, следует, что $y_k = u_k x_{\varphi(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $y = C_{\varphi,u} x$. Значит, график оператора $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ замкнут. По теореме Банаха о замкнутом графике, справедливый для пространств типа (F) (см. [1, теорема 7, с. 47]), этот оператор непрерывен.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Очевидно.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Так как $\|e_n\|_{p,\mathrm{w}} = \mathrm{w}(n)$ $(n \in \mathbb{N})$, то из (2) следует, что

$$\left(\frac{\|C_{\varphi,u}\, e_n\|_{p,\mathrm{w}}}{\|e_n\|_{p,\mathrm{w}}} \right)^p = \xi_{p,\mathrm{w}}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $\xi_{p,\mathrm{w}}(n) \leqslant \|C_{\varphi,u}\|_{p,\mathrm{w}}^p$ и, значит,

$$\sup_n \xi_{p,\mathrm{w}}(n)^{1/p} \leqslant \|C_{\varphi,u}\|_{p,\mathrm{w}} < \infty. \tag{4}$$

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Для любого $x \in l^p(\mathrm{w})$ имеем

$$\begin{aligned} \left\|C_{\varphi,u}\, x\right\|_{p,\mathrm{w}}^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\, |x_{\varphi(k)}|^p\, \mathrm{w}^p(k) = \sum_{n \in \varphi(\mathbb{N})} |x_n|^p \sum_{k \in \varphi^{-1}(n)} |u_k|^p\, \mathrm{w}^p(k) \\ &= \sum_{n \in \varphi(\mathbb{N})} |x_n|^p\, \mathrm{w}^p(n)\, \xi_{p,\mathrm{w}}(n) \leqslant B \|x\|^p, \end{aligned}$$

где $B := \sup_n \xi_{p,\mathrm{w}}(n) < \infty$. Следовательно,

$$\|C_{\varphi,u}\|_{p,\mathrm{w}} \leqslant B^{1/p} = \sup_n \xi_{p,\mathrm{w}}(n)^{1/p} < \infty \tag{5}$$

и, значит, $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ ограничен.

Остается заметить, что из (4) и (5) вытекает (3). $\rhd$

2. Компактность и компактные разности

Для исследования компактности оператора $C_{\varphi,u}$ на $l^p(\mathrm{w})$ нам потребуется общий критерий компактности линейных операторов, действующих в квазибанаховых пространствах числовых последовательностей. Отметим, что он является новым и для банахова случая. Прежде чем его привести, введем следующее понятие. Пусть X, Y — квазибанаховы пространства, непрерывно вложенные в ω. Обозначим через (X, ω) и (Y, ω) пространства X и Y, наделенные топологией, индуцированной из ω. Будем говорить, что линейный оператор $L : X \to Y$ является ω-непрерывным, если из того, что $(x^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ — ограниченная в X последовательность, такая что $x^{(m)} \to x$ в (X, ω), следует, что $Lx^{(m)} \to Lx$ в (Y, ω). Очевидно, что всякий оператор, действующий непрерывно из (X, ω) в (Y, ω), будет ω-непрерывным. В частности, как уже отмечалось выше, оператор $C_{\varphi,u}$ непрерывно действует из ω в ω и потому ω-непрерывен на $l^p(\mathrm{w})$. Через $\mathscr{L}_\omega(X, Y)$ обозначим множество всех ω-непрерывных операторов из X в Y. В случае, когда $Y = X$, полагаем $\mathscr{L}_\omega(X, Y) =: \mathscr{L}_\omega(X)$ и операторы из $\mathscr{L}_\omega(X)$ называем ω-непрерывными на X. Из теоремы о замкнутом графике следует, что всякий оператор из $\mathscr{L}_\omega(X, Y)$ является непрерывным из X в Y. Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример 1. Пусть $p \in (0, 1]$. Определим (пока формально) линейный оператор

$$L_0 x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \,\mathrm{w}(n)\right) \frac{e_1}{\mathrm{w}(1)}, \quad x \in l^p(\mathrm{w}). \tag{6}$$

Для любого $x \in l^p(\mathrm{w})$ с $\|x\|_{p,\mathrm{w}} = 1$ имеем

$$\big\|L_0(x)\big\|_{p,\mathrm{w}}^p = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \,\mathrm{w}(n)\right|^p \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \,\mathrm{w}(n)\right)^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \,\mathrm{w}^p(n) = 1.$$

Отсюда следует, что этот оператор корректно определен и непрерывен на $l^p(\mathrm{w})$. Тем не менее, он не является ω-непрерывным на $l^p(\mathrm{w})$, поскольку ограниченную в $l^p(\mathrm{w})$ последовательность $\big(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\big)_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к нулю в ω, он переводит в стационарную последовательность $\big(\frac{e_1}{\mathrm{w}(1)}, \frac{e_1}{\mathrm{w}(1)}, \dots\big)$, т. е. $L_0\big(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\big) \to \frac{e_1}{\mathrm{w}(1)} \neq L_0(0) = 0$, при $n \to \infty$. Этот пример показывает, что ω-непрерывность линейных операторов на $l^p(\mathrm{w})$ при $p \in (0, 1]$, вообще говоря, строго сильнее, чем свойство их непрерывности на $l^p(\mathrm{w})$. Однако, как было отмечено выше, все весовые композиционные операторы действуют непрерывно из ω в ω. Поэтому для них свойства непрерывности и ω-непрерывности совпадают.

