М. В. Бондарко, С. В. Востоков

РАЗЛОЖЕНИЕ ИДЕАЛОВ В АБЕЛЕВЫХ p–РАСШИРЕНИЯХ ПОЛНЫХ ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННЫХ ПОЛЕЙ

Введение

Работа является продолжением работ [1, 2], в которых были найдены необходимые и достаточные условия разложимости идеалов в абелевом p-расширении полного дискретно нормированного поля. Сформулируем основной результат этих работ.

Пусть K/k – абелево p-расширение полного дискретно нормированного поля k нулевой характеристики с полем вычетов характеристики $p > 2$. Предположим, что соответствующее расширение полей вычетов – сепарабельно. Пусть $G = \mathrm{Gal}(K/k)$, $\mathfrak{o}$ – кольцо целых поля k и $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал кольца целых поля K.

Авторы благодарны за поддержку Российскому Фонду Фундаментальных исследований.

Теорема 1. *Идеал $\mathfrak{M}^{\varkappa}$ разложим в том и только в том случае, если индекс ветвления p^m расширения K/k делит дифференту ϑ этого расширения и при этом выполнено одно из двух условий:*

а) $p|\varkappa$

б) *в p-адическом разложении*

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 p + \dots, \quad 0 \leqslant \varkappa_i \leqslant p-1,$$

найдется коэффициент $\varkappa_i$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$, такой, что

$$\bar{h} < \varkappa_i,$$

где $\bar{h}$ – вычет максимального скачка ветвления h расширения K/k по $\mod p$.

Замечание. Если поле k содержит все p-ые корни из 1, то разложимость идеала $\mathfrak{M}^{\varkappa}$ происходит тогда и только тогда, когда

$$p^m|\vartheta, \quad p|\varkappa.$$

В настоящей работе мы находим разложение идеала на неразложимые слагаемые при выполнении условий разложимости.

Обозначения

k – полное дискретно нормированное поле нулевой характеристики с произвольным полем вычетов характеристики $p > 2$;
$\mathfrak{o}$ – кольцо целых поля k;
$\mathfrak{M}_0$ – максимальный идеал кольца $\mathfrak{o}$;
v_0 – нормирование на k;
$e = v_0(p)$ – абсолютный индекс ветвления поля k;
p^s – порядок p-кручения в k^*;
ζ_r – первообразный корень степени p^r из 1;
K/k – абелево p-расширение;
$G = \mathrm{Gal}\,(K/k)$ – группа Галуа;
σ – образующий автоморфизм группы G, в случае, когда G – циклическая группа;
ϑ – дифферента расширения K/k;
$\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_{K/k}$ – оператор следа;
p^m – индекс ветвления расширения K/k;
$p^n = [K : k]$;
$\mu = \min(n, s)$;
$\zeta := \zeta_\mu$;
$\mathfrak{M}$ – максимальный идеал кольца целых поля K.

§1. Вспомогательные результаты

1.1. Нижеследующие два предложения сводят рассмотрение вопроса о разложимости идеалов к вполне разветвленным циклическим p-расширениям.

Пусть T – подполе инерции в абелевом p-расширении K/k, $\mathfrak{o}_T$ – кольцо целых поля T и $G_1 = \mathrm{Gal}\,(K/T)$.

Предложение 1.1.1. *Любое $\mathfrak{o}[G]$ – разложение идеала из K является $\mathfrak{o}[G_1]$-разложением (см. предложения 4.6.1 и 4.6.2 работы [1]).*

Пусть K/k – нормальное вполне разветвленное p-расширение с группой Галуа G и скачками ветвления $h_1, \dots, h_n$.

Предложение 1.1.2. *Следующие условия эквивалентны:*

a) *Дифферента ϑ делится на индекс ветвления p^m*

б) *Расширение K/k – циклическое и при этом*

$$h_i - \left[\frac{h_i}{p}\right] = p^{i-1}e, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1}$$

(см. предложение 1.5 *работы* [1]*).*

Таким образом, при исследовании разложения идеала на неразложимые слагаемые мы можем считать, согласно условию теоремы 1 и предложений 1.1.1 и 1.1.2, что наше *расширение K/k* является *вполне разветвленным циклическим p-расширением*, в котором скачки ветвления удовлетворяют условиям (1).

