А. А. Бондаренко

О ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПОДГРУППАХ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИХ ГРУППУ КВАТЕРНИОНОВ

§1. Введение

Пусть F– поле нечетной характеристики и $a, b \in F^* = F \backslash \{0\}$. Обозначим через D алгебру кватернионов $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ над полем F с образующими $1, i, j, k : i^2 = a,\ j^2 = b,\ ij = -ji = k$. Будем считать, что алгебра D является алгеброй с делением, то есть телом. Как известно, это означает, что гомоморфизм нормы $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{D/F}$, определенный по правилу $\mathcal{N}(q) = q\overline{q}$, где q, $\overline{q}$ – взаимно сопряженные кватернионы, удовлетворяет условию : $\mathcal{N}(q) = 0$ тогда и только тогда, когда $q = 0$.

Пусть K – квадратичное расширение $F(\sqrt{a})$ поля F. Произвольный кватернион q может быть представлен в виде линейной комбинации $q = \xi + i\eta$, где $\xi, \eta \in K$ и $j\eta = \overline{\eta}j$, а следовательно, и в виде матрицы

$$[q] = \begin{pmatrix} \xi & b\overline{\eta} \\ \eta & \overline{\xi} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Нашей задачей является изучение решетки

$$\mathrm{Lat}\,(G_0, G) = \{H : G_0 \leqslant H \leqslant G\} \qquad (2)$$

в ситуации, когда $G = GL(2, K)$ – полная линейная группа степени 2 над полем $K = F(\sqrt{a})$, а $G_0 = [D^*]$ – указанное матричное представление (1) группы всех ненулевых кватернионов.

Несмотря на то, что группа G_0 неабелева, данное исследование лежит в русле работ [11, 8, 9, 12, 4, 5, 6] З. И. Боревича, В. А. Койбаева, и других авторов, посвященных изучению решетки подгрупп, содержащих нерасщепимый максимальный тор, в полной линейной группе над бесконечным полем. В частности, приводится полное описание решетки (2), когда $D = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ – алгебра гамильтоновых кватернионов.

Пусть G – группа, G_0 – ее фиксированная подгруппа. Согласно общей идеологии, предложенной З. И. Боревичем и развитой в работах [3, 7, 10, 8] и др., решетку $\mathrm{Lat}\,(G, G_0)$ можно рассматривать как *граф нормальности*, вершины которого соответствуют всем промежуточным подгруппам $H, G_0 \leqslant H \leqslant G$, а ориентированные ребра – отношению нормальности: $H_1 \trianglelefteq H_2$. Связные компоненты этого графа получили наименование *гирлянд*. Таким образом, изучение решетки сводится к нахождению множества всех гирлянд и затем описанию каждой из них в отдельности [8]. Среди всех гирлянд естественно выделяются верхняя гирлянда Γ^* – условием $G \in \Gamma^*$ – и нижняя гирлянда Γ_* – условием $G_0 \in \Gamma_*$. Обе они допускают лаконичное описание в достаточно общей ситуации, например, когда $G_0 = [K^*]$ – нерасщепимый максимальный тор в полной линейной группе $G = GL(n, F)$ над полем:

$$\Gamma^* = \mathrm{Lat}\,(G_0^G, G), \tag{3}$$

$$\Gamma_* = \mathrm{Lat}\,(G_0, N_G(G_0)), \tag{4}$$

где $N_G(G_0)$ – нормализатор, а G_0^G – нормальное замыкание тора в группе G. В действительности, формула (4) верна для любой нецентральной подгруппы G_0 группы $GL(n, F)$, если только $F \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ или $n \neq 2$. При этом

$$\begin{gathered} N_G(G_0) = G_0 \leftthreetimes \mathrm{Aut}\,(K/F) \quad \text{и} \\ G_0^G = SL(n, F) \leftthreetimes \mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, \det(G_0)), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\mathrm{Aut}\,(K/F)$ – группа автоморфизмов расширения полей K/F, $\det$ – гомоморфизм определителя (см. §11, §13 [2]).