Теорема 2. *Пусть X, Y — квазибанаховы пространства числовых последовательностей, непрерывно вложенные в ω, и L — ω-непрерывный оператор из X в Y. Для того, чтобы $L : X \to Y$ был компактным, необходимо, а если единичный шар B_X пространства X компактен в ω, то и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*

(c) : *Для любой ограниченной в X последовательности $\big(x^{(m)}\big)_{m=1}^{\infty}$, сходящейся к нулю в ω, последовательность $\big(Lx^{(m)}\big)_{m=1}^{\infty}$ сходится к нулю в Y.*

$\lhd$ *Необходимость.* Допустим от противного, что имеется такая ограниченная в X последовательность $\big(x^{(m)}\big)_{m=1}^{\infty}$, что $x^{(m)} \to 0$ в ω, но $Lx^{(m)} \not\to 0$ в Y при $m \to \infty$. Тогда имеется такая подпоследовательность $\big(x^{(m_k)}\big)_{k=1}^{\infty}$, что при некотором $c > 0$

$$\big\|Lx^{(m_k)}\big\|_Y \geqslant c, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Так как по условию $L : X \to Y$ компактен и последовательность $\big(x^{(m_k)}\big)_{k=1}^{\infty}$ ограничена в X, то имеется такая подпоследовательность $\big(x^{(m_{k_j})}\big)_{j=1}^{\infty}$, что $\big(Lx^{(m_{k_j})}\big)_{j=1}^{\infty}$ сходится в Y к некоторому элементу $y \in Y$. Поскольку $Y \hookrightarrow \omega$, то тем более, $Lx^{(m_{k_j})} \to y$ в ω при $j \to \infty$. А так как $x^{(m_{k_j})} \to 0$ в ω при $j \to \infty$ и L ω-непрерывен, то $Lx^{(m_{k_j})} \to 0$ в ω при $j \to \infty$. Следовательно, $y = 0$ и $Lx^{(m_{k_j})} \to 0$ в Y при $j \to \infty$, что противоречит (7).

Достаточность. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $\big(x^{(m)}\big)_{m=1}^{\infty}$ в X. Без ограничения общности можно считать, что $x^{(m)} \in B_X$ $(m \in \mathbb{N})$. Так как B_X компактен в ω, то имеется такая подпоследовательность $\big(x^{(m_k)}\big)_{k=1}^{\infty}$, что

$x^{(m_k)} \to x \in B_X$ в ω при $k \to \infty$. Тогда $\left(x^{(m_k)} - x\right)_{k=1}^{\infty}$ ограничена в X и $x^{(m_k)} - x \to 0$ в ω при $k \to \infty$. Отсюда, в соответствии с условием (c), следует, что $L\left(x^{(m_k)} - x\right) \to 0$ в Y или $Lx^{(m_k)} \to Lx$ в Y при $k \to \infty$. Значит, $L : X \to Y$ — компактный оператор. $\rhd$

Для использования только что установленного критерия нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *При любом $p \in (0, \infty)$ единичный шар $B_{p,w} = \{x \in l^p(\mathrm{w}) : \|x\|_{p,w} \leqslant 1\}$ пространства $l^p(\mathrm{w})$ компактен в ω.*

$\lhd$ Рассмотрим произвольную последовательность $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$ из $B_{p,\mathrm{w}}$. Так как $l^p(\mathrm{w}) \hookrightarrow \omega$, то она ограничена в ω, и, следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\left(x^{(m_j)}\right)_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся в ω к некоторому элементу x, т. е. $x_k^{(m_j)} \to x_k$ при $j \to \infty$ $(k \in \mathbb{N})$. Из принадлежности $x^{(m_j)}$ к $B_{p,\mathrm{w}}$ следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \left|x_k^{(m_j)}\right|^p \mathrm{w}^p(k) \leqslant 1, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Переходя здесь к пределу сначала по $j \to \infty$, а затем по $n \to \infty$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \, \mathrm{w}^p(k) \leqslant 1,$$

т. е. $x \in B_{p,\mathrm{w}}$. $\rhd$

Из этой леммы следует, что к пространству $l^p(\mathrm{w})$, $0 < p < \infty$, и произвольному линейному оператору, непрерывно действующему из ω в ω, применима теорема 2, если в качестве X взять $l^p(\mathrm{w})$.

Теорема 3. *Оператор $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ компактен тогда и только тогда, когда* $\lim_{n\to\infty} \xi_{p,\mathrm{w}}(n) = 0$.

$\lhd$ *Необходимость.* Пусть оператор $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ компактен. Рассмотрим последовательность $\left(\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\, e_n\right)_{n=1}^{\infty}$. Так как $\left\|\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\, e_n\right\|_{p,\mathrm{w}} = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, то она ограничена в $l^p(\mathrm{w})$. Кроме того, очевидно, что $\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\, e_n \to 0$ в ω при $n \to \infty$. Тогда по теореме 2 $C_{\varphi,u}\left(\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\, e_n\right) \to 0$ в $l^p(\mathrm{w})$ при $n \to \infty$. Учитывая (2), заключаем отсюда, что $\lim_{n\to\infty} \xi_{p,\mathrm{w}}(n) = 0$.

Достаточность. Пусть $\lim_{n\to\infty} \xi_{p,\mathrm{w}}(n) = 0$. Случай, когда множество $\varphi(\mathbb{N})$ конечно, тривиален, поскольку тогда образ оператора $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ имеет размерность, совпадающую с числом элементов в $\varphi(\mathbb{N})$, и, следовательно, этот оператор автоматически компактен. В случае, когда $\varphi(\mathbb{N})$ счетно, зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такой номер N, что $\xi_{p,\mathrm{w}}(n) < \frac{\varepsilon^p}{2}$, $\forall n > N$. Рассмотрим произвольную ограниченную в $l^p(\mathrm{w})$ последовательность $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, которая сходится в ω к нулю. Без ограничения общности будем считать, что $\left\|x^{(m)}\right\|_{p,\mathrm{w}} \leqslant 1$ $(m \in \mathbb{N})$. Имеем, как и в доказательстве импликации $(iii) \Rightarrow (ii)$ теоремы 1,

$$\left\|C_{\varphi,u} x^{(m)}\right\|_{p,\mathrm{w}}^p = \sum_{n\in\varphi(\mathbb{N})} \left|x_n^{(m)}\right|^p \mathrm{w}^p(n)\, \xi_{p,\mathrm{w}}(n)$$

$$\leqslant \sum_{n\leqslant N} \left|x_n^{(m)}\right|^p \mathrm{w}_n^p\, \xi_{p,\mathrm{w}}(n) + \frac{\varepsilon^p}{2} \sum_{n>N} \left|x_n^{(m)}\right|^p \mathrm{w}^p(n) \leqslant A_N \cdot \max_{n\leqslant N} \left|x_n^{(m)}\right|^p + \frac{\varepsilon^p}{2},$$