1.2. Пусть K/k – вполне разветвленное циклическое p-расширение степени p^m и пусть $\zeta_m \in k$. Тогда $K = k(\theta)$, где $\theta^{p^m} \in k$.

Лемма 1.2. *Если скачки ветвления расширения K/k взаимно просты с p, то $v(\theta) \equiv 0 \bmod p$.*

Доказательство. Если $(v(\theta), p) = 1$, то в качестве θ^{p^m} можно взять простой элемент поля k, а тогда скачки ветвления расширения K/k будут делиться на p (см. [5], гл. IV, §2 или [4], гл. III), что противоречит условию.

1.3. Пусть, опять, K/k – вполне разветвленное циклическое p-расширение степени p^m, p^s – порядок p-кручения в k^*, $s \geqslant 1$, и $\mu = \min(m, s)$. Рассмотрим промежуточные расширения

$$k = k_0 - k_1 - \ldots - k_m = K, \tag{2}$$

где k_i/k_{i-1} – циклическое расширение степени p. Обозначим через $\mathfrak{m}_i$ – максимальный идеал кольца целых поля k_i. Ясно, что

$$k_{i+\mu} = k_i(\theta_i), \quad 0 \leqslant i \leqslant m - \mu,$$

где $\theta_i^{p^\mu} = \alpha_i \in k_i$.

Лемма 1.3.1. *Можно выбрать элементы $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-\mu}$ в полях $k_0, k_1, \ldots, k_{m-\mu}$ так, что*

$$a = v_0(\alpha_0) = v_1(\alpha_1) = \ldots = v_{m-\mu}(\alpha_{m-\mu}),$$

где v_i – нормирование в поле k_i.

Доказательство. Проверим, что если $k_{\mu+1} = k_1(\theta_1)$, то $k_\mu = k_0(\eta)$, где

$$\eta^{p^\mu} = Nm_{k_1/k_0}(\alpha_1).$$

Действительно,

$$\eta^{\sigma-1} = \theta^{(\sigma-1)(1+\sigma+\ldots+\sigma^{p-1})} = \theta_1^{\sigma^p-1} = \zeta_\mu.$$

Далее,

$$\eta^{\sigma^{p^\mu}-1} = \theta^{(\sigma^{p^{\mu-1}}-1)(1+\sigma^{p^{\mu-1}}+\ldots+\sigma^{p^{\mu-1}(p-1)})} = \zeta_\mu^{p^\mu} = 1$$

значит, $\eta \in k_\mu$ и поэтому $k_\mu = k_0(\eta)$. Таким образом можно считать, что $\alpha_0 = Nm_{k_1/k_0}(\alpha_1)$, откуда $v_0(\alpha_0) = v_1(\alpha_1)$. Продолжая процесс, получим утверждение леммы.

Пусть K/F – подрасширение в K/k степени p^r и при этом $r \leqslant \mu$. Пусть $\mathfrak{m}_F$ – максимальный идеал кольца целых поля F, $\mathfrak{o}'$ – кольцо целых поля $k_{m-\mu}$ и $K = k_{m-\mu}(\theta)$, где $\theta^{p^\mu} = \alpha \in k_{m-\mu}$.

Лемма 1.3.2. *Модуль $\mathfrak{m}_F^a\theta^j$ является $\mathfrak{o}[G]$-модулем для всех a и j.*

Доказательство. Так как $\sigma^{p^{m-\mu}}(\theta) = \zeta_\mu\theta$, то $\sigma^{p^{m-\mu}}(\sigma\theta/\theta) = 1$. Значит, $\sigma\theta = z\theta$, где $z \in \mathfrak{o}' \subset \mathfrak{o}_F$. Отсюда следует, что $\sigma(\mathfrak{m}_F^a\theta^j) \subset \mathfrak{m}_F^a\theta^j$. Лемма доказана.