§2. Факторизация группы $GL(2, K)$

Пусть теперь $G = GL(2, K)$ – полная линейная группа степени 2 над полем $K = F(\sqrt{a})$ и

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi & b\overline{\eta} \\ \eta & \overline{\xi} \end{pmatrix} : \xi, \eta \in K, \xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta} \neq 0 \right\}$$

– фиксированная ее подгруппа, изоморфная мультипликативной группе тела кватернионов $D = \left(\frac{a,b}{F}\right)$. Обозначим через G_1 группу $\begin{pmatrix} 1 & K \\ 0 & K^* \end{pmatrix}$ всех обратимых матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ над полем K.

Теорема. *Группа $G = GL(2, K)$ допускает факторизацию*

$$G = G_0 \cdot G_1, \quad G_0 \cap G_1 = \{e\}. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть ξ, η, λ, μ, β, γ – элементы поля K, причем $\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}$, $\lambda\overline{\lambda} - b\mu\overline{\mu}$ и γ отличны от нуля. Матрица

$$\begin{pmatrix} \xi & b\overline{\eta} \\ \eta & \overline{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & b\overline{\mu} \\ \mu & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

принадлежит подгруппе G_1 тогда и только тогда, когда линейная система

$$\begin{cases} \xi\lambda + (\xi\beta + b\overline{\eta}\gamma)\mu = 1, \\ \eta\lambda + (\eta\beta + \overline{\xi}\gamma)\mu = 0 \end{cases}$$

относительно λ и μ имеет решение. Это так, ибо ее определитель равен $(\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta})\gamma \neq 0$. Так что $G_0 \cdot G_1 = G_1 \cdot G_0$. Нетрудно убедиться, что последнее произведение равно G. Тривиальность пересечения $G_0 \cap G_1$ вытекает из единственности решения указанной линейной системы.

Теорема доказана.

Замечание. В равенстве

$$\begin{pmatrix} \xi & b\overline{\eta} \\ \eta & \overline{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & b\overline{\mu} \\ \mu & \overline{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

элементы λ, μ, β_1, γ_1 однозначно определяются элементами ξ, η, β, γ по формулам

$$\lambda = \frac{\eta\beta + \overline{\xi}\gamma}{(\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta})\gamma}, \quad \mu = -\frac{\eta}{(\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta})\gamma},$$
$$\beta_1 = \frac{1}{\overline{\gamma}(\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta})}(\xi\overline{\eta}(\beta\overline{\beta} + b\gamma\overline{\gamma} - b) + \beta\overline{\gamma}\xi^2 + b\overline{\beta}\gamma\overline{\eta}^2),$$
$$\gamma_1 = \frac{(\eta\beta + \overline{\xi}\gamma)\overline{(\eta\beta + \overline{\xi}\gamma)} - b\eta\overline{\eta}}{\overline{\gamma}(\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta})}.$$

Следствие. *Если H – промежуточная подгруппа, $G_0 \leqslant H \leqslant G$, то она наследует факторизацию (6):*

$$H = G_0 \cdot H_1, \;\; H_1 = H \cap G_1.$$

Доказательство очевидно.

Лемма. *Если H – промежуточная подгруппа и* $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in H$, *то* $\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in H$ *и* $\begin{pmatrix} 1 & 2\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$.

Доказательство. Пусть β, $\gamma \in K$ ($\gamma \neq 0$). Рассмотрим равенство

$$[q] \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} [q_1],$$

где q, $q_1 \in D^*$. Ввиду замечания к теореме матрица $[q_1] \in G_0$ однозначно определяется матрицей $[q] \in G_0$, если таковая существует. Действительно, если

$$[q] = \begin{pmatrix} \xi & b\overline{\eta} \\ \eta & \overline{\xi} \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям $\eta = r\overline{\gamma^{-1}\beta}$ и $\xi + \overline{\xi} = r\frac{b - b\gamma\overline{\gamma} - \beta\overline{\beta}}{\gamma\overline{\gamma}}$, $r \in k$, то произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^{-1} [q] \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

принадлежит G_0. Вторая часть утверждения леммы следует из равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

§3. Верхняя и нижняя гирлянды

Формулы (3), (4), (5) и результаты §2 позволяют дать явное описание верхней и нижней гирлянд Γ^* и Γ_* решетки $\mathrm{Lat}\,(G_0, G)$.