где $A_N := \sum_{n\leqslant N} \mathrm{w}^p(n)\, \xi_{p,\mathrm{w}}(n) < \infty$. В силу того, что $x^{(m)} \to 0$ в ω при $m \to \infty$, имеется такой номер M, что $\max_{n\leqslant N} \left|x_n^{(m)}\right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2A_N}$ при $m > M$. Тогда, продолжив оценку

$\|C_{\varphi,u}\,x^{(m)}\|^p_{p,\mathrm{w}}$, получим, что $\|C_{\varphi,u}\,x^{(m)}\|^p_{p,\mathrm{w}} \leqslant \varepsilon^p$ при всех $m > M$. Значит, $C_{\varphi,u}\,x^{(m)} \to 0$ в $l^p(\mathrm{w})$ при $m \to \infty$. Остается применить теорему 2, в соответствии с которой, оператор $C_{\varphi,u} : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ компактен. $\rhd$

Замечание 1. Доказательство критерия компактности весового композиционного оператора в [6, теорема 3.1] для $l^2(\mathrm{w})$ опиралось на тот общеизвестный факт, что линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве компактен тогда и только тогда, когда он каждую слабо сходящуюся последовательность переводит в последовательность, сходящуюся по норме. При этом существенно использовалось то, что последовательность $\big(\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\,e_n\big)_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю в $l^2(\mathrm{w})$. Эти же соображения, как нетрудно убедиться, годятся для всех $l^p(\mathrm{w})$ с $p > 1$. Однако они неприменимы для $p \in (0,1]$, включая банахов случай $l^1(\mathrm{w})$, поскольку $\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\,e_n \not\to 0$ при $n \to \infty$ слабо в $l^p(\mathrm{w})$ при таких p. В самом деле, рассмотрим функционал $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\,\mathrm{w}(k)$, $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$. Для всех $x \in l^p(\mathrm{w})$ с $\|x\|_{p,\mathrm{w}} = 1$ имеем при $p \in (0,1]$

$$|\varphi(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\,|\mathrm{w}(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\,|\mathrm{w}(k)|^p = 1.$$

Отсюда следует, что φ корректно определен и является линейным непрерывным функционалом на $l^p(\mathrm{w})$. Для него $\varphi\big(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\big) = 1$ ($n \in \mathbb{N}$), откуда и следует, что $\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\,e_n \not\to 0$ при $n \to \infty$ слабо в $l^p(\mathrm{w})$ для $p \in (0,1]$.

Исследуем теперь задачу о компактности разности двух весовых композиционных операторов:

$$C_{\varphi,u} - C_{\psi,u} : x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \omega \longmapsto \big(u_k x_{\varphi(k)} - v_k x_{\psi(k)}\big)_{k=1}^{\infty} \in \omega.$$

Ее действие на ортах имеет вид

$$\big((C_{\varphi,u} - C_{\psi,u})\,e_n\big)_k = \begin{cases} u_k - v_k, & k \in \varphi^{-1}(n) \cap \psi^{-1}(n), \\ u_k, & k \in \varphi^{-1}(n) \backslash \psi^{-1}(n), \\ -v_k, & k \in \psi^{-1}(n) \backslash \varphi^{-1}(n), \\ 0, & k \notin \varphi^{-1}(n) \cup \psi^{-1}(n). \end{cases} \tag{8}$$

Откуда

$$\begin{gathered} \|\,(C_{\varphi,u} - C_{\psi,v})\,e_n\|^p_{p,\mathrm{w}} = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k \delta_{n\varphi(k)} - v_k \delta_{n\psi(k)}|^p\,\mathrm{w}^p(n) \\ = \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\cap\psi^{-1}(n)} |u_k - v_k|^p \mathrm{w}^p(n) + \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\backslash\psi^{-1}(n)} |u_k|^p \mathrm{w}^p(n) + \sum_{k\in\psi^{-1}(n)\backslash\varphi^{-1}(n)} |v_k|^p \mathrm{w}^p(n). \end{gathered} \tag{9}$$

Чтобы сформулировать и доказать критерий компактности оператора $C_{\varphi,u} - C_{\phi,v}$, рассмотрим числовую последовательность

$$d_{p,\mathrm{w}}(n) = \frac{1}{\mathrm{w}(n)^p}\Bigg(\sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\cap\psi^{-1}(n)} |u_k - v_k|^p\,\mathrm{w}^p(n) + \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\backslash\psi^{-1}(n)} |u_k|^p\,\mathrm{w}^p(n) + \sum_{k\in\psi^{-1}(n)\backslash\varphi^{-1}(n)} |v_k|^p\,\mathrm{w}^p(n)\Bigg),$$

определенную в соответствии с (9).

Теорема 4. *Оператор $C_{\varphi,u} - C_{\varphi,v}$ компактен тогда и только тогда, когда* $\lim_{n\to\infty} d_{p,\mathrm{w}}(n) = 0$.

