Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen
Journal for Analysis and its Applications
Volume 19 (2000), No. 1, 239–253

Konstruktive Verzweigungstheorie für Halbeigenwerte

M. Damm

Abstract. By linearization of nonlinear semi-eigenvalue problems, especially for analytic maps with completely continuous Fréchet derivative, we develop the (primary) branching solutions and the corresponding semi-eigenvalues into power series with respect to a real parameter. We consider the algebraically simple case of the semi-eigenvalue of the linearization using the implicit function theorem and the Fredholm alternative.

Keywords: *Semi-eigenvalue, semi-eigenvector, nonlinear eigenvalue problems, bifurcation, analytic branching solutions, implicit function theorem, Fredholm alternative*

AMS subject classification: 47 H 12, 58 C 40, 58 E 07

1. Einleitung

Im Jahre 1963 wurde von O. B. Moskalew erstmals die Problematik der so genannten Halbeigenwerte herausgearbeitet. In seiner Arbeit [4] stößt er bei der Modellierung des Zusammenhanges von Neutronenstrom Φ und Temperatur t als reellwertige nichtnegative Funktionen im Inneren $Q \subset \mathbb{R}^3$ eines Kernreaktors schließlich auf das Integralgleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \int_Q G(x,y)a(t_0+t(y))\Phi(y)\,dy &= \lambda\Phi(x) \\ \int_Q G(x,y)b(t_0+t(y))\Phi(y)\,dy &= t(x) \end{aligned}\right\}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ nichtnegativ und G die Greensche Funktion ist sowie a und b bestimmte stetige und reellwertige Funktionen sind. Das Problem waren Existenzaussagen über Lösungen dieses Integralgleichungssystems. Dieses wurde 1966 von I. A. Bachtin in [1] mit seinem bemerkenswerten Existenzsatz für Halbeigenvektoren vollstetiger Abbildungen in Banach-Räumen umfassend gelöst; auch der Begriff des Halbeigenwertes wurde von ihm in dieser Arbeit geprägt.

Seien nun $(E_1, \|\cdot\|_1)$ und $(E_2, \|\cdot\|_2)$ zwei Banach-Räume. Man erklärt den Banach-Raum E als das Produkt $E = E_1 \times E_2$, versehen z.B. mit der Norm $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$.

M. Damm: (c/o Th. Riedrich) Techn. Univ., Inst. Anal., Zellescher Weg 12-14, D-01069 Dresden

ISSN 0232-2064 / $ 2.50

Wir betrachten für die Abbildung $F: E \to E$ die Gleichung

$$F(x,y) = (\lambda x, y) \qquad (x \in E_1, y \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Dabei heißen in Anlehnung zur Terminologie von Eigenwertaufgaben λ *Halbeigenwert* von F und $(x,y) \in E$ mit $x \neq 0_1$ ein zum Halbeigenwert λ gehöriger *Halbeigenvektor* von F. Das Wirken des Parameters λ auf ausschließlich dem ersten der beiden Räume motivierten also zur Silbe "Halb-". Dass der Bezug auf Eigenwerte tatsächlich gerechtfertigt ist, zeigt z.B. in Spezialfällen die Rückführung auf bekannte Eigenwertprobleme wie in Folgerung 7 unten.

Im Jahre 1970 wurde der Existenzsatz von Bachtin durch E. Schulz ([6], veröffentlicht also erst 1973) auf topologische Vektorräume erweitert. Die vorerst letzte Arbeit über Halbeigenwerte wurde 1975 von T. Riedrich mit [5] publiziert, sie enthält einen Störungssatz zur Stabilität positiver Halbeigenwerte vollstetiger Abbildungen auf topologischen Vektorräumen.

Parameterabhängige Aufgaben allgemeiner Art, etwa

$$F(x,\lambda) = 0 \qquad (x \in X, \lambda \in \Pi) \tag{2}$$

wobei X und Π (Parameterraum) Banach-Räume über $\mathbb{C}$ sein sollen, untersuchte Zeidler. Für $\lambda \in \mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ und $F \in C^2$ bewies er in [7: S. 311 f] ein bemerkenswertes hinreichendes Kriterium für Verzweigungspunkte der Lösungen von (2). Für den Bereich der Anwendungen werden jedoch konstruktive Aussagen zu Verzweigungslösungen vermisst. Nachdem bereits für nichtlineare Eigenwertprobleme als Spezialfall von (2) konstruktive Verfahren zur Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte (auf Grundlage des Satzes über implizite Funktionen) entwickelt wurden (vgl. [3]), sollte dies für die Halbeigenwertprobleme, welche ebenfalls einen Spezialfall darstellen, im Rahmen der Diplomarbeit [2] nachgeholt werden. Vorliegender Artikel ist eine Zusammenfassung der wichtigsten Resultate daraus (vgl. [2]).

Wie das Beispiel von Moskalew nahe legt, sind Halbeigenwertaufgaben unter Umständen in der Steuerungs- und Regelungstechnik von Bedeutung. Eine schwache Motivation dafür soll das folgende Beispiel liefern. Seien dazu u (Input), x (Zustand) und y (Output) Vektorfunktionen von $\mathbb{R}$ nach einem Banach-Raum X. Für ein nichtlineares Übertragungssystem

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= V(x(t), u(t)) \\ y(t) &= W(x(t), u(t)) \end{aligned}\right\}$$

ist es in der Praxis durchaus sinnvoll, die Asymptotik $y(t) \to u(t)$ (für $t \to \infty$ und $\dot{x}(t) \to 0$, $x(t) \not\to 0$) und den Ansatz $V(x,u) = \tilde{V}(x,u) - \lambda x$ zu untersuchen. Man erhält dann eine nichtlineare Halbeigenwertaufgabe.

Wir beschränken uns im Weiteren durchgehend auf reelle Banach-Räume und (im Hinblick auf Potenzreihen für die Lösungen) auf analytische und nichtlineare Abbildungen F. Wir definieren (vgl. [6]) ein spezielles Produkt, welches mit $x \in E_1$ und $y \in E_2$ erklärt wird durch

$$\lambda * (x,y) := (\lambda x, y).$$

Unser Halbeigenwertproblem (1) kann damit geschrieben werden als

$$F(x,y) = \lambda * (x,y).$$

Unter Verwendung der Komponentenabbildungen $S: E_1 \times E_2 \to E_1$ und $T: E_1 \times E_2 \to E_2$ von F lautet (1) auch

$$\left.\begin{aligned} S(x,y) &= \lambda \cdot x \\ T(x,y) &= y \end{aligned}\right\}$$

Der Hauptunterschied zu den bekannten Eigenwertaufgaben ist die offensichtliche Inkompatibilität der $*$-Multiplikation mit der den Vektorräumen zu Grunde liegenden skalaren Multiplikation (Bezeichnung mit "$\cdot$"). Die Zuordnung $\lambda \mapsto (\lambda x, y)$ ist offenbar nichtlinear in λ. Dieser Unterschied verhindert eine vollständige Übertragung der Theorie über Eigenwertaufgaben auf Halbeigenwertaufgaben. Probleme tauchen dabei bereits bei linearen Problemen auf, wie die Bemerkungen 4 und 12 unten verdeutlichen werden.