Теорема 1. *Имеет место равенство* $\Gamma^* = \mathrm{Lat}\,(G_0^G, G)$, *где* $G_0^G = \langle g^{-1}[q]g : g \in G, q \in D^* \rangle$, *является полной относительно* G_0 *подгруппой в* G *и совпадает с полупрямым произведением*

$$SL(2, K) \rtimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}(D^*) \end{pmatrix}.$$

Кроме того, G_0^G *допускает факторизацию*

$$G_0^G = G_0 \begin{pmatrix} 1 & K \\ 0 & \mathcal{N}(D^*) \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{N}$ – отображение нормы.

Доказательство следует непосредственно из формул (3), (5) и следствия §2.

Пусть $S^1 = \operatorname{Ker}\mathcal{N}_{K/F}$ – ядро нормы.

Теорема 2. *Нормализатор $N_G(G_0)$ подгруппы G_0 в G совпадает с полупрямым произведением подгрупп G_0 и $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^1 \end{pmatrix}$. При этом имеет место равенство $\Gamma_* = \operatorname{Lat}(G_0, N_G(G_0))$.*

Доказательство. Согласно следствию нормализатор $N_0{=}N_G(G_0)$ разлагается в произведение – очевидно, полупрямое –

$$N_0 = G_0 \leftthreetimes N_1, \quad N_1 = N_0 \cap G_1.$$

Пусть $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in N_1$. Тогда при любых $\xi, \eta \in K$ G_0 содержит матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi & b\overline{\eta} \\ \eta & \overline{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi - \gamma^{-1}\beta\gamma & \xi\beta - \gamma^{-1}\beta^2\eta + b\eta\overline{\eta} - b\overline{\xi} \\ \gamma^{-1}\eta & \gamma^{-1}\eta\beta + \overline{\xi} \end{pmatrix}.$$

В частности, $\overline{\xi - \gamma^{-1}\beta\eta} = \overline{\xi} + \gamma^{-1}\eta\beta$ или $\gamma^{-1}\beta\eta + \overline{\gamma^{-1}\beta\eta} = 0$ при любом $\eta \in K = F(\sqrt{a})$. Так при $\eta = 1$ получаем $\gamma^{-1}\beta + \overline{\gamma^{-1}\beta} = 0$, а при $\eta = i$ $\gamma^{-1}\beta i + \overline{\gamma^{-1}\beta i} = 0$ или $\gamma^{-1}\beta - \overline{\gamma^{-1}\beta} = 0$, то $\gamma^{-1}\beta = 0$, $\beta = 0$. Но тогда $b\overline{\gamma^{-1}\eta} = b\overline{\gamma\eta}$ или $\overline{\gamma}^{-1} = \gamma$, $\gamma\overline{\gamma} = 1$, т.е. $\gamma \in S^1 = \operatorname{Ker}\mathcal{N}_{K/k}$. Таким образом, доказано равенство

$$N_G(G_0) = G_0 \leftthreetimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь H – подгруппа из интервала $\operatorname{Lat}(G_0, N_G(G_0))$. Тогда при всех ξ, $\eta \in K$ $(\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta} \neq 0)$ и $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \in N_G(H)$ найдется матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H_1 \leqslant N_1$ такая, что

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi & b\overline{\eta} \\ \eta & \overline{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in G_0,$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} \xi - \gamma^{-1}\beta\gamma & \xi\beta\delta - \gamma^{-1}\beta^2\eta\delta + b\gamma\overline{\eta}\delta - \beta\overline{\xi}\delta \\ \gamma^{-1}\eta & \gamma^{-1}\eta\beta\delta + \overline{\xi}\delta \end{pmatrix} \in G_0.$$