◁ Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Отметим лишь основные моменты. Заметим, с учетом (9), что $\left\|(C_{\varphi,u} - C_{\psi,v})\left(\frac{1}{\mathrm{w}(n)}\, e_n\right)\right\|_{p,\mathrm{w}}^p = d_{p,\mathrm{w}}(n)$. Далее, для произвольной ограниченной в $l^p(\mathrm{w})$ последовательности $\left(x^{(m)}\right)_{m=1}^{\infty}$, сходящейся в ω к нулю, имеем, положив $c_p := \max\{1, 2^{p-1}\}$,

$$\left\|(C_{\varphi,u} - C_{\psi,v})\, x^{(m)}\right\|_{p,\mathrm{w}}^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k x_{\varphi(k)}^{(m)} - v_k x_{\psi(k)}^{(m)}\right|^p \mathrm{w}^p(n)$$

$$= \sum_{k:\varphi(k)=\psi(k)} |u_k - v_k|^p \left|x_{\psi(k)}^{(m)}\right|^p \mathrm{w}^p(k) + \sum_{k:\varphi(k)\neq\psi(k)} \left|u_k x_{\varphi(k)}^{(m)} - v_k x_{\psi(k)}^{(m)}\right|^p \mathrm{w}^p(k)$$

$$\leqslant \sum_{n\in\varphi(\mathbb{N})\cap\psi(\mathbb{N})} \left|x_n^{(m)}\right|^p \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\cap\psi^{-1}(n)} |u_k - v_k|^p\, \mathrm{w}^p(k)$$

$$+ c_p\left(\sum_{i\in\varphi(\mathbb{N}),j\in\psi(\mathbb{N}),i\neq j} \left(\left|x_i^{(m)}\right|^p \sum_{k\in\varphi^{-1}(i)\cap\psi^{-1}(j)} |u_k|^p \mathrm{w}^p(k) + \left|x_j^{(m)}\right|^p \sum_{k\in\varphi^{-1}(j)\cap\psi^{-1}(j)} |v_k|^p \mathrm{w}^p(k)\right)\right.$$

$$\leqslant (1 + c_p) \sum_{n\in\varphi(\mathbb{N})\cup\psi(\mathbb{N})} \left|x_n^{(m)}\right|^p \left(\sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\cap\psi^{-1}(n)} |u_k - v_k|^p \mathrm{w}^p(k)\right.$$

$$\left. + \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\setminus\psi^{-1}(n)} |u_k|^p \mathrm{w}^p(k) + \sum_{k\in\psi^{-1}(n)\setminus\varphi^{-1}(n)} |v_k|^p \mathrm{w}^p(k)\right)$$

$$= (1 + c_p) \sum_{n\in\varphi(\mathbb{N})\cup\psi(\mathbb{N})} \left|x_n^{(m)}\right|^p d_{p,\mathrm{w}}(n)\mathrm{w}^p(n).$$

Последнюю сумму, как и в теореме 3, остается разбить на две, зависящие от номера $N \in \varphi(\mathbb{N}) \cup \psi(\mathbb{N})$, при котором все члены последовательности $d_{p,\mathrm{w}}(n)$ с номерами из $\varphi(\mathbb{N}) \cup \psi(\mathbb{N})$, большими N, меньше наперед заданного сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. ▷

3. Существенная норма

Пусть X и Y — квазибанаховы пространства. Как обычно, через $\mathscr{L}(X, Y)$ и $\mathscr{K}(X, Y)$ обозначим множества линейных непрерывных и компактных операторов их X в Y, соответственно. Если $Y = X$, используем обозначения $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X, Y)$ и $\mathscr{K}(X) := \mathscr{K}(X, Y)$, а также называем операторы из $\mathscr{L}(X)$ и $\mathscr{K}(X)$ линейными непрерывными и, соответственно, компактными операторами на X. Классическая характеристика — существенная квазинорма — представляет собой отклонение оператора $L \in \mathscr{L}(X, Y)$ от множества $\mathscr{K}(X, Y)$ по операторной квазинорме и определяется по формуле

$$\|L\|_e := \inf_{K\in\mathscr{K}(X,Y)} \|L - K\|.$$

Из теорем 2, 3 и замечания 1 следует, что для пространств числовых последовательностей имеет смысл, наряду с $\|\cdot\|_e$, рассматривать величину отклонения L от множества $\mathscr{K}_\omega(X, Y)$ всех компанктных ω-непрерывных операторов из X в Y:

$$\|L\|_{\omega e} := \inf_{K\in\mathscr{K}_\omega(X,Y)} \|L - K\|,$$

которую мы будем называть ω-существенной квазинормой. Для банахова пространства X используем названия существенной и ω-существенной норм оператора. Так как $\mathscr{K}_\omega(X,Y) \subset \mathscr{K}(X,Y)$, то $\|L\|_e \leqslant \|L\|_{\omega e}$ для любого $L \in \mathscr{L}(X,Y)$, причем равенство $\|L\|_e = \|L\|_{\omega e}$ имеет место не для всех L. Чтобы показать последнее, используем оператор, рассмотренный в примере 1.

Пример 2. Оператор L_0, задаваемый формулой (6), очевидно является компактным на $l^p(\mathrm{w})$ при $0 < p \leqslant 1$. Поэтому $\|L_0\|_e = 0$. Кроме того, из примера 1 имеем, что $\|L_0\| \leqslant 1$ и $L_0\big(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\big) = \frac{e_1}{\mathrm{w}(1)}$ $(n \in \mathbb{N})$. Отсюда, в частности, следует, что $\|L_0\| = 1$. Далее, по теореме 2 для любого оператора $K \in \mathscr{K}_\omega\left(l^p(\mathrm{w})\right)$

$$\left\| K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}\|L_0 - K\| \geqslant \left\| L_0\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right) - K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\| &\geqslant \frac{1}{\mathrm{w}(n)}\,\|e_1\|_{p,\mathrm{w}} - \left\| K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)_{p,\mathrm{w}}\right\|_{p,\mathrm{w}} \\ &= 1 - \left\| K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, $\|L_0 - K\| \geqslant 1$ для любого $K \in \mathscr{K}_\omega\left(l^p(\mathrm{w})\right)$, откуда следует, что $\|L_0\|_{\omega e} = 1 = \|L_0\|$.