Definition 1. Es gelte $F(0_E) = 0_E = (0_1, 0_2)$. Eine Zahl $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Verzweigungswert* von (1), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Paar $((x,y),\lambda) \in E \times \mathbb{R}$ existiert mit $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ und $\|(x,y)\|_E \leq \varepsilon$ $(x \neq 0_1)$, welches (1) erfüllt. Die Paare $((x,y),\lambda)$ heißen dabei *Verzweigungslösungen.* Wir bezeichnen mit Λ die Menge aller Verzweigungswerte von (1).

Bemerkung 2. Wir untersuchen hier wegen der Existenze der trivialen Lösung und gesuchter nichttrivialer $(x,y) \in E$ ausschließlich primäre Bifurkation, d.h. Verzweigung von der trivialen Lösung.

2. Linearisierung

Analog zu Eigenwertproblemen haben wir zur Linearisierung die Fréchet-Ableitung $A = F'(0_E)$ von F an der Stelle 0_E zu bestimmen. Zusammen mit der Voraussetzung $F(0_E) = 0_E$ erhalten wir für F die Darstellung

$$F = A + R.$$

Dabei hat für R wegen der Definition der Fréchet-Ableitung

$$\lim_{(x,y)\to 0_E} \frac{R(x,y)}{\|(x,y)\|_E} = 0_E$$

zu gelten, R enthält also keine linearen Terme.

Mit dem eingeführten $*$-Produkt definieren wir

$$\Phi_\lambda := A - \lambda * I_E$$

wobei I_E die Identität auf E ist. Mit fixem $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und der Festlegung $\mu := \lambda - \lambda_0$ ist unser Halbeigenwertproblem (1) dann lokal äquivalent zu

$$\Phi_{\lambda_0}(x,y) + R(x,y) - (\mu x, 0) = 0_E. \tag{3}$$

Unter Verwendung der (partiellen) Fréchet-Ableitungen der Komponenten von F, welche wir mit $S_1 = \frac{\partial S}{\partial x}\big|_{0_E}$, $S_2 = \frac{\partial S}{\partial y}\big|_{0_E}$, $T_1 = \frac{\partial T}{\partial x}\big|_{0_E}$ und $T_2 = \frac{\partial T}{\partial y}\big|_{0_E}$ bezeichnen, sowie mit der Definition von

$$\Omega = T_2 - I_2$$

wobei $I_E = (I_1, I_2)$ ist erhalten wir für $\Phi_\lambda : E \to E$ die Darstellung

$$\Phi_\lambda = \begin{bmatrix} (S_1 - \lambda I_1) & S_2 \\ T_1 & \Omega \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2.1 Notwendiges Kriterium für Verzweigung. Ähnlich zur Spektraltheorie linearer Operatoren geben wir die folgende

Definition 3. Die Menge $\rho_h(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists\, \Phi_\lambda^{-1} \in L[E]\}$ heißt *Halbresolventenmenge* von A. Das reelle Komplement $\sigma_h(A) = \mathbb{R} \setminus \rho_h(A)$ bezeichnen wir als *Halbspektrum* von A. Die Menge

$$\sigma_{hp}(A) = \Big\{\lambda_0 \in \mathbb{R} : \exists\,(x_0, y_0) \in E\ (x_0 \neq 0_1) \text{ mit } \Phi_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0_E\Big\}$$

soll *Halbpunktspektrum* von A heißen.

Beachte, dass wir ausschließlich auf reellen Banach-Räumen E arbeiten wollen, da für $\lambda \in \mathbb{C}$ der Operator Φ_λ nicht erklärt zu sein braucht.

Bemerkung 4. Wichtig war bei der Definition von $\sigma_{hp}(A)$ die Bedingung $x_0 \neq 0_1$, da das Auftreten nicht-trivialer Lösungen $(0, y_0)$ von $\Phi_{\lambda_0}(x, y) = 0_E$, z.B. für $A = I_E$, ein Problem ist. Dies würde im Unterschied zu Eigenwertaufgaben $\rho_h(A) = \emptyset$ verursachen, da dann die Invertierbarkeit von Φ_λ nicht mehr von λ abhängt:

$$\Phi_{\lambda_0}(0, y_0) = 0_E \quad (\lambda_0 \in \mathbb{R}) \quad\Longrightarrow\quad \Phi_\lambda(0, y_0) = 0_E \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{R}.$$

Ebenso möglich ist auch der andere Grenzfall $\sigma_h(A) = \emptyset$.

Wir haben im Folgenden darauf zu achten, dass $\rho_h(A)$ und $\sigma_h(A)$ nichtleer sind; entartete Lösungen $(0, y_0)$ wie oben können dann nicht auftreten.

Satz 5 (Notwendiges Kriterium). *Sei $F : E \to E$ stetig und gelte $F(0_E) = 0_E$. Es existiere die Fréchet-Ableitung $A = F'(0_E)$. Für Λ als die Menge aller Verzweigungswerte von* (1) *gilt dann $\Lambda \subseteq \sigma_h(A)$.*

Beweis. Wir werden ihn indirekt führen, d.h. annehmen, dass $\lambda_0 \in \rho_h(A)$ für $\lambda_0 \in \Lambda$ gelte. Wegen der Linearität von $\lambda * I_E$ für festes λ ist Φ_{λ_0} die Fréchet-Ableitung des Operators $F - \lambda * I_E$ nach (x, y) an der Stelle $(0_E, \lambda_0)$. Daher ist es unser Halbeigenwertproblem (1), d.h. $F(x, y) - \lambda * (x, y) = 0_E$, welches wegen $\lambda_0 \in \rho_h(A)$ nach dem Satz über implitite Funktionen lokal um $(0_E, \lambda_0)$ stetig nach (x, y) auflösbar ist. Wegen der Existenz der trivialen Lösung und Eindeutigkeit der Auflösung folgte jedoch $(x, y) = 0_E$ für alle Lösungen von (1) mit λ aus einer gewissen Umgebung von λ_0. Das ist ein Widerspruch ∎

2.2 Ergebnisse der Linearisierung. Für eine Untersuchung von $\sigma_{hp}(A)$ bzw. von $\sigma_h(A)$ betrachten wir wegen Definition 3 die folgenden beiden Gleichungen, welche auch noch im Abschnitt 2.3 eine wichtige Rolle spielen werden:

$$\Phi_{\lambda_0}(x,y) = z \tag{5}$$

$$\Phi_{\lambda_0}(x,y) = 0_E. \tag{6}$$

Satz 6. *Es sei* $\Phi_{\lambda_0} = A - \lambda_0 * I_E$ (vgl. (4)). Falls $\Omega : E_2 \to E_2$ stetig invertierbar (also bijektiv) ist, so gelten die folgenden Aussagen:

1. Φ_{λ_0} ist genau dann invertierbar, wenn $(S_1 - \lambda_0 I_1) - S_2\Omega^{-1}T_1 : E_1 \to E_1$ invertierbar ist.