Откуда $\mathcal{N}_{K/F}(\overline{\xi}-\overline{\gamma^{-1}\beta\gamma})=\mathcal{N}_{K/F}(\overline{\xi}+\gamma^{-1}\beta\eta)$. Положив $\xi=\gamma^{-1}\beta\eta$, получим, что $\mathcal{N}_{K/F}(\gamma^{-1}\beta\eta+\overline{\gamma^{-1}\beta\eta})=0$, т.е. $\gamma^{-1}\beta\eta+\overline{\gamma^{-1}\beta\eta}=0$. Применяя теперь рассуждение из первой части доказательства, вновь получим равенство $\beta=0$. Это значит, что

$$g=\begin{pmatrix}\xi & b\gamma\overline{\eta}\delta\\ \gamma^{-1}\eta & \overline{\xi}\delta\end{pmatrix}\in G_0,$$

так что $\overline{\xi}=\overline{\xi}\delta$ и $b\overline{\gamma^{-1}\eta}=b\gamma\overline{\eta}\delta$. Следовательно, $\delta=1$ и $\gamma\overline{\gamma}=1,\gamma\in S^1$. Итак, $N_G(H)\leqslant N_G(G_0)=N_0$ и $\Gamma_*=\mathrm{Lat}\,(G_0,N_0)$.

Теорема 2 доказана полностью.

Следствие. *Промежуточная подгруппа H принадлежит нижней гирлянде Γ_* тогда и только тогда, когда она не содержит нетривиальных элементарных трансвекций.*

Доказательство. Ясно, что G_0 трансвекций не содержит. В силу равенства

$$N_0=G_0\leftthreetimes\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & S^1\end{pmatrix}$$

не содержит трансвекций и нормализатор $N_0=N_G(G_0)$.

Пусть теперь H – промежуточная подгруппа без трансвекций. Ввиду равенства

$$\begin{pmatrix}0 & b\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ b^{-1} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ b^{-1}\alpha & 1\end{pmatrix}$$

достаточно вести речь о трансвекциях вида $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Из леммы §2 следует, что для любой матрицы $\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\in H$ имеем $\beta=0$. Это означает, что в равенстве (7)

$$\beta_1=\frac{\xi\overline{\eta}(b\gamma\overline{\gamma}-b)}{\overline{\gamma}(\xi\overline{\xi}-b\eta\overline{\eta})}=0,$$

т.е. $\gamma\overline{\gamma}=1$, $\gamma\in S^1$. Откуда следует, что фактор H_1 данной подгруппы H содержится в факторе $N_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & S^1\end{pmatrix}$ нормализатора N_0, и, значит, $H\leqslant N_0=N_G(G_0)$.

Что и требовалось доказать.

§4. Кольца множителей

Как обычно, каждой промежуточной подгруппе H, содержащей G_0, мы ставим в соответствие следующие параметры:
модуль трансвекций

$$A = A(H) = \left\{\alpha \in K : \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H\right\}$$

и *кольцо множителей*

$$R = R(H) = \{\rho \in K : \rho A \subseteq A\}.$$

Очевидно, что A – абелева группа по сложению, которая является R-модулем.

Определение. *Пусть A – подгруппа аддитивной группы поля k, $A \leqslant k^+$, $R = R(A)$ – кольцо множителей модуля A. Пара (R, A) называется допустимой, если для некоторой промежуточной подгруппы H, $G_0 \leqslant H \leqslant G$, A совпадает с модулем трансвекций подгруппы H, а R с его кольцом множителей: $A = A(H)$, $R = R(H)$. В частности, мы называем подкольцо R поля k допустимым, если для некоторой промежуточной подгруппы H мы имеем $R = R(H)$.*

Для того, чтобы дать описание (с некотрыми ограничениями) допустимых в поле K пар (R, A), нам потребуется следующая лемма, доказательство которой целиком основано на равенстве (7) (см. замечание §2).