Лемма 1.3.3. *Из всякого нетривиального $\mathfrak{o}[G]$-разложения $\mathfrak{m}_F^a\theta^j = \mathfrak{A}\theta^j \oplus \mathcal{L}\theta^j$ следует нетривиальное $\mathfrak{o}[H]$-разложение идеала $\mathfrak{m}_F^a = \mathfrak{A} \oplus \mathcal{L}$, где $H = \mathrm{Gal}\,(K/k_{m-\mu})$, и $(j,p) = 1$.*

Доказательство. Характеристический многочлен оператора σ на $\mathfrak{m}_F^a\theta^j$ равен $X^{p^{m-r}} - \zeta_r^j$ и имеет в кольце $k[X]$ при $(j,p) = 1$ разложение на неприводимые множители в виде

$$X^{p^{m-r}} - \zeta_r^j = \prod_{i \bmod p^{\mu-r}} (X^{p^{m-\mu}} - \zeta_\mu^{j+ip^r}).$$

Отсюда следует, что любое $k[G]$-разложение пространства $F\theta^j$ является $k_{m-\mu}$-разложением, а значит, $\mathfrak{o}[G]$-разложение модуля $\mathfrak{m}_F^a\theta^j$ является $\mathfrak{o}'$-модульным. Поэтому получаем $\mathfrak{o}'$-разложение $\mathfrak{m}_F^a = \mathfrak{A} \oplus \mathcal{L}$. Пусть $x \in \mathfrak{A}$, тогда $\sigma^{p^{m-\mu}}(x\theta^j) = (\sigma^{p^{m-\mu}}x)\zeta_\mu^j\theta^j \in \mathfrak{A}\theta^j$, т.к. $\mathfrak{A}\theta^j$ – G-модуль. Отсюда следует: $\sigma^{p^{m-\mu}}x \in \mathfrak{A}$, т.к. $\zeta_\mu^j \in \mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}'$. Значит, $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{L}$ – H-модули. Лемма доказана.

Пусть K/F – подрасширение степени p и $F_i = \mathrm{Ker}\,(\sigma^{p^{n-1}} - \zeta_1^i)$, $\mathfrak{o} \leqslant i \leqslant p-1$.

Лемма 1.3.4. *Из $\mathfrak{o}[G]$-разложения $\mathfrak{M}^{\varkappa} = \mathfrak{A} \oplus \mathcal{L}$ следует $\mathfrak{o}[G]$-разложение*

$$F_i^{(\varkappa)} = F_i \cap \mathfrak{M}^{\varkappa} = (F_i \cap \mathfrak{A}) \oplus (F_i \cap \mathcal{L}), \quad 0 \leqslant i \leqslant p-1.$$

Доказательство. Если $c \in F_i^{(\varkappa)} \subset \mathfrak{M}^{\varkappa}$, то $c = a + b$, где $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathcal{L}$. Тогда $0 = (\sigma^{p^{m-1}} - \zeta_1^i)(c) = (\sigma^{p^{m-1}} - \zeta_1^i)(a) + (\sigma^{p^{m-1}} - \zeta_1^i)(b)$, откуда $\sigma^{p^{m-1}} a = \zeta_1^i a$, $\sigma^{p^{m-1}} b = \zeta_1^i b$, и значит, $a, b \in F_i$. Лемма доказана.

1.4. Пусть K/k – циклическое вполне разветвленное расширение степени p со скачком ветвления h. Если при этом h делится на p, то поле k содержит все корни степени p из 1 и $K = k(\theta)$, где $\theta^p = \pi$ – простой элемент поля k (см. [5], гл. IV, §2). Очевидно, что элементы

$$\{\theta^i, \, \varkappa \leqslant i < \varkappa + p\}$$

образуют базис идеала $\mathfrak{M}^{\varkappa}$ над $\mathfrak{o}$. Поэтому получаем следующее предложение.