2. Wenn Φ_{λ_0} nicht invertierbar ist, gilt für alle nicht-trivialen Lösungen (x_0, y_0) der homogenen Gleichung (6) automatisch $x_0 \neq 0_1$, d.h. nicht-triviale Lösungen $(0, y_0)$ wie in Bemerkung 4 sind ausgeschlossen.

3. Es gilt $\sigma_h(A) \neq \emptyset$ und es existiert eine Zahl $r_h(A) > 0$, so dass für jedes $\lambda_0 \in \sigma_h(A)$ die Ungleichung $|\lambda_0| \leq r_h(A)$ gilt (Spektralradius). Die Neumannsche Reihe

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^{k+1}} (S_1 - S_2\Omega^{-1}T_1)^k \tag{7}$$

(für die Inverse von $(S_1 - \lambda_0 I_1) - S_2\Omega^{-1}T_1$) konvergiert genau dann, wenn $|\lambda_0| > r_h(A)$ gilt. Dabei berechnet sich $r_h(A)$ nach der Gelfand-Formel für Halbeigenwerte:

$$r_h(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(S_1 - S_2\Omega^{-1}T_1)^n\|} = \inf \sqrt[n]{\|(S_1 - S_2\Omega^{-1}T_1)^n\|}. \tag{8}$$

4. Es existiert genau eine stetige Funktion ϕ, welche für x aus einer gewissen Nullumgebung in E_1 die Gleichung $T(x, \phi(x)) = \phi(x)$ und die Bedingung $\phi(0_1) = 0_2$ erfüllt.

Beweis. 1. Für stetig invertierbares Ω besitzt Φ_{λ_0} die Faktorisierung

$$\Phi_{\lambda_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 & S_2\Omega^{-1} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}}_{=L_2} \underbrace{\begin{bmatrix} (S_1 - \lambda_0 I_1) - S_2\Omega^{-1}T_1 & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}}_{=B_2} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ \Omega^{-1}T_1 & I_2 \end{bmatrix}}_{=R_2}.$$

Da L_2 und R_2 als Abbildungen von E nach E stets invertierbar sind, ist die Invertierbarkeit von Φ_{λ_0} gleichwertig zu der von B_2. Jedoch ist B_2 invertierbar genau dann, wenn $(S_1 - \lambda_0 I_1) - S_2\Omega^{-1}T_1$ invertierbar ist.

2. Wir untersuchen die Lösungen des Gleichungssystems, welches nach Darstellung (4) gleichwertig zur homogenen Gleichung (6) ist:

$$\left.\begin{aligned} (S_1 - \lambda_0 I_1)x + S_2 y = 0_1 \\ T_1 x \Omega y = 0_2 \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Nach Voraussetzung folgt aus $(9)_2$ die Beziehung $y_0 = -\Omega^{-1}T_1 x_0$. Also würde $x_0 = 0_1$ die triviale Lösung ergeben.

3. Für die Untersuchung von $\rho_h(A)$ genügt es wegen Punkt 1 die stetige Inverse von $(S_1 - \lambda_0 I_1) - S_2\Omega^{-1}T_1$ zu betrachten. Es ist leicht nachzurechnen, dass die Reihe (7) formal diese Inverse ist. Mit $H := S_1 - S_2\Omega^{-1}T_1$ haben wir die Eigenwertaufgabe $(H - \lambda_0 I_1)$ zu untersuchen, $\sigma_h(A) \neq \emptyset$ ist damit klar. Für $\sum \lambda_0^{-k-1} H^k$ gilt als Konvergenzkriterium nach Cauchy-Hadamard zunächst $|\lambda_0| > \overline{\lim} \sqrt[n]{\|H^n\|}$, dann zeigt man sogar $\overline{\lim} \leq \inf$, d.h. $\overline{\lim} = \inf = \lim$. Es gilt also (8).

4. Folgerung aus dem Satz über implizite Funktionen ist, dass die Gleichung $T(x, y) = y$ dann die Auflösung $\phi(x) = y$ besitzt, da $\Omega = T_2 - I_2$ gerade die partielle Ableitung des Operators $(T - I_2) : E \to E_2$ nach dem zweiten Argument y darstellt. Die Halbeigenvektoren von A lauten also $(x, \phi(x))$, falls die x aus einer gewissen Nullumgebung von E_1 die Gleichung

$$S(x, \phi(x)) = \lambda \cdot x \tag{10}$$

erfüllen ∎

Folgerung 7. *Punkt* 4 *von Satz* 6 *bedeutet, dass unser Halbeigenwertproblem* (1) *unter den genannten Voraussetzungen äquivalent zum Eigenwertproblem* (10) *ist. Der Operator* $\tilde{S} : E_1 \to E_1$, *definiert durch* $\tilde{S}x = S(x, \phi(x))$, *ist stetig, da sowohl* S *als auch* ϕ *stetig sind. Darüber hinaus ist wegen* $\tilde{S}(0_1) = S(0_E) = 0_1$ *die triviale Lösung vorhanden. Die Theorie über nichtlineare Eigenwertprobleme lässt sich somit auf* (10) *anwenden.*

Deshalb haben wir uns besonders solchen Halbeigenwertaufgaben zuzuwenden, bei denen Ω kein linearer Homöomorphismus auf E_2 ist.

Satz 8. *Es sei* $\Phi_{\lambda_0} = A - \lambda_0 * I_E$. *Falls* $(S_1 - \lambda_0 I_1) : E_1 \to E_1$ *stetig invertierbar ist, so gilt:*

1. Φ_{λ_0} *ist genau dann invertierbar, wenn* $\Omega - T_1(S_1 - \lambda_0 I_1)^{-1} S_2 : E_2 \to E_2$ *invertierbar ist.*

2. *Wenn* Φ_{λ_0} *nicht invertierbar ist, gilt für die nicht-trivialen Lösungen* (x_0, y_0) *der homogenen Gleichung* (6) *die Relation* $y_0 \neq 0_2$.

Beweis. Er ist analog zum Beweis der Punkte 1 und 2 von Satz 6. Unter Punkt 1 besitzt Φ_{λ_0} hier die Darstellung $\Phi_{\lambda_0} = L_1 B_1 R_1$ mit

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} (S_1 - \lambda_0 I_1) & 0 \\ 0 & \Omega - T_1(S_1 - \lambda_0 I_1)^{-1} S_2 \end{bmatrix} \\ L_1 &= \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ T_1(S_1 - \lambda_0 I_1)^{-1} & I_2 \end{bmatrix} \\ R_1 &= \begin{bmatrix} I_1 & (S_1 - \lambda_0 I_1)^{-1} S_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für Punkt 2 folgt die Beziehung $x_0 = -(S_1 - \lambda_0 I_1)^{-1} S_2 y_0$ aus $(9)_1$. Aus der Relation $y_0 = 0_2$ würde also die triviale Lösung $(x_0, y_0) = 0_E$ folgen ∎

Hilfssatz 9. *Sei* $\dim E_1 < \infty$ *und seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *(mit* $1 \leq n \leq \dim E_1$*) verschiedene Halbeigenwerte von* A *und* (x_k, y_k) *ein zum Halbeigenwert* λ_k *gehöriger Halbeigenvektor* $(k = 1, \ldots, n)$*. Dann gilt* $\dim \operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} = n$*.*

Der Beweis ist leicht mittels vollständiger Induktion möglich. Interessant ist dabei, dass das Wirken der Halbeigenwerte ausschließlich auf E_1 dazu führt, dass keine derartige Aussage über die y_k gemacht werden kann, da für diese unter Umständen $y_1 = \ldots = y_m = 0_2 \quad (1 \leq m \leq n)$ gilt.