Лемма. *Пусть (R, A) – допустимая пара. Тогда модуль A содержит все элементы вида*

$$\frac{4}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}(\xi^2\alpha + b\eta^2\overline{\alpha}), \quad \frac{2\xi\eta\alpha\overline{\alpha}}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}, \quad \frac{2\xi\eta(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2)}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}} \tag{8}$$

и их сопряженные, а кольцо R содержит ядро нормы $S^1 = \operatorname{Ker} \mathcal{N}_{K/k}$, все элементы вида

$$\frac{4(\xi^2 + b\eta^2)}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}, \quad \frac{8\xi^2}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}, \quad \frac{8b\eta^2}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}, \quad \frac{4(\xi - b\eta^2)}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}, \tag{9}$$

где $\xi + j\eta$– ненулевой кватернион, $\alpha \in A$.

В частности, из леммы, следует, что $\overline{A} = A$.

Обозначим через R_0 подкольцо поля K, порожденное группой S^1, элементами (8) и элементами (9):

$$R_0 = \mathrm{ring}_{\,q\in D^*}\left\langle S^1, \frac{4(\xi^2 \pm b\eta^2)}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}\right\rangle.$$

В дальнейшем мы будем считать, что $2 \in R_0^*$. Тогда, как нетрудно показать,

$$R_0 = \mathrm{ring}_{\,q\in D^*}\left\langle \frac{\xi^2 \pm b\eta^2}{\xi\overline{\xi} - b\eta\overline{\eta}}\right\rangle$$

или

$$R_0 = \mathrm{ring}_{\,\lambda\in K}\left\langle S^1, \frac{b}{\lambda\overline{\lambda} - b}\right\rangle.$$

Поскольку для любого $c \in F^*$ имеет место изоморфизм алгебр кватернионов

$$\left(\frac{a, b}{F}\right) \approx \left(\frac{a, bc^2}{F}\right),$$

то мы можем выбрать $b \in R_0^*$.

Имеет место результат, аналогичный следствию §2 [12].

Теорема. *Пусть $a = -1$. Подкольцо R поля K допустимо тогда и только тогда, когда $R \supseteq R_0$.*

Доказательство. Ясно, что всякое допустимое подкольцо R содержит R_0 (см. лемму).

Обратно. Пусть $R_0 \subseteq R$. Рассмотрим множество

$$H = G_0\begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & (1+A)^* \end{pmatrix},$$

где A – целый идеал кольца R. Покажем, что H – группа, т.е. в равенстве (7) $\beta_1 \in A$, $\gamma^1 \in (1+A)^*$. Эти включения станут очевидными, как только мы покажем, что для любого $\lambda \in K$ $\frac{b\lambda}{\lambda\overline{\lambda}-b} \in R_0$.

В кольце R_0 рассмотрим сумму

$$\frac{b}{\lambda\overline{\lambda} - b} + \frac{b}{\mu\overline{\mu} - b}.$$

Полагая $\mu = \frac{b-\lambda}{1-\lambda}$, мы получаем включение

$$\frac{b(\lambda + \overline{\lambda})}{\lambda\overline{\lambda} - b} \in R_0.$$

Полагая $\mu = \frac{b+i\lambda}{i-\lambda}$ и учитывая, что $i^2 = -1$ и $S^1 \subset R_0^*$, получаем включение

$$\frac{b(\lambda - \overline{\lambda})}{\lambda\overline{\lambda} - b} \in R_0.$$

Откуда следует, что $\frac{b\lambda}{\lambda\bar{\lambda}-b} \in R_0$.

Итак, H – промежуточная подгруппа, содержащая G_0. Ее модуль трансвекций, очевидно, равен A, т.е. пара (R, A) допустима. В частности, допустимо кольцо R.

Теорема доказана.