Предложение 1.4. *Если в циклическом вполне разветвленном расширении K/k степени p скачок ветвления h делится на p, то имеет место $\mathfrak{o}[G]$-разложение:*

$$\mathfrak{M}^{\varkappa} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathfrak{o}\, \theta^{\varkappa+i}.$$

1.5. С этого момента считаем, что индекс ветвления p делит дифференту ϑ и при этом $(h,p) = 1$. Пусть поле k содержит все p-ые корни из 1, тогда $K = k(\theta)$, где в качестве $\theta^p = \varepsilon$ можно взять главную единицу поля k (см. лемму 1.2). Если при этом $p|\vartheta$, то $h = \frac{pe}{p-1} - 1$ (см. предложение 1.1.2) и поэтому $v_0(\varepsilon - 1) = 1$. Из этих соображений легко получаем следующий результат.

Предложение 1.5. *Пусть K/k – циклическое вполне разветвленное расширение степени p, в котором $p|\vartheta$ и скачок ветвления h взаимно прост с p. Тогда для идеала $\mathfrak{M}^{\varkappa}$, $p|\varkappa$, имеем следующее $\mathfrak{o}[G]$-разложение:*

$$\mathfrak{M}^{\varkappa} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathfrak{M}_0^{\varkappa/p}\, \theta^i,$$

где $\mathfrak{M}_0$ *– максимальный идеал поля* k.

Замечание 1.6. $\mathfrak{M}_0^{\varkappa/p}\,\theta^i = \mathfrak{M}^{\varkappa} \cap \operatorname{Ker}(\sigma - \zeta^i)$, где σ – образующий автоморфизм группы Галуа $\mathrm{Gal}(K/k)$, а $\zeta := \zeta_1$.

§2. Разложение идеала

2.1. Пусть K/k – циклическое вполне разветвленное расширение степени p^m, в котором p^m делит дифференту. Предположим, что поле k содержит все p-ые корни из 1, и пусть $\mu = \min(m, s)$, где p^s – порядок кручения в k^*.

Рассмотрим всевозможные делители кругового многочлена $X^{p^m} - 1$:

$$\varphi_{ij}(X) = X^{p^i} - \zeta^j, \quad \zeta := \zeta_\mu,$$

где $0 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j < p^\mu$, и если $j > 0$, то $i - v_p(j) \leqslant m - \mu$ (здесь v_p – p-адический показатель). Рассмотрим, далее, $\mathfrak{o}[G]$-модули

$$\mathfrak{N}_{ij} = \mathfrak{M}^{\varkappa} \cap \operatorname{Ker}\varphi_{ij}(\sigma), \tag{3}$$

где σ – образующий автоморфизм группы $G = \mathrm{Gal}(K/k)$.

Для $j > 0$ имеем, согласно (2)

$$k_{i-v_p(j)+\mu} = k_{i-v_p(j)}(\theta_{i-v_p(j)})$$

и кроме того,

$$\mathfrak{N}_{ij} = \mathfrak{m}_i^{\varkappa_{ij}}\theta_{i-v_p(j)}^{j_1},$$

где $j = p^{v_p(j)}j_1$. Ясно, что для $j = 0$ получим

$$\mathfrak{N}_{i,0} = \mathfrak{m}_i^{\varkappa_{i,0}}.$$

2.2. Определим совокупность индексов I. Пусть

$$I_0^{(m)} = \begin{cases} (m,0), & \text{если } \varkappa_{m,0} \equiv 0 \bmod p \\ \varnothing, & \text{если } \varkappa_{m,0} \not\equiv 0 \bmod p, \end{cases}$$

далее, для $\alpha = 1, 2, \dots, \mu - 1$ пусть

$$\begin{aligned} I_\alpha^{(m)} = \{(m-\alpha, j)\,|\, & j = p^{\mu-\alpha}j',\ 1 \leqslant j' < p^\alpha,\ (j',p) = 1 \\ & \text{при этом } (\varkappa_{m-\alpha,j,p}) = 1, \text{ а пары} \\ & (m-\alpha+i, p^i j) \notin I_{\alpha-i}^{(m)},\ 1 \leqslant i \leqslant \alpha\} \end{aligned}$$