Ein brauchbarer Zusammenhang zwischen dem betragsmäßig größten Eigenwert und dem betragsmäßig größten Halbeigenwert von A lässt sich deshalb nicht herstellen, weil dieser offenbar spezielle Voraussetzungen über S_1, S_2 und T_1, T_2 (also über A) erfordern würde.

2.3 Anwendung der Fredholm-Alternative. Sei A vollstetig. Für feste, nichtverschwindende und endliche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der lineare und stetige Operator $\lambda * I_E : E \to E$ bijektiv. Der Satz von Nikolski (1943) besagt, dass ein Operator genau dann der Fredholm-Alternative genügt, wenn er eine Darstellung als Summe eines vollstetigen und eines stetig invertierbaren Operators besitzt. Deshalb genügen für $\lambda \neq 0$ und $|\lambda| < \infty$ alle Operatoren $\Phi_\lambda = A - \lambda * I_E$ der Fredholm-Alternative.

Mit $\Phi_\lambda : E \to E$ genügen auch $(S_1 - \lambda I_1) : E_1 \to E_1$ und $\Omega : E_2 \to E_2$ der Fredholm-Alternative, da sie sich stetig (mittels geeigneter Projektionen) aus Φ_λ gewinnen lassen. Die Fredholm-Alternative besagt in unserem Fall, dass für $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

- entweder (5) für beliebige $z \in E$ eindeutig und stetig lösbar ist, also eine stetige Inverse von Φ_{λ_0} existiert (d.h. $\lambda_0 \in \rho_h(A)$)

oder

- (6) eine nichtverschwindende und endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen (x_0, y_0) besitzt (d.h. $\lambda_0 \in \sigma_{hp}(A)$).

Folgerung 10. *Da nach der Fredholm-Alternative für vollstetiges* A *die Relation* $\sigma_h(A) \subseteq \{0\} \cup \sigma_{hp}(A)$ *gilt, lautet die Aussage von Satz* 5 *dann*

$$\Lambda \subseteq \{0\} \cup \sigma_{hp}(A).$$

Im Fall $\dim E_1 < \infty$ *gilt nach Hilfssatz* 9 *außerdem* $\operatorname{card} \sigma_{hp}(A) \leq \dim E_1$*.*

Wir betrachten nun den Nullraum (Kern) und den Wertebereich von Φ_{λ_0}:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) &:= \left\{(x_0, y_0) \in E : \Phi_{\lambda_0}(x_0, y_0) = 0_E\right\} \\ \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0}) &:= \Phi_{\lambda_0}[E]. \end{aligned}$$

Analog zu den Eigenwerten geben wir die folgenden Begriffsdefinitionen:

Definition 11. Es bezeichnen $\gamma(\lambda_0) := \dim \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ die geometrische und $\alpha(\lambda_0) := \dim \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}^k)$ die algebraische Vielfachheit des Halbeigenwertes λ_0 von A. Falls eine natürliche Zahl $\nu < \infty$ existiert mit $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}^{\nu-1}) \subseteq \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}^{\nu}) = \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}^{\nu+1})$, so heißt diese der *Index* des Halbeigenwertes λ_0 von A und wir bezeichnen diesen mit $\nu(\lambda_0)$.

Sei $\lambda_0 \in \sigma_{hp}(A)$. Die Fredholm-Alternative liefert

a) $1 \leq \gamma(\lambda_0) < \infty$
b) $\operatorname{codim} \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0}) = \gamma(\lambda_0)$
c) $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ ist abgeschlossen.

Deshalb existieren abgeschlossene, nichtleere und nichttriviale Mengen $M \subset E$ und $N \subset E$, so dass für E die folgenden Darstellungen als topologische direkte Summen existieren:

$$E = \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) \oplus N$$
$$E = M \oplus \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0}).$$

Sei λ_0 von beliebigem Index $\nu(\lambda_0) < \infty$ und seien durch $\{z_1, \ldots, z_{\gamma(\lambda_0)}\}$ eine Basis von M bzw. durch $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_{\gamma(\lambda_0)}, y_{\gamma(\lambda_0)})\}$ eine Basis von $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ gegeben. Eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach besagt, dass zu jedem Vektor $x_0 \in E$ und jedem abgeschlossenen linearen Teilraum $X \subset E$ mit $x_0 \notin X$ ein lineares stetiges Funktional $f \in E'$ existiert mit $f(x_0) = 1$ und $f(y) = 0 \;\; (y \in X)$. Deshalb existiert zu den (x_k, y_k) ein System $\{f_1, \ldots, f_{\gamma(\lambda_0)}\} \subset E'$ mit $f_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$ und $f_k(x, y) = 0$ für $(x, y) \in N \;\; (k = 1, \ldots, \gamma(\lambda_0))$. Diese f_k sind nur auf dem endlich-dimensionalen Raum $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ zu bestimmen. Wir definieren damit $P : E \to \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ durch

$$P(x, y) = \sum_{k=1}^{\gamma(\lambda_0)} f_k(x, y) \cdot (x_k, y_k). \tag{11}$$

Bemerkung 12. Der Projektor P und der lineare Operator A kommutieren im Unterschied zu Eigenwerten im allgemeinen nicht miteinander, d.h. im Allgemeinen ist $AP \neq PA$.

Die Einschränkung $\hat{\Phi}_{\lambda_0}$ von Φ_{λ_0} auf seinen Wertebereich $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ ist ein linearer Homöomorphismus, welchen wir nun auf ganz E fortsetzen wollen. Dazu definieren wir

$$\bar{\Phi}_{\lambda_0}(x, y) := \Phi_{\lambda_0}(x, y) + \sum_{k=1}^{\gamma(\lambda_0)} f_k(x, y) \cdot z_k.$$

Das Schmidtsche Lemma liefert, dass für vollstetiges A die stetige Inverse $\bar{\Gamma} := \bar{\Phi}_{\lambda_0}^{-1}$ existiert. Diese Inverse heißt allgemein Pseudoresolvente von A, hier wollen wir sie *Pseudohalbresolvente* von A nennen.