Итак, нами указан оператор L_0 на $(l^p(\mathrm{w}))$ $(0 < p \leqslant 1)$, для которого $\|L_0\|_e < \|L_0\|_{\omega e}$. Отметим, что он не является ω-непрерывным на $l^p(\mathrm{w})$. В связи с этим представляет интерес следующий вопрос, ответа на который мы не знаем: для всякого ли оператора $L \in \mathscr{L}_\omega\left(l^p(\mathrm{w})\right)$ имеет место равенство $\|L\|_{\omega e} = \|L\|_e$? Ниже мы покажем (см. теорему 5), что для операторов весовой композиции на $l^p(\mathrm{w})$ при $p > 1$ ответ на этот вопрос положителен. Наша ближайшая цель — установить оценки, а по возможности, и точные формулы для вычисления величин существенной и ω-существенной квазинорм оператора $C_{\varphi,u}$, непрерывно действующего на $l^p(\mathrm{w})$. Эти величины непосредственным образом связаны со следующими множествами:

$$\mathbb{I}_{\varphi,u}(r) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \left(\xi^{\varphi,u}_{p,\mathrm{w}}\right)^{1/p} \geqslant r \right\}, \quad r > 0.$$

Очевидно, что если $0 < r_1 < r_2$, то $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r_2) \subset \mathbb{I}_{\varphi,u}(r_1)$. Далее, из теоремы 1 следует, что все множества $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$ с $r > \|C_{\varphi,u}\|$ пусты. Пустое множество естественно считать множеством с нулевым числом элементов и, таким образом, конечным. Отсюда следует, что величина

$$r_{\varphi,u} := \inf\left\{ r > 0 : \mathbb{I}_{\varphi,u}(r) \text{ конечно} \right\}$$

является неотрицательным числом. Следующий результат представляет собой критерий компактности оператора $C_{\varphi,u}$ в терминах введенных выше характеристик.

Предложение 1. *Для оператора $C_{\varphi,u}$, непрерывного на $l^p(\mathrm{w})$ $(0 < p < \infty)$, следующие условия эквивалентны:*

(i) $C_{\varphi,u}$ компактен на $l^p(\mathrm{w})$.

(ii) $\|C_{\varphi,u}\|_e = 0$.

(iii) $\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e} = 0$.

(iv) $r_{\varphi,u} = 0$.

$\lhd$ $(i) \Leftrightarrow (iv)$: По теореме 3 $C_{\varphi,u}$ компактен тогда и только тогда, когда $\xi_{p,\mathrm{w}}^{\varphi,u} \to 0$ при $n \to \infty$, что, в свою очередь, равносильно конечности всех множеств $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$ $(r > 0)$. Последнее очевидно эквивалентно тому, что $r_{\varphi,u} = 0$.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$: Вытекает из известного факта, что линейный оператор на квазибанаховом пространстве компактен тогда и только тогда, когда его существенная квазинорма равна нулю.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Следует из неравенства $0 \leqslant \|C_{\varphi,u}\|_e \leqslant \|C_{\varphi,u}\|_{\omega e}$.

$(i) \Rightarrow (iii)$: Очевидно, так как $C_{\varphi,u}$ ω-непрерывен на $l^p(\mathrm{w})$. $\rhd$

Из предложения 1 следует, что для компактных оперторов $C_{\varphi,u}$ на $l^p(\mathrm{w})$ и только для них верны равенства

$$\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e} = \|C_{\varphi,u}\|_e = r_{\varphi,u} = 0.$$

Прежде чем привести следующий результат, заметим, что для любого $r > r_{\varphi,u}$ множество $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$ конечно, а если $r_{\varphi,u} > 0$, то для любого $0 < r < r_{\varphi,u}$ оно счетно. Это следует из отмеченной выше монотонности семейства $\{\mathbb{I}_{\varphi,u}(r) : r > 0\}$ по операции вложения.

Предложение 2. *Для любого весового пространства $l^p(\mathrm{w})$ и любого непрерывного на $l^p(\mathrm{w})$ оператора $C_{\varphi,u}$*

$$\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e} \leqslant r_{\varphi,u}. \tag{10}$$

$\lhd$ Рассмотрим любое $r > r_{\varphi,u}$. Для него множество $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$ конечно. Образуем следующую последовательность $v = (v_k)_{k=1}^{\infty}$:

$$v_k = \begin{cases} u_k, & \text{если } \varphi(k) \in \mathbb{I}_{\varphi,u}(r), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$ конечно, то лишь конечное число членов соответствующей последовательности $(\xi_{p,\mathrm{w}}^{\varphi,v}(n))_{n=1}^{\infty}$ отлично от нуля и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \xi_{p,\mathrm{w}}^{\varphi,v}(n) = 0$. По теореме 3 оператор $C_{\varphi,v}$ компактен на $l^p(\mathrm{w})$. Как весовой композиционный оператор он ω-непрерывен на $l^p(\mathrm{w})$. Заметим, что $C_{\varphi,u} - C_{\varphi,v} = C_{\varphi,u-v}$ — непрерывный оператор на $l^p(\mathrm{w})$ и по определению $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$

$$\big(\xi_{p,\mathrm{w}}^{\varphi,u}(n)\big)^{1/p} < r \quad \text{для любого} \quad n \notin \mathbb{I}_{\varphi,u}(r).$$

Поэтому, учитывая определение последовательности v, имеем

$$\|C_{\varphi,u} - C_{\varphi,v}\| = \|C_{\varphi,u-v}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)} \big(\xi_{p,\mathrm{w}}^{\varphi,u}(n)\big)^{1/p} \leqslant r.$$

Отсюда следует, что $\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e} \leqslant r$ для любого $r > r_{\varphi,u}$ и, значит, верно неравенство (10). $\rhd$