§5. Случай алгебры гамильтоновых кватернионов

Рассмотрим один частный случай, когда $F = \mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, а $D = \mathbb{H}$ – тело гамильтоновых кватернионов. Тогда $K = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $G = GL(2, \mathbb{C})$, а $G_0 = [\mathbb{H}^*]$. Из полученных выше результатов вытекает

Теорема. *Пусть* $G = GL(2, \mathbb{C})$ *и* $G_0 = [\mathbb{H}^*]$. *Решетка* $\mathrm{Lat}\,(G_0, G)$ *распадается в объединение* $\Gamma^* \cup \Gamma_*$ *своих верхней и нижней гирлянд. При этом* $\Gamma^* = \mathrm{Lat}\,(G_0^G, G), \Gamma_* = \mathrm{Lat}\,(G_0, N_G(G_0))$,

$$G_0^G = SL(2, \mathbb{C})\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbb{R}_+ \end{pmatrix} = G_0 \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{R}_+ \end{pmatrix},$$

$$N_G(G_0) = G_0\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^1 \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{R}_+$-*множество всех положительных вещественных чисел, а* S^1-*единичная комплексная окружность с центром в нуле.*

Доказательство. Пусть (R, A) – допустимая пара, т.е. для некоторой промежуточной подгруппы $R(H) = R$ и $A(H) = A$. По лемме §4 R содержит единичную комплексную окружность S^1 и все вещественные числа вида $\frac{8}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, иначе говоря, вещественный интервал $(0; 8]$. Тогда очевидно, что $R = \mathbb{C}$, и $A = \mathbb{C}$ или $A = 0$. Ввиду теорем 1, 2 и следствия §3 это означает, что $H \in \Gamma^*$ или $H \in \Gamma_*$.

Теорема доказана.

Следствие. *Подгруппа* $G_0 = [\mathbb{H}^*]$ *полинормальна в группе* $GL(2, \mathbb{C})$. *При этом имеют место изоморфизмы*

$$G/G_0^G \approx N_G(G_0)/G_0 \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Литература

1. А. Х. Аль Хамад, А. А. Бондаренко, З. И. Боревич, *Нормализатор группы “диагональных” автоморфизмов в алгебрах над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **191** (1991), 5–8.

2. А. Х. Аль Хамад, *Гирлянды в линейных группах, связанные с кольцами нормирования.* Канд. дисс., СПб. 1992.
3. М. С. Ба, З. И. Боревич,, *О расположении промежуточных подгрупп. Кольца и линейные группы.* Сб. научн. трудов, Краснодар (1988), 14–41.
4. А. А. Бондаренко, *Расположение подгрупп, содержащих неразветвленный тор в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем* ($p \neq 2$). — Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1994), 67–79.
5. А. А. Бондаренко, *Расположение подгрупп, содержащих неразветвленный тор в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем* ($p = 2$). — Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1994), 80–90.
6. А. А. Бондаренко, *Расположение подгрупп, содержащих разветвленный квадратичный тор, в полной линейной группе степени 2 над локальным числовым полем* ($p \neq 2$). — Вестн. СПбГУ, Сер. 1, Вып. 4 **No. 22** (1993), 7–15.
7. З. И. Боревич, *О расположении подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 5–12.
8. З. И. Боревич, В. А. Койбаев, Чан Нгок Хай, *Решетки подгрупп в* $GL(2, Q)$, *содержащих нерасщепленный тор.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 24–43.
9. З. И. Боревич, В. А. Койбаев, *О кольцах множителей, связанных с промежуточными подгруппами для квадратичного тора.* — Вестн. СПбГУ, Сер. 1 **No. 2** (1993), 5–10.
10. З. И. Боревич, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 13–19.
11. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы* $GL(2, Q)$, *содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Докл. АН СССР **312, No. 1** (1990), 36–38.
12. В. А. Койбаев, *Подгруппы групп* $GL(2, k)$, *содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1994), 136–145.
13. В. А. Койбаев, *Нормализатор группы автоморфизмов модуля, возникающего при расширении основного кольца.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1994), 133–135.
14. Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры.* М., 1986.

Bondarenko A. A. On the intermediate subgroups of the general linear group containing group of quaternions.

Let $G = G(2, K)$ be a general linear group over a quadratic extention K of the field F (char $F \neq 2$) and let $D = (\frac{a,b}{F})$ be an algebra of quaternions with division containing F.

The subgroups H of G containing a matrix realisation of multiplicative group D^* of the algebra D considered. The discription of the rings of multipliers of the intermediate subgroups is gived.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 18 сентября 1997 г.