Die Räume M und N sind als topologische Komplemente nicht eindeutig bestimmt, wir können im Allgemeinen auch nicht $M = \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ bzw. $N = \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ wählen. Die bekannte Tatsache, dass sich für den Fredholm-Operator Φ_{λ_0} die Teilräume M und N genau dann als Nullraum bzw. Wertebereich wählen lassen, wenn $\nu(\lambda_0) = 1$ ist, lässt sich jedoch ohne Probleme auf Halbeigenwerte übertragen (wir benötigen dazu lediglich $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) = \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}^2)$, nicht aber die spezielle Gestalt von Φ_{λ_0}). Wir erhalten für $\nu(\lambda_0) = 1$ also

$$E = \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) \oplus \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0}). \tag{12}$$

Im diesem Falle können wir sogar $z_k = (x_k, y_k)$ wählen und es gilt $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0}) = (I_E - P)[E]$. Es gelten dann außerdem die beiden folgenden wichtigen Hilfssätze.

Hilfssatz 13. *Sei* $(x_0, y_0) \in \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ *mit* $x_0 \neq 0_1$ *und sei* $\nu(\lambda_0) = 1$. *Dann gilt* $(x_0, 0) \notin \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$.

Beweis. Aus $(x_0, y_0) \in \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ folgt also $\Phi_{\lambda_0}(x_0, 0) + \Phi_{\lambda_0}(0, y_0) = 0_E$ wegen der Linearität von Φ_{λ_0}. Angenommen, es wäre $(x_0, 0) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$. Wegen (12) wäre dann $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) \cap \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0}) = \{0_E\}$, d.h. $\Phi_{\lambda_0}(x_0, 0) \neq 0_E$. Wegen der Injektivität von Φ_{λ_0} auf $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ würde dann $(x_0, 0) + (0, y_0) = 0_E$ folgen, was ein Widerspruch ist ∎

Hilfssatz 14. *Sei* $(\xi, \eta) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ *mit* $\xi \neq 0_1$ *und sei* $\nu(\lambda_0) = 1$. *Dann gilt* $(\xi, 0) \notin \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$.

Beweis. Wegen $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) = \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}^2)$ besitzt (ξ, η) ein Urbild $(u, v) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$, d.h. $(\xi, \eta) = \Phi_{\lambda_0}(u, v)$. Weiterhin ist $\Phi_{\lambda_0}(\xi, \eta) = \Phi_{\lambda_0}(\xi, 0) + \Phi_{\lambda_0}(0, \eta) = \Phi_{\lambda_0}^2(u, v)$. Wäre $(\xi, 0) \in \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$, dann wäre $\Phi_{\lambda_0}^2(u, v) = \Phi_{\lambda_0}(0, \eta) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$. Wieder wegen der Injektivität von Φ_{λ_0} auf $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ folgte $\Phi_{\lambda_0}(u, v) = (0, \eta)$, also $\xi = 0_1$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $\xi \neq 0_1$ ist ∎

3. Konstruktion der Verzweigungslösungen

3.1 Gewinnung von Verzweigungsgleichungen. Aus (3) folgt für $\lambda_0 \in \sigma_{hp}(A)$ von zunächst beliebigem Index $\nu(\lambda_0) < \infty$ und $\mu = \lambda - \lambda_0$ mit Anwendung von $\bar{\Gamma}$ (beachte $(x_k, y_k) = \bar{\Gamma} z_k$)

$$(I_E - P)(x, y) + \bar{\Gamma}\{R(x, y) - (\mu x, 0)\} = 0_E. \tag{13}$$

Für vollstetiges A erfüllen die lokalen Verzweigungslösungen $((x, y), \lambda) \in E \times \mathbb{R}$ von (1) um den Punkt $(0_E, \lambda_0)$ (falls sie existieren) die Gleichung (13). Wegen $\gamma(\lambda_0) < \infty$ können wir durch $s_k := f_k(x, y) \quad (k = 1, \ldots, \gamma(\lambda_0))$ *Verzweigungsparameter* $s_k \in \mathbb{R}$ einführen, im Falle $\nu(\lambda_0) = 1$ gestatten sie wegen (12) und (11) für jedes $(x, y) \in E$ die eindeutige Darstellung

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\gamma(\lambda_0)} s_k \cdot (x_k, y_k) + (u, v) \qquad \big((u, v) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})\big).$$

Dies gestattet uns einen Rückzug auf $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ und liefert den folgenden

Satz 15. *Sei* $A = F'(0_E)$ *vollstetig und* $\lambda_0 \in \sigma_{hp}(A)$ *vom Index* $\nu(\lambda_0) = 1$. *Die Gleichung* (13) *besitzt dann lokal um* $(0_E, \lambda_0)$ *eine eindeutige und stetige Auflösung* $\phi(\mu, s_1, \ldots, s_{\gamma(\lambda_0)}) = (x, y)$, *für welche* $\phi(0, 0, \ldots, 0) = 0_E$ *gilt.*

Beweis. Wir betrachten den Hilfsoperator

$$\Psi\big((x, y), \mu, s_1, \ldots, s_{\gamma(\lambda_0)}\big) = (I_E - P)(x, y) + \bar{\Gamma}\{R(x, y) - (\mu x, 0)\}$$

und haben die Gleichung

$$\Psi((x, y), \mu, s_1, \ldots, s_{\gamma(\lambda_0)}) = 0_E$$

nach (x, y) aufzulösen. Dabei hat $(x, y) = 0_E$ unmittelbar $s_k = 0$ und $\Psi(0_E, 0, 0, \ldots, 0) = 0_E$ zur Folge. Beim Term $\bar{\Gamma}\{\ldots\}$ verschwindet die innere Ableitung, da

a) $R'(0_E) = 0$ und
b) die Zuordnung $(x, y) \mapsto (\mu x, 0)$ linear ist (für festes $\mu \in \mathbb{R}$).

Daher lautet die partielle Ableitung nach den abhängigen Größen

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial(x,y)}\right|_{(0_E,0,0,\ldots,0)} = (I_E - P).$$

Da wir uns auf $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ beschränken können, ist die Bijektivität von $(I_E - P)$ klar, weil wegen $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ nur die Identität auf $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ verbleibt. Der Rest folgt mittels des Satzes über implizite Funktionen: es existiert ein eindeutiges $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\gamma(\lambda_0)} \supset U \to V \subset E$ mit $(x, y) = \phi(\mu, s_1, \ldots, s_{\gamma(\lambda_0)})$ und $\phi(0, 0, \ldots, 0) = 0_E$ ∎

Die anschließende Anwendung der Funktionale f_k $(k = 1, \ldots, \gamma(\lambda_0))$ auf die gewonnene Auflösung liefert ein Gleichungssystem mit $\gamma(\lambda_0)$ Gleichungen für $\gamma(\lambda_0) + 1$ Unbekannte (nämlich μ und die s_k). Die enthaltenen Gleichungen heißen *Verzweigungsgleichungen* von Ljapunov-Schmidt, die Verzweigungslösungen von (1) entsprechen genau den Lösungen dieses endlich-dimensionalen Gleichungssystems.