Чтобы получить оценку снизу существенной нормы оператора $C_{\varphi,u}$ нам потребуются вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Для любого $C_{\varphi,u} \in \mathscr{L}(l^p(\mathrm{w}))$ и произвольного оператора $T \in \mathscr{L}(l^p(\mathrm{w}))$, для которого $T\big(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\big) \to 0$ при $n \to \infty$ в $l^p(\mathrm{w})$, имеет место оценка*

$$\|C_{\varphi,u} - T\| \geqslant r_{\varphi,u}. \tag{11}$$

$\lhd$ Если $C_{\varphi,u}$ компактен на $l^p(\mathrm{w})$, то по предложению 1 $r_{\varphi,u}=0$ и оценка (11) тривиальна. Пусть теперь $C_{\varphi,u}$ некомпактен на $l^p(\mathrm{w})$ и, значит, $r_{\varphi,u}>0$. Рассмотрим любое $0<r<r_{\varphi,u}$ и $n\in\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$. Имеем

$$\|C_{\varphi,u}-T\|\geqslant\left\|C_{\varphi,u}\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)-T\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}}\geqslant\left\|C_{\varphi,u}\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}}-\left\|T\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}}$$
$$=(\xi_{\varphi,u}(n))^{1/p}-\left\|T\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}}\geqslant r-\left\|T\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}}.$$

Так как $\mathbb{I}_{\varphi,u}(r)$ счетно и $\left\|T\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\right\|_{p,\mathrm{w}}\to 0$ при $n\to\infty$, то отсюда следует, что $\|C_{\varphi,u}-T\|\geqslant r$ для любого $r\in(0,r_{\varphi,u})$, и, значит, верна оценка (11). $\rhd$

Лемма 2. *При $p>1$ любой компактный оператор K на $l^p(\mathrm{w})$ обладает тем свойством, что $K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\to 0$ в $l^p(\mathrm{w})$ при $n\to\infty$.*

$\lhd$ Рассмотрим любой непрерывный линейный функционал μ на $l^p(\mathrm{w})$. Как известно, он имеет вид

$$\mu(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\,x_n,\quad x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l^p(\mathrm{w}),$$

где $\mu=(\mu_n)_{n=1}^{\infty}\in l^q\left(\frac{1}{\mathrm{w}}\right)$, $\frac{1}{\mathrm{w}}:=\left(\dfrac{1}{\mathrm{w}(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда $\mu\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)=\dfrac{\mu_n}{\mathrm{w}(n)}\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, последовательность $\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю в $l^p(\mathrm{w})$. По свойствам компактных операторов тогда $K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\to 0$ при $n\to\infty$ в $l^p(\mathrm{w})$. $\rhd$

Теорема 5. *При $p>1$ для любого непрерывного на $l^p(\mathrm{w})$ оператора $C_{\varphi,u}$ справедливо равенство*

$$\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e}=\|C_{\varphi,u}\|_e=r_{\varphi,u}.$$

$\lhd$ Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\|C_{\varphi,u}-K\|\geqslant r_{\varphi,u}\quad\text{для любого}\quad K\in\mathscr{K}\left(l^p(\mathrm{w})\right).$$

Поэтому $\|C_{\varphi,u}\|_e\geqslant r_{\varphi,u}$. А по предложению 1 $\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e}\leqslant r_{\varphi,u}$. Тогда $r_{\varphi,u}\leqslant\|C_{\varphi,u}\|_e\leqslant\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e}\leqslant r_{\varphi,u}$, откуда и получаем требуемое. $\rhd$

Из теоремы 2 заключаем, что ответ на поставленный выше вопрос о равенстве $\|L\|_{\omega e}=\|L\|_e$ для ω-непрерывного оператора L положителен по крайней мере для операторов весовой композиции на $l^p(\mathrm{w})$ при $p>1$. Из примера 1 следует, что не всякий компактный оператор K на $l^p(\mathrm{w})$ с $0<p\leqslant 1$ обладает свойством, что $K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\to 0$ при $n\to\infty$ в $l^p(\mathrm{w})$. Поэтому при $0<p\leqslant 1$ использованные выше соображения по оценке существенной нормы оператора $C_{\varphi,u}$ для $p>1$ неприменимы. Однако их незначительная модификация позволяет установить формулу для ω-существенной нормы $C_{\varphi,u}$.

Теорема 6. *При $0<p\leqslant 1$ для любого непрерывного на $l^p(\mathrm{w})$ оператора $C_{\varphi,u}$ верно равенство*

$$\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e}=r_{\varphi,u}.$$

$\lhd$ Так как $\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\to 0$ при $n\to\infty$ покоординатно, то по теореме 2 $K\left(\frac{e_n}{\mathrm{w}(n)}\right)\to 0$ в $l^p(\mathrm{w})$ для любого оператора $K\in\mathscr{K}_\omega(l^p(\mathrm{w}))$. Тогда по лемме 1 $\|C_{\varphi,u}-K\|\geqslant r_{\varphi,u}$ для любого $K\in\mathscr{K}_\omega(l^p(\mathrm{w}))$. Отсюда заключаем, что верно неравенство $\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e}\geqslant r_{\varphi,u}$, которое вместе с обратной оценкой (10) дает требуемое равенство. $\rhd$

В заключение этого пункта отметим, что нам неизвестно, верно ли равенство $\|C_{\varphi,u}\|_{\omega e}=\|C_{\varphi,u}\|_e$ для произвольного оператора $C_{\varphi,u}$ на $l^p(\mathrm{w})$ при $0<p\leqslant 1$.

4. Замкнутость образа и следствия для операторов умножения и композиции

В ряде вопросов важно знать, является ли образ оператора замкнутым или нет. В случае $l^2(\mathrm{w})$ для оператора весовой композиции этот вопрос был решен в [6, раздел 5]. Поскольку доказательства аналогичных результатов для произвольного $p > 0$ не отличаются принципиально от приведенных в [6], мы их опускаем.

Теорема 7. *Для непрерывного на $l^p(\mathrm{w})$ оператора $C_{\varphi,u}$ верны следующие утверждения:*

(a) Если множество $\mathcal{N}_\xi$ тех $n \in \mathbb{N}$, для которых $\xi_{p,\mathrm{w}}(n) \neq 0$, конечно, то образ $C_{\varphi,u}(l^p(\mathrm{w}))$ конечномерен и замкнут.