и наконец,

$$I_\mu^{(m)}\{(m-\mu,j)\,|\,1\leqslant j<p^\mu,(j,p)=1 \text{ при этом } (m-\mu-i,p^i j)\notin I_{\mu-i}^{(m)},\ 1\leqslant i\leqslant\mu\}.$$

Пусть теперь

$$I^{(m)}=\bigcup_{\alpha=0}^{\mu} I_\alpha^{(m)}.$$

Аналогично образуются множества индексов $I^{(m-1)},\dots,I^{(\mu)}$, рассматривая идеалы $\mathfrak{N}_{m-1,0},\dots,\mathfrak{N}_{\mu,0}$, причем если множество $I^{(\alpha)}$ состоит только из пары $(\alpha,0)$, то множество $I^{(\beta)}$, $\mu\leqslant\beta<\alpha$, по определению считаем пустым. Пусть, наконец,

$$I=\bigcup_{\alpha=\mu}^{m} I^{(\alpha)}.$$

2.3. В этом пункте проверим основной результат работы. Пусть K/k – циклическое вполне разветвленное расширение степени p^m, в котором $p^m|\vartheta$ и скачок ветвления h взаимно прост с p.

Теорема 2. *Пусть k содержит все p-ые корни из 1. Идеал $\mathfrak{M}^\varkappa$, $p|\varkappa$, поля K разложим как $\mathfrak{o}[G]$-модуль на неразложимые слагаемые в виде*

$$\mathfrak{M}^\varkappa=\bigoplus_{(i,j)\in I}\mathfrak{N}_{ij},$$

где $\mathfrak{o}[G]$- модули $\mathfrak{N}_{ij}$ определены в (3), а множество индексов I в п. 2.2.

Доказательство проведем индукцией по m. В случае $m=1$ теорема доказана в предложении 1.5.

Пусть $m>1$. Из предложения 1.5 и замечания 1.6 получаем $\mathfrak{o}[G]$-разложение

$$\mathfrak{M}^\varkappa=\bigoplus_{\alpha=0}^{p-1}\mathfrak{N}_{m-1,p^{\mu-1}\alpha}.$$

Модуль $\mathfrak{N}_{m-1,0}$ является идеалом поля k_{m-1} (см. (3)) и по индукционному предположению представим в виде

$$\mathfrak{N}_{m-1,0}=\bigoplus_{i,j\in I\setminus I^{(m)}}\mathfrak{N}_{i,j}.$$

Учитывая лемму 1.3, легко вычислить показатель $\varkappa_{ij}$ для всех j, а именно

$$\varkappa_{ij} = -\left[\frac{aj}{p^{\mu}} - \frac{\varkappa}{p^{m-i}}\right]. \tag{4}$$

Модуль $\mathfrak{N}_{m-1,j}$, $j = p^{\mu-1}j_1$, $1 \leqslant j_1 < p$, либо неразложим, если показатель $\varkappa_{m-1}, j$ из (4) не делится на p (см. теорему 1 и лемму 1.3.3), либо разложим, если этот показатель делится на p, согласно леммам 1.3.3 и 1.3.4, в виде

$$\mathfrak{N}_{m-1,j} = \bigoplus_{pj' \equiv j \bmod p^{\mu}} \mathfrak{N}_{m-2,j'}$$

и таким образом,

$$\bigoplus_{j_1=1}^{p-1} \mathfrak{N}_{m-1,p^{\mu-1}j_1} = \bigoplus_{(m-1,j)\in I_1^{(m)}} \mathfrak{N}_{m-1,j} \oplus \bigoplus_{(m-1,j')\in J_1^{(m)}} \mathfrak{N}_{m-2,j'},$$

где $I_1^{(m)} \cup J_1^{(m)}$ – совокупность всех пар $\mathfrak{N}_{m-2,j'}$, либо неразложим, либо раскладывается в виде

$$\mathfrak{N}_{m-2,j'} = \bigoplus_{pj'' \equiv j' \bmod p^{\mu-1}} \mathfrak{N}_{m-3,j''}$$