Über das Ergebnis von Satz 15 hinaus beabsichtigen wir eine Auflösung des Problems nach $((x, y), \mu)$. Dazu haben wir eine Darstellung für μ nur als Funktion von den s_k zu finden. Vor großen Problemen stehen wir im Fall $\gamma(\lambda_0) > 1$, wenn wir weiter den Satz über implizite Funktionen verwenden wollen. Deshalb im Folgenden die Einschränkung auf $\gamma(\lambda_0) = 1$, d.h. (mit Berücksichtigung von $\nu(\lambda_0) = 1$) auf $\alpha(\lambda_0) = 1$.

3.2 Hinreichende Bedingung für Verzweigung und Lösungsdarstellung im algebraisch einfachen Fall. Für den Beweis des Hauptsatzes 17 benötigen wir den folgenden

Hilfssatz 16. *Sei A vollstetig und $\lambda_0 \in \sigma_{hp}(A)$ $(\lambda_0 \neq 0)$ ein Verzweigungswert mit $\gamma(\lambda_0) = 1$. Sei $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) = \mathrm{lin}\{(x_1, y_1)\}$. Vorausgesetzt, es existieren Verzweigungslösungen $((x, y), \lambda) = ((x, y)(\lambda), \lambda)$ von (1) um $(0_E, 0)$ mit stetiger Abhängigkeit von $(x, y) \in E$ von $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle hinreichend kleinen $\delta > 0$*

$$\inf_{|\lambda-\lambda_0|\leq\delta} \mathrm{dist}\left(\frac{(x,y)(\lambda)}{\|(x,y)(\lambda)\|_E}, \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})\right) = 0 \tag{14}$$

mit dem durch $\mathrm{dist}\,(p, M) = \inf_{z\in M} \|p - z\|_E$ *erklärten Punkt-Menge-Abstand.*

Beweis. Für genügend kleine Umgebungen von $(0_E, 0)$ gilt $(x, y) \to 0_E$ genau dann, wenn $\lambda \to \lambda_0$ konvergiert. Wir betrachten eine Folge $\{(x^{(n)}, y^{(n)})\}$ von Halbeigenvektoren von F und zugehörige $\{\lambda^{(n)}\}$ (mit $(x^{(n)}, y^{(n)}) \to 0_E$ und $\lambda^{(n)} \to \lambda_0$ für $n \to \infty$). Da A vollstetig ist, können wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Folge so wählen, dass

$$\frac{A(x^{(n)}, y^{(n)})}{\|(x^{(n)}, y^{(n)})\|_E} \to (u_0, v_0) \qquad (u_0 \neq 0_1)$$

gilt. Wir finden stets ein $(u, v) \in E$, definiert durch $(u_0, v_0) = \lambda_0 * (u, v)$. Wegen

$$\frac{\lambda^{(n)} * (x^{(n)}, y^{(n)})}{\|(x^{(n)}, y^{(n)})\|_E} - \lambda^{(n)} * (u, v) = \underbrace{\frac{R(x^{(n)}, y^{(n)})}{\|(x^{(n)}, y^{(n)})\|_E}}_{\to 0_E} + \underbrace{\frac{A(x^{(n)}, y^{(n)})}{\|(x^{(n)}, y^{(n)})\|_E} - \lambda^{(n)} * (u, v)}_{\to 0_E}$$

und der Stetigkeit der $*$-Multiplikation haben wir also für $n \to \infty$ die Konvergenz

$$\frac{(x^{(n)}, y^{(n)})}{\|(x^{(n)}, y^{(n)})\|_E} \to (u, v).$$

Aus der Stetigkeit von A folgt für (u, v) außerdem $A(u, v) = \lambda_0 * (u, v)$, daher ist also $(u, v) \in \operatorname{lin}\{(x_1, y_1)\}$ (außerdem sogar $\|(u, v)\|_E = 1$) ∎

Wenn F über die Differenzierbarkeit hinaus sogar analytisch in einer gewissen Umgebung von 0_E ist, so konvergiert die folgende Reihe gleichmäßig für (x, y) aus einer gewissen Umgebung des Nullpunktes:

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(x, y)^k. \tag{15}$$

Dabei ist $(x, y) \in E = E_1 \times E_2$ und die $M_k : E \times \ldots \times E \to E$ sind k-fach lineare, stetige und symmetrische Operatoren (so genannte Potenzoperatoren, die obige Schreibweise der Argumente ist symbolisch), es gilt $M_k = \frac{1}{k!} F^{(k)}(0_E)$ (Taylor-Entwicklung).

Satz 17. *Sei $F : E \to E$ stetig und analytisch in einer gewissen offenen Umgebung von 0_E. Es gelte $F(0_E) = 0_E$ und die Fréchet-Ableitung $A = F'(0_E)$ sei vollstetig. Falls für $\lambda_0 \in \sigma_{hp}(A)$ die Bedingungen $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0}) = \operatorname{lin}\{(x_1, y_1)\}$ (mit $x_1 \neq 0_1$) und $\alpha(\lambda_0) = 1$ gelten, dann folgt $\lambda_0 \in \Lambda$ und es existieren Zahlen $\mu_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ und Elemente $(\xi_k, \eta_k) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ $(k = 2, 3, \ldots)$, so dass Verzweigungslösungen $((x, y), \lambda)$ der Aufgabe* (1) *existieren, für die die folgenden für $|s| < \mu_0$ gleichmäßig konvergenten Reihen gelten:*

$$(x, y)(s) = s \cdot (x_1, y_1) + \sum_{k=2}^{\infty} s^k \cdot (\xi_k, \eta_k) \tag{16}$$

$$\lambda(s) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mu_k \tag{17}$$

Beweis. Die lokalen Verzweigungsgleichungen erfüllen die Gleichung (13), welche mit $s := f_1(x, y)$ und $P(x, y) = s \cdot (x_1, y_1)$ lautet

$$(x, y) = s \cdot (x_1, y_1) - \bar{\Gamma}\{R(x, y) - (\mu x, 0)\}. \tag{18}$$

Es sind die Voraussetzungen von Satz 15 erfüllt. Deshalb ist (18) nach (x, y) nur als Funktion von $\mu = \lambda - \lambda_0$ und s auflösbar. Im Beweis von Satz 15 liefert der Satz über implizite Funktionen nun sogar die Analytizität der Auflösung, d.h.

$$(x, y) = \phi(\mu, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} s^k \mu^l x_{kl} = x_{00} + s x_{10} + \mu x_{01} + \mu s x_{11} + \ldots \tag{19}$$

mit gewissen $x_{kl} \in E_1 \times E_2$. Das Absolutglied x_{00} verschwindet, da $(x, y) = 0_E$ und $s = 0$ für $\mu = 0$ zu gelten hat. Wir benutzen nun wesentlich Formel (12), d.h. jedes $(x, y) \in E$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $(x, y) = s \cdot (x_1, y_1) + (u, v)$ mit $(u, v) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$. Da also genau dann $(x, y) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ ist, wenn $s = 0$ gilt und da die triviale Lösung bereits in $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ liegt, gilt $s = 0$ genau dann, wenn $(x, y) = 0_E$ ist. Alle Terme von (19) müssen s enthalten, d.h. $x_{0l} = 0_E \quad (l \geq 1)$. Außerdem gilt auch $(x, y) = 0_E$ genau dann, wenn $\mu = 0$ ist.