(b) Если множество $\mathcal{N}_\xi$ счетно, то образ $C_{\varphi,u}(l^p(\mathrm{w}))$ замкнут тогда и только тогда, когда

$$\exists\, m > 0 :\ \xi_{p,\mathrm{w}}(n) \geqslant m \ \text{ для всех } \ n \in \mathcal{N}_\xi.$$

Следствие. *Компактный на $l^p(\mathrm{w})$ оператор $C_{\varphi,u}$ имеет замкнутый образ в том и только в том случае, когда $C_{\varphi,u}$ конечномерен.*

В заключение приведем следствие полученных выше результатов для операторов умножения $M_u := C_{\varphi,u}$ с $\varphi(n) = n$ $(n \in \mathbb{N})$ и композиции $C_\varphi := C_{\varphi,u}$ с $u(n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

Предложение 3. *Пусть M_u и M_v — операторы умножения, заданные числовыми последовательностями $u = (u_n)_{n=1}^\infty$ и $v = (v_n)_{n=1}^\infty$. Верны следующие утверждения:*

(a) Следующие условия эквивалентны:

(i) M_u ограничен на $l^p(\mathrm{w})$.

(ii) $u \in l^\infty$. При этом, квазинорма M_u вычисляется по формуле

$$\|M_u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\,.$$

(b) M_u компактен на $l^p(\mathrm{w})$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(c) $M_u - M_v$ компактен тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

(d) Положим $r_u := \lim_{n\to\infty}\sup|u_n|$. Тогда $\|M_u\|_{\omega e} = \|M_u\|_e = r_u$ при $p > 1$ и $\|M_u\|_{\omega e} = r_u$ при $0 < p \leqslant 1$. Для компактных операторов M_u на $l^p(\mathrm{w})$ $(0 < p < \infty)$ и только для них $\|M_u\|_{\omega e} = \|M_u\|_e = r_u = 0$.

(e) Образ $M_u(l^p(\mathrm{w}))$ замкнут либо когда конечное число u_n отлично от нуля и оператор M_u конечномерен, либо когда существует такое $m > 0$, что $|u_n| \geqslant m$ для всех $n \in \mathbb{N}$ с $u_n \neq 0$.

Предложение 4. *Пусть C_φ и C_ψ — операторы композиции, заданные с отображениями $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Верны следующие утверждения:*

(a) Следующие утверждения эквивалентны:

(i) C_φ ограничен на $l^p(\mathrm{w})$.

(ii) Существует $A > 0 : \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} \mathrm{w}^p(k) \leqslant A\,\mathrm{w}^p(n)$ $(n \in \mathbb{N})$. При этом квазинорма оператора $C_\varphi : l^p(\mathrm{w}) \to l^p(\mathrm{w})$ вычисляется по формуле

$$\|C_\varphi\| = \sup_n \frac{1}{\mathrm{w}(n)}\left(\sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} \mathrm{w}^p(k)\right)^{1/p}.$$

(b) C_φ компактен на $l^p(\mathrm{w})$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{w}^p(n)} \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} \mathrm{w}^p(k) = 0.$$

(c) *Разность $C_\varphi - C_\psi$ компактна на $l^p(\mathrm{w})$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{w}^p(n)} \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)\Delta\psi^{-1}(n)} \mathrm{w}^p(k) = 0.$$

(d) *Положим*

$$r_\varphi := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{w}(n)} \left(\sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} \mathrm{w}^p(k) \right)^{1/p}.$$

Тогда $\|C_\varphi\|_{\omega e} = \|C_\varphi\| = r_\varphi$ при $p > 1$ и $\|C_\varphi\|_{\omega e} = r_\varphi$ при $0 < p \leqslant 1$. Для компактных операторов C_φ на $l^p(\mathrm{w})$ и только для них $\|C_\varphi\|_{\omega e} = \|C_\varphi\|_e = r_\varphi = 0$.

(e) *Образ $C_\varphi(l^p(\mathrm{w}))$ замкнут тогда и только тогда, когда существует такое $m > 0$, что*

$$\frac{1}{\mathrm{w}^p(n)} \sum_{k\in\varphi^{-1}(n)} \mathrm{w}^p(k) \geqslant m \ \text{ для всех } n, \text{ при которых } \varphi^{-1}(n) \neq \varnothing.$$

Литература

1. *Банах С.* Теория линейных операций.—Ижевск: НИУ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.—272 с.
2. *Thomas M. P.* Closed ideals of $l^1(\omega_n)$ when $\{\omega_n\}$ is star-shaped // Pacific J. Math.—1983.—Vol. 105, № 1.—P. 237–255. DOI: 10.2140/pjm.1983.105.237.
3. *Якубович Д. В.* Инвариантные подпространтсва операторов взвешенного сдвига // Зап. науч. сем. ЛОМИ. —1985.—Т. 141.—С. 100–143.
4. *Albanese A. A., Bonet J., Ricker W. J.* Spectrum and compactness of the Cesàro operator on weighted l_p spaces // J. Aust. Math. Soc.—2015.—Vol. 99, № 3.—P. 287–314. DOI: 10.1017/S1446788715000221.
5. *Albanese A. A., Bonet J., Werner J. R.* The Cesàro operator in weighted l_1 spaces // Math. Nachr.—2018.—Vol. 291, № 7.—P. 1015–1048. DOI: 10.1002/mana.201600509.
6. *Luan D. M., Khoi L. H.* Weighted composition operators on weighted sequence spaces // Contemp. Math.—2015.—Vol. 645, № 7.—P. 199–215. DOI: 10.1090/conm/645/12907.
7. *Chan K. C., Shapiro J. H.* The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions // Indiana Univ. Math. J.—1991.—Vol. 40, № 4.—P. 1421–1449.
8. *Tien P. T.* Translation operators on weighted spaces of entire functions // Proc. Amer. Math. Soc.—2017.—Vol. 145, № 2—P. 805–815. DOI: 10.1090/proc/13254.
9. *Abanin A. V., Tien P. T.* Invariant subspaces for classical operators on weighted spaces of holomorphic functions // Integr. Equ. Oper. Theory.—2017.—Vol. 89, № 3.—P. 409–438. DOI: 10.1007/s00020-017-2401-y.
10. *Hou X., Hu B., Khoi L. H.* Hilbert spaces of entire Dirichlet series and composition operators // J. Math. Anal. Appl.—2013.—Vol. 401, № 1.—P. 416–429. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.12.036.