и тогда

$$\bigoplus_{1 \leqslant j_1 < p} \mathfrak{N}_{m-1,p^{\mu-1}j_1} =$$
$$= \bigoplus_{(m-1,j)\in I_1^{(m)}} \mathfrak{N}_{m-1,j} \oplus \bigoplus_{(m-2,j')\in I_2^{(m)}} \mathfrak{N}_{m-2,j'} \oplus$$
$$\bigoplus_{(m-2,pj'')\in J_2^{(m)}} \mathfrak{N}_{m-3,j''},$$

где $I_2^{(m)} \cup J_2^{(m)}$ – совокупность всех пар $(m-2, j)$, $j = p^{\mu-2}j_2$, $1 \leqslant j_2 < p^2$, $(j_2, p) = 1$. Продолжая процесс, приходим к разложению теоремы. Теорема доказана.

2.4. Рассмотрим теперь разложение идеала в случае, когда основное поле k не содержит нетривиальных p-корней из 1. Из-за технических трудностей мы дадим лишь формулировку результата в этом случае (для циклического расширения степени p см. работу [3]).

Пусть

$$k' = k(\zeta_1), \quad K' = K(\zeta_1), \quad G = \mathrm{Gal}\,(K/k) = \langle\sigma\rangle;$$

p^s – порядок p-кручения в k'.
$\mu = \min(m, s)$, где $p^m = [K : k]$;
$G' = \mathrm{Gal}\,(k'/k) = \langle g\rangle$,
e_0 – индекс ветвления расширения k'/k.

Рассмотрим всевозможные неприводимые делители многочлена $Xp^m - 1$ в поле k вида:

$$\varphi_{ij}(X) = \prod_{g\in G'} (X^{p^{m-i}} - \zeta^{ig}),$$

$0 \leqslant i \leqslant m$, $0 < j < p^\mu$, $i + b_p(j) > \mu$. Пусть

$$\mathfrak{N}_{ij} = \mathfrak{M}^\varkappa \cap \varphi_{ij}(\sigma).$$

Идеал $\mathfrak{M}^\varkappa$, $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 p + \ldots$, разложим в расширении K/k, тогда и только тогда, когда либо $\varkappa_0 = 0$, либо существует $r : 1 \leqslant r \leqslant m$, такое что $0 < \varkappa_0 \leqslant \hbar$, $0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \hbar, \ldots, 0 \leqslant \varkappa_{r-2} \leqslant \hbar$, $\varkappa_{r-1} > \hbar$ (см. теорему 1). Тогда имеем $\mathfrak{o}[G]$-разложение

$$\mathfrak{M}^\varkappa = (\mathrm{tr}\,_{K/k_r}/p^r)(\mathfrak{M}^\varkappa) \oplus \mathfrak{M}_\varkappa$$

так как $(\theta_{K/k_r}/p^r)(\mathfrak{M}^\varkappa) = \mathfrak{m}_r^{c_r}$, где $c_r = [\varkappa/p^r]+1$, и значит $p^r c_r \geqslant \varkappa$, а поэтому $\mathrm{tr}\,_{K/k_r}/p^r$ – идемпотентный оператор на идеале $\mathfrak{M}^\varkappa$ (см. также предложение 2.4.1 работы [2]).

Теорема 3. *Пусть K/k – вполне разветвленное циклическое расширение степени p^m с максимальным скачком h, в котором $p^m|\vartheta$. Пусть $\mathfrak{M}^\varkappa$ - идеал поля K, для степени которого $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 p + \ldots$ выполнено условие: либо $\varkappa_0 = 0$, либо существует r, $1 \leqslant r \leqslant m$, такое, что $0 < \varkappa_0 \leqslant \hbar$, $0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \hbar, \ldots, 0 \leqslant \varkappa_{r-2} \leqslant \hbar$, $\varkappa_{r-1} > \hbar$.*