Der Hilfssatz 16 liefert $x_{10} = (x_1, y_1)$, da $\bar{\Gamma}\{\ldots\} \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ wegen (14) keine bezüglich s linearen Terme enthalten kann.

Da der nichtlineare Operator R von μ unabhängig ist, enthalten alle von (19) noch verbleibenden Summanden höchstens den Faktor μ. Das Einsetzen von $(x, y) = s \cdot (x_1, y_1) + \ldots$ in (18) ergibt außerdem für den Reihenanfang

$$(x, y) = s \cdot (x_1, y_1) + \mu s \bar{\Gamma}(x_1, 0) - \bar{\Gamma} R(s \cdot (x_1, y_1)) + \ldots$$

Wegen (15) gilt

$$R = \sum_{k=2}^{\infty} M_k, \qquad \text{also} \quad \bar{\Gamma} R(s \cdot (x_1, y_1)) = O(s^2) = s\, O(s).$$

Daher erhalten wir schließlich für (19) die Darstellung

$$(x, y) = s \cdot (x_1, y_1) + \mu s \bar{\Gamma}(x_1, 0) + s\, O(s) + \mu s\, O(s).$$

Die Anwendung von $f_1 \in E'$ und anschließende Division durch $s \neq 0$ ergibt

$$0 = \mu f_1 \bar{\Gamma}(x_1, 0) + O(s) + \mu\, O(s). \tag{20}$$

Dies ist ein impliziter Zusammenhang von μ und s. Nach dem Satz über implizite Funktionen lautet die Bedingung für die Auflösung nach μ (Ableitung nach μ bei $(\mu, s) = (0, 0)$) gerade $f_1 \bar{\Gamma}(x_1, 0) \neq 0$, also $\bar{\Gamma}(x_1, 0) \notin \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$. Da die Pseudohalbresolvente $\bar{\Gamma}$ jedoch ein linearer Homöomorphismus auf $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ ist, also $\bar{\Gamma}(x_1, 0) \notin \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ äquivalent zu $(x_1, 0) \notin \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ ist, liefert Hilfssatz 13 die benötigte Bedingung.

Mit der Auflösung von (20) nach μ ist also (18) sogar als Funktion von s nach $((x, y), \mu)$ auflösbar und es gelten wegen Analytizität die Reihen (16) und (17), die Absolutglieder verschwinden, da $s = 0$ äquivalent zu $((x, y), \mu) = (0_E, 0)$ ist. Die (ξ_k, η_k) liegen dabei sämtlich in $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$, da $\sum_{k=2}^{\infty} s^k \cdot (\xi_k, \eta_k) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ für alle s mit $|s| < \mu_0$ (Konstante $\mu_0 > 0$ aus dem Satz über implizite Funktionen) zu gelten hat.

Da die Reihen also insbesondere auch für $s \neq 0$ (also $(x, y) \neq 0_E$) gelten, haben wir auf konstruktivem Wege so auch $\lambda_0 \in \Lambda$ bewiesen ∎

Über die hinreichende Bedingung von Satz 17 hinaus gilt der

Satz 18 (Hinreichende Bedingung). *Sei F stetig, es gelte $F(0_E) = 0_E$, die Fréchet-Ableitung $A = F'(0_E)$ existiere und sei vollstetig. Für $\lambda_0 \in \sigma_{hp}(A)$ gelte $\alpha(\lambda_0) = 1$. Dann ist $\lambda_0 \in \Lambda$.*

Beweisidee (Uniformisierung der Verzweigungslösungen). Man benutzt den Ansatz ∎

$$(x, y) = t \cdot (x_1, y_1) + t \cdot (\xi, \eta) \qquad \big((\xi, \eta) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})\big)$$

und betrachtet (vgl. die Darstellung (3) des Halbeigenwertproblems) für den Hilfsoperator

$$U((\xi,\eta),\mu,t) = \begin{cases} \Phi_{\lambda_0}(\xi,\eta) - (\mu(x_1+\xi),0) - \frac{1}{t}R\big(t\cdot(x_1,y_1)+t\cdot(\xi,\eta)\big) & \text{für } t\neq 0 \\ \Phi_{\lambda_0}(\xi,\eta) - (\mu(x_1+\xi),0) & \text{für } t=0 \end{cases}$$

die lokale Auflösbarkeit der Gleichung $U((\xi,\eta),\mu,t) = 0_E$. Man hat zunächst die Stetigkeit der Fréchet-Ableitung nach $((\xi,\eta),\mu)$ für $((\xi_0,\eta_0),\mu_0,t_0)$ aus einer offenen Umgebung von $(0_E,0,0)$ zu zeigen. Abschließend verwendet man eine spezielle Variante des Satzes über implizite Funktionen für den stetigen Fall. Die Ableitungen mit dem Argument $((h_1,h_2),\delta) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0}) \times \mathbb{R}$ lauten $\Phi_{\lambda_0}(h_1,h_2) - (\delta x_1, 0)$ an der Stelle $(0_E,0,0)$ und

$$\Phi_{\lambda_0}(h_1,h_2) - (\mu_0 h_1 + \delta x_1 + \delta\xi_0, 0) + \frac{1}{t_0} dR$$

mit

$$dR = R\big(t_0\cdot(x_1+\xi_0+h_1, y_1+\eta_0+h_2)\big) - R\big(t_0\cdot(x_1+\xi_0, y_1+\eta_0)\big)$$

an der Stelle $((\xi_0,\eta_0),\mu_0,t_0)$. Interessant ist lediglich die Stetigkeit bei $(0_E,0,0)$ selbst. Dazu haben wir

$$\| -(\mu_0 h_1 + \delta\xi_0, 0) + \tfrac{1}{t_0} dR\|_E \to 0 \qquad \text{für } ((\xi_0,\eta_0),\mu_0,t_0) \to (0_E,0,0)$$

zu zeigen. Für den für Halbeigenwerte spezifischen Term $-(\mu_0 h_1 + \delta\xi_0, 0)$ ist leicht einzusehen, dass er verschwindet.

3.3 Bestimmung der Reihenkoeffizienten. Es sollen die Voraussetzungen von Satz 17 gelten. Wir setzen (15) zusammen mit den Reihen (16) und (17) in die Gleichung (3) ein, welche bekanntlich lokal um die Verzweigungsstelle äquivalent zum gestellten Problem (1) ist. Wir erhalten nach Koeffizientenvergleich nacheinander die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda_0}(\xi_2,\eta_2) + M_2(x_1,y_1)^2 &= (\mu_1 x_1, 0) \\ \Phi_{\lambda_0}(\xi_3,\eta_3) + M_3(x_1,y_1)^3 &= (\mu_1\xi_2 + \mu_2 x_1, 0) \\ \Phi_{\lambda_0}(\xi_4,\eta_4) + M_2(\xi_2,\eta_2)^2 + M_4(x_1,y_1)^4 &= (\mu_1\xi_3 + \mu_2\xi_2 + \mu_3 x_1, 0) \\ \Phi_{\lambda_0}(\xi_5,\eta_5) + M_5(x_1,y_1)^5 &= (\mu_1\xi_4 + \mu_2\xi_3 + \mu_3\xi_2 + \mu_4 x_1, 0) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{21}$$

Wenn $k = 2,3,\dots$ Teiler von $j = 2,3,\dots$ ist, taucht in der Gleichung mit $\Phi_{\lambda_0}(\xi_j,\eta_j)$ und der rechten Seite $\sum_{i=1}^{j-1}(\mu_i\xi_{j-i},0)$ neben $M_j(x_1,y_1)^j$ der Operator M_k mit dem k-fachen Argument (ξ_p,η_p) auf, wobei $pk = j$ gilt. Da mit jeder Gleichung in (21) zwei neue Unbekannte hinzukommen, haben wir stets doppelt so viele Unbekannte zu bestimmen, wie Gleichungen zur Verfügung stehen.