Статья поступила 21 сентября 2023 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой математического анализа и геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
заведующий отделом математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: `avabanin@sfedu.ru`
https://orcid.org/0000-0003-4507-4508

Маннаников Роман Сергеевич
Южный федеральный университет,
магистрант
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `mannanikov@sfedu.ru`
https://orcid.org/0009-0007-3927-5561

Vladikavkaz Mathematical Journal
2023, Volume 25, Issue 4, P. 5–19

WEIGHTED COMPOSITION OPERATORS ON QUASI-BANACH WEIGHTED SEQUENCE SPACES

Abanin, A. V.[1,2] and Mannanikov, R. S.[1]
[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: avabanin@sfedu.ru, mannanikov@sfedu.ru

Abstract. This paper is devoted to the basic topological properties of weighted composition operators on the weighted sequence spaces $l^p(\mathrm{w})$, $0 < p < \infty$, given by a weight sequence w of positive numbers such as boundedness, compactness, compactness of differences of two operators, formulas for their essential norms, and a description of those operators that have a closed range. Previously these properties were studied by D. M. Luan and L. H. Khoi, in the case of Hilbert space ($p = 2$). Their methods can be also applied, with some minor modifications to the case of Banach spaces $l^p(\mathrm{w})$, $p > 1$. They are essentially based on the use of conjugate spaces of linear continuous functionals and, consequently, cannot be applied to the quasi-Banach case ($0 < p < 1$). Moreover, some of them do not work even in the Banach space $l^1(\mathrm{w})$. Motivated by these reasons we develop a more universal approach that allows to study the whole scale $\{l^p(\mathrm{w}) : p > 0\}$. To do this we establish necessary and sufficient conditions for a linear operator to be compact on an abstract quasi-Banach sequence space which are new also for the case of Banach spaces. In addition it is introduced a new characteristic which is called ω-essential norm of a linear continuous operator L on a quasi-Banach space X. It measures the distance, in operator metric, between L and the set of all ω-compact operators on X. Here an operator K is called ω-compact on X if it is compact and coordinate-wise continuous on X. In this relation it is shown that for $l^p(\mathrm{w})$ with $p > 1$ the essential and ω-essential norms of a weighted composition operator coincide while for $0 < p \leqslant 1$ we do not know whether the same result is true or not. Our main results for weighted composition operators on $l^p(\mathrm{w})$ ($0 < p < \infty$) are the following: criteria for an operator to be bounded, compact, or have a closed range; a complete description of pairs of operator with compact difference; an exact formula for ω-essential norm. Some key aspects of our approach can be used for other operators and scales of spaces.

Key words: quasi-Banach sequence spaces, weighted composition operators, weighted l^p spaces.

AMS Subject Classification: 47B37, 46B45.

For citation: *Abanin, A. V. and Mannanikov, R. S.* Weighted Composition Operators on Quasi-Banach Weighted Sequence Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2023, vol. 25, no. 4, pp. 5–19 (in Russian). DOI: 10.46698/x5057-2500-3053-t.

References

1. *Banach S. Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne, Warzawa, 254 p.
2. *Thomas, M. P.* Closed Ideals of $l^1(\omega_n)$ when $\{\omega_n\}$ is Star-Shaped, *Pacific Journal of Mathematics*, 1983, vol. 105, no. 1, pp. 237–255. 10.2140/pjm.1983.105.237.
3. *Yakubovich, D. V.* Invariant Subspaces of Weighted Shift Operators, *Journal of Soviet Mathematics*, 1987, vol. 37, no. 5, pp. 1323–1349. DOI: 10.1007/BF01327041.
4. *Albanese, A. A., Bonet, J. and Ricker, W. J.* Spectrum and Compactness of the Cesàro Operator on Weighted l_p Spaces, *Journal of the Australian Mathematical Society*, 2015, vol. 99, no. 3, pp. 287–314. 10.1017/S1446788715000221.
5. *Albanese, A. A., Bonet, J. and Werner, J. R.* The Cesàro Operator in Weighted l_1 Spaces, *Mathematische Nachrichte*, 2018, vol. 291, no. 7, pp. 1015–1048. DOI: 10.1002/mana.201600509.

6. *Luan, D. M. and Khoi, L. H.* Weighted Composition Operators on Weighted Sequence Spaces, *Contemporary Mathematics*, 2015, vol. 645, no. 7, pp. 199–215. DOI: 10.1090/conm/645/12907.
7. *Chan, K. C. and Shapiro, J. H.* The Cyclic Behavior of Translation Operators on Hilbert Spaces of Entire Functions, *Indiana University Mathematics Journal*, 1991, vol. 40, no. 4, pp. 1421–1449.
8. *Tien, P. T.* Translation Operators on Weighted Spaces of Entire Functions, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2017, vol. 145, no. 2, pp. 805–815. DOI: 10.1090/proc/13254.
9. *Abanin, A. V. and Tien, P. T.* Invariant Subspaces for Classical Operators on Weighted Spaces of Holomorphic Functions, *Integral Equations and Operator Theory*, 2017, vol. 89, no. 3, pp. 409–438. DOI: 10.1007/s00020-017-2401-y.
10. *Hou, X., Hu, B. and Khoi, L. H.* Hilbert Spaces of Entire Dirichlet Series and Composition Operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, vol. 401, no. 1. pp. 416–429. DOI: 10.1016/j.jmaa.2012.12.036.

Received September 21, 2023

Alexander V. Abanin
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis and Geometry;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Head of the Department of Mathematical Analysis
E-mail: avabanin@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-4507-4508

Roman S. Mannanikov
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Graduate Student
E-mail: mannanikov@sfedu.ru
https://orcid.org/0009-0007-3927-5561