Тогда имеет место $\mathfrak{o}[G]$-разложение

$$\mathfrak{M}^\varkappa = (\mathrm{tr}\,_{K/k_r}/p^r)(\mathfrak{M}^\varkappa) \oplus \mathfrak{M}_\varkappa.$$

При этом

1) $\mathfrak{M}_\varkappa$ – неразложим, если $r \geqslant 2$

2) $\mathfrak{M}_\varkappa$ – разложим при $e_0 = p - 1$ тогда и только тогда, когда $\varkappa \equiv 0 \bmod p^i$, $i \geqslant 2$. Если при этом $\varkappa \not\equiv 0 \bmod p^{i+1}$ или $i = \mu$, то

$$\mathfrak{M}_\varkappa = \bigoplus_{\substack{j \bmod p^i \\ j\equiv 1 \bmod p}} \mathfrak{N}_{ij}$$

и все модули $\mathfrak{N}_{ij}$ – неразложимы.

3) $\mathfrak{M}_\varkappa$ *– разложим при* $e_0 < p-1$ *тогда и только тогда, когда либо* $\varkappa_0 > \hbar$, *либо* $\varkappa_0 = 0$ *и при этом выполнено одно из условий:*

а) $\hbar = (p-1)/e_0$, $\varkappa \equiv 1 \bmod \hbar$,

б) $e_0 = \frac{p-1}{2}$, $\hbar = 2c$, $p+1 \equiv 0 \bmod 2c$, $\varkappa \equiv c \bmod 2c$ $(1 < c < e_0, (c, e_0) = 1)$.

При выполнении а) или б) для $\mathfrak{M}_\varkappa$ имеет место следующее $\mathfrak{o}[G]$-разложение

$$\mathfrak{M}_\varkappa = \mathfrak{M}_{\varkappa,1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_{\varkappa,n},$$

где $\mathfrak{M}_{\varkappa,\alpha} = \mathfrak{M}^\varkappa \cap \operatorname{Ker} \varphi_\alpha(\sigma^{p^{m-1}})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $\varphi_\alpha(X)$ – неприводимые делители в поле k многочлена $1 + X + \ldots + X^{p-1}$.

Причем, если выполнено условие б), то все модули $\mathfrak{M}_{\varkappa,\alpha}$ неразложимы; если же имеем условие а) и для степени $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 p + \ldots$ существуют i $(2 \leqslant i \leqslant n)$, β $(1 \leqslant \beta \leqslant e_0)$ такие, что $(\beta - 1)\hbar \leqslant \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{i-1} \leqslant \beta\hbar$, $\varkappa_0 = \beta\hbar + 1$ и при $i < \mu$, $\varkappa_i \notin [(\beta-1)\hbar, \beta\hbar]$, то имеет место $o[G]$-разложение

$$\mathfrak{M}_{\varkappa,\alpha} = \bigoplus_{\substack{j \bmod p^i \\ j \equiv j_\alpha \bmod p}} \mathfrak{N}_{ij}$$

и все модули $\mathfrak{N}_{ij}$ неразложимы.

Литература

1. М. Бондарко, С. Востоков, И. Жуков, *Аддитивные модули Галуа в полных дискретно нормированных полях.* Алгебра и анализ **3** (1997).
2. М. Бондарко, С. Востоков, *Разложимость идеалов как модулей Галуа в полных дискретно нормированных полях.* в печати.
3. З. Боревич, С. Востоков, *Кольцо целых элементов расширения простой степени локального поля как модуль Галуа.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **31** (1973), 24–37.
4. I. Fesenko and S. Vostokov, *Local field and their extensions: A constructive approach., AMS.* Providence, RI, 1993.
5. J.-P. Serre, *Local fields.* Graduate Texts Mathematics, vol. 67, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.

Bondarko M. V., Vostokov S. V. A decomposition of ideals in an Abelian p-extension of complete discretely valuated fields.

A decomposition of an ideal as a Galois module in an Abelian p-extension of a complete discretely valuated field on undecomposited summunds is finded.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 декабря 1997 г.