Wir benutzen nun die Projektionen $P : E \to \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$, analog (11) definiert durch $P(x,y) = f_1(x,y)\cdot(x_1,y_1)$, und $Q : E \to \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$, definiert durch $Q = I_E - P$.

Außerdem verwenden wir $\hat{\Gamma} = \hat{\Phi}_{\lambda_0}^{-1}$, auch aufzufassen als Einschränkung von $\bar{\Gamma}$ auf $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$. Unter Verwendung von P und Q erhalten wir aus jeder Gleichung von (21) jeweils eine Gleichung in $\mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ und $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ (beachte dass $P\Phi_{\lambda_0}(\xi_j, \eta_j) = 0_E$ und $Q\Phi_{\lambda_0}(\xi_j, \eta_j) = \Phi_{\lambda_0}(\xi_j, \eta_j)$ ist), wobei wir auf die Gleichungen in $\mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ zusätzlich $\hat{\Gamma}$ anwenden können. Insgesamt erhalten wir so

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{f_1 M_2(x_1, y_1)^2}{f_1(x_1, 0)} \\
\mu_2 &= \frac{f_1 M_3(x_1, y_1)^3 - \mu_1 f_1(\xi_2, 0)}{f_1(x_1, 0)} \\
\mu_3 &= \frac{f_1\big(M_4(x_1, y_1)^4 + M_2(\xi_2, \eta_2)^2\big) - f_1(\mu_1\xi_3 + \mu_2\xi_2, 0)}{f_1(x_1, 0)} \\
\mu_4 &= \frac{f_1 M_5(x_1, y_1)^5 - f_1\big(\mu_1\xi_4 + \mu_2\xi_3 + \mu_3\xi_2, 0\big)}{f_1(x_1, 0)} \\
\mu_5 &= \frac{f_1\big(M_6(x_1, y_1)^6 + M_3(\xi_2, \eta_2)^3 + M_2(\xi_3, \eta_3)^2\big)}{f_1(x_1, 0)} \\
&\quad - \frac{f_1\big(\mu_1\xi_5 + \mu_2\xi_4 + \mu_3\xi_3 + \mu_4\xi_2, 0\big)}{f_1(x_1, 0)} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

(wegen Hilfssatz 13 ist tatsächlich $f_1(x_1, 0) \neq 0$) und

$$\begin{aligned}
(\xi_2, \eta_2) &= \hat{\Gamma}Q(\mu_1 x_1, 0) - \hat{\Gamma}QM_2(x_1, y_1)^2 \\
(\xi_3, \eta_3) &= \hat{\Gamma}Q(\mu_1\xi_2 + \mu_2 x_1, 0) - \hat{\Gamma}QM_3(x_1, y_1)^3 \\
(\xi_4, \eta_4) &= \hat{\Gamma}Q(\mu_1\xi_3 + \mu_2\xi_2 + \mu_3 x_1, 0) - \hat{\Gamma}Q\big(M_4(x_1, y_1)^4 + M_2(\xi_2, \eta_2)^2\big) \\
(\xi_5, \eta_5) &= \hat{\Gamma}Q(\mu_1\xi_4 + \mu_2\xi_3 + \mu_3\xi_2 + \mu_4 x_1, 0) - \hat{\Gamma}QM_5(x_1, y_1)^5 \\
(\xi_6, \eta_6) &= \hat{\Gamma}Q(\mu_1\xi_5 + \mu_2\xi_4 + \mu_3\xi_3 + \mu_4\xi_2 + \mu_5 x_1, 0) \\
&\quad - \hat{\Gamma}Q\big(M_6(x_1, y_1)^6 + M_3(\xi_2, \eta_2)^3 + M_2(\xi_3, \eta_3)^2\big) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Ausgehend von (x_1, y_1) und μ_1 können nach den obigen Formeln schrittweise alle Koeffizienten $(\xi_k, \eta_k) \in \mathcal{R}(\Phi_{\lambda_0})$ und $\mu_k \in \mathbb{R}$ $(k \geq 2)$ in eindeutiger Weise aus ihren Vorgängern bestimmt werden. Für Koeffizienten höherer Ordnung als oben angegeben geht man sukzessive vor. Eine weitere Vereinfachung der Bestimmungsformeln, etwa rekursiv durch Termersetzungen wie bei den Eigenwertaufgaben (vgl. [3: S. 85 f]) ist hier problematisch. Das liegt vor allem daran, dass über die Lage der hier auftauchenden Vektoren $(\xi_k, 0)$ nicht genügend bekannt ist. Wegen Hilfssatz 14 wissen wir lediglich, dass $(\xi_k, 0) \notin \mathcal{N}(\Phi_{\lambda_0})$ ist.

References

[1] Bachtin, I. A.: *Über stetige Zweige von Halbeigenvektoren nichtlinearer Operatoren* (in Russisch). Izv. Akad. Nauk SSSR 30 (1966), 1017 – 1026.

[2] Damm, M.: *Konstruktive Verzweigungstheorie für Halbeigenwerte.* Diplomarbeit. Dresden: Techn. Univ. 1999 (unveröffentlicht).

[3] Göpfert, A. and T. Riedrich: *Funktionalanalysis* (Reihe Math. für Ing. und Naturwiss.: Band 22), 4. Auflage. Stuttgart - Leipzig: Teubner Verlagsges. 1994.

[4] Moskalew, O. B.: *Kritische Zustände eines Reaktors bei nichtlinearem Zusammenhang zwischen Temperatur und Neutronenstrom* (in Russisch). Žurn. vyčisl. matem. i matem. fiziki 3 (1963), 327 – 335.

[5] Riedrich, T.: *Über die Stabilität positiver Halbeigenwerte kompakter Abbildungen.* Beitr. Numer. Math. 4 (1975), 179 – 190.

[6] Schulz, E.: *Existenzsätze für Halbeigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen.* Math. Nachr. 57 (1973), 183 – 199.

[7] Zeidler, E.: *Applied Functional Analysis - Main Principles and their Applications* (Appl. Math. Sci.: Vol. 109). New York et al.: Springer-Verlag 1995.

Received 06.04.1999; in revised form 07.10.99