Н. А. Вавилов, В. И. Мысовских, Ю. Г. Тетерин

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП В ПЕТЕРБУРГЕ

Введение

Целью настоящей заметки является освещение истории развития в Ленинграде – С.-Петербурге важного и интересного направления компьютерной алгебры – вычислительной теории групп. За последние десятилетия эта сфера научной деятельности получила широкое распространение, исследования по соответствующей тематике проводятся во многих научных центрах по всему миру. Разработано несколько мощных систем компьютерной алгебры, специализированных на вычислениях в группах (GAP, Magma, Cayley), накоплен также богатый опыт использования систем компьютерной алгебры общего назначения (Maple, Mathematica, Axiom, MuPAD и т.д.) для теоретико-групповых вычислений. Привлечение фактического материала, получаемого при помощи символьных вычислений в различных классах групп, стало характерной чертой современного развития теории групп. В подтверждении этого факта уместно напомнить, что первоначальное построение многих спорадических простых конечных групп существенно использовало вычисления на компьютере.

§1. Некоторые особенности области

В качестве пояснения к последующему мы отметим здесь некоторые особенности нынешнего уровня развития области, именуемой теперь вычислительной теорией групп (Computational Group Theory – CGT). Прежде всего, современные системы компьютерной алгебры, ориентированные на группы, способны производить вычисления с несколькими разновидностями последних. В первую очередь, это группы подстановок, матричные группы и конечнопредставимые группы (заданные конечным числом образующих и соотношений, fp-группы для краткости). Для первых двух классов имеется множество эффективных алгоритмов, ориентированных на разные типы задач. Так, например, некоторые виды вычислений в группах подстановок могут быть проведены с использованием полиномиальных или даже почти линейных по времени алгоритмов (см. [23]).

Ситуация с fp-группами значительно сложнее. Здесь есть принципиальная трудность, состоящая в неразрешимости проблемы тождества слов в общем случае. Имеется весьма ограниченный набор базисных алгоритмов: метод Тодда–Коксеттера перечисления смежных классов и недавно реализованная процедура Кнута–Бендикса по переписыванию слов в некоторой нормальной форме путем сбора всех существенных пар эквивалентных слов. В частных подклассах fp-групп, в которых проблема тождества слов разрешима, опять имеется большое число эффективных методов и алгоритмов. Упомянем здесь конечные fp-группы, а также полициклические группы (имеющие конечный субнормальный ряд с циклическими факторами). Особенно эффективные алгоритмы разработаны для пересечения этих классов, т.е. для конечных разрешимых групп. Некоторые из внедренных здесь методов даже превосходят по быстродействию своих аналогов в группах подстановок.

Наконец отметим, что существенными и, возможно, наиболее важными инструментами CGT являются теория представлений и аппарат, связанный с действием групп на множествах. Это вытекает из того факта, что для групп подстановок и матричных групп умеренных размерностей имеются наиболее мощные вычислительные средства.

§2. Группы бернсайдовского типа

Перейдем к основной теме нашей заметки. Одним из первых среди ленинградских алгебраистов начал использовать методы компьютерной алгебры при решении теоретико-групповых вопросов Александр Иванович Скопин. Начиная с 70-х годов, его интересовали вопросы о строении нижнего центрального ряда групп бернсайдовского типа примарной экспоненты. В то время положительное решение ограниченной проблемы Бернсайда было известно лишь для простой экспоненты [2], поэтому получение любой информации о строении таких групп фиксированной небольшой примарной, но не простой экспоненты, представляло значительный интерес. Сначала А. И. Скопин проводил чисто теоретические исследования по этой тематике (см. [5, 6, 8]), но затем под влиянием своего учителя и основателя ленинградской–петербургской алгебраической научной школы Д. К. Фаддеева перешел к реализации своих идей и алгоритмов на компьютере.

Напомним, что в конце 60-х годов вышла серия работ зарубежных авторов по исследованию бернсайдовских метабелевых групп экспоненты p^k (p – простое, k – натуральное). Например, в [18] была найдена оценка класса нильпотентности таких групп в зависимости от числа образующих. В такой ситуации было очень естественно зафиксировать экспоненту и число образующих и провести более детальный анализ нижнего центрального ряда группы прямыми вычислениями его факторов. Это и было сделано А. И. Скопиным для экспонент 8, 9, 27 групп с двумя образующими [9, 10].

В процессе этой работы А. И. Скопин внес в данную область целый ряд оригинальных идей и методов. Во-первых, при аддитивной записи групповой операции (в неабелевом случае!) и обозначении операции взятия коммутатора элементов в виде умножения, основное соотношение – собирательная формула Ф. Холла – обращается в символьный полином. Следовательно, можно было применять методы компьютерной алгебры, в которой вычисления с многочленами занимают центральное место. Однако отсутствие соответствующих систем в России в то время и большая ресурсоемкость задачи вынуждали к созданию собственных программ на языке высокого уровня (Pascal), которые сложнее при написании, но зато гораздо эффективнее по быстродействию.

Второй ключевой идеей А. И. Скопина в этих исследованиях стало применение для таких вычислений линейно-алгебраических методов, в частности, аналога метода исключения Гаусса. Отметим, что в наши дни линейные методы в нильпотентных и разрешимых группах получили дальнейшее развитие, с их помощью получено множество важных и интересных результатов (см., например, [19]).

Сложность вычислений в бернсайдовских группах обусловлена целым рядом причин. Прежде всего, фиксация базиса (т.е. базисных мономов, или базисных коммутаторов на мультипликативном языке) соответствующей свободной группы с тем же числом образующих не обеспечивает однозначности представления элемента в низлежащей бернсайдовской группе. Иными словами, между базисными одночленами имеются зависимости (соотношения), которые и требуется построить. Среди различных деформаций соотношений, использованных А. И. Скопиным, выделяются несколько типов подстановок переменных в соответствующий символьный многочлен.

Очень интересной и плодотворной идеей А. И. Скопина является разработка графического способа нахождения собирательной формулы [15], конкретизированной для рассмотренных им типов групп. Суть метода состоит в нахождении коэффициентов при базисном одночлене через число возможных “размещений” графа на конечном линейно-упорядоченном множестве, сохраняющих порядок расположения вершин.

По окончании работы с метабелевыми группами А. И. Скопин решил провести подобные вычисления в более широких классах бернсайдовских групп, названных им в [7] трансметабелевыми группами I и II типа. Первые выделяются требованием абелевости третьего члена нижнего центрального ряда, т.е. условием $(G^3)^2 = 0$ в оригинальном обозначении. Вторые удовлетворяют требованию: класс нильпотентности коммутанта группы равен двум, или $(G^2)^3 = 0$. Трансметабелевы группы обоих типов являются важными разновидностями полинильпотентных [17]. При вычислениях в них оказывается, что значительное число координат, т.е. коэффициентов при разложении элементов таких групп по базисным мономам, нулевые. Это обстоятельство делает эффективным использование разработанной А. И. Скопиным оригинальной символьной формы записи полиномов. Однако при переходе к трансметабелевым группам резко возрастает сложность вычислений, поэтому их удалось провести до конца лишь для экспонент 8 и 9 (см. [1, 13]). В настоящее время проводится работа по эффективизации алгоритмов [16] и сопоставлению методов с nq-алгоритмом (от nilpotent quotient) и стратегией “collection from the left”, разработанными западноевропейскими и австралийскими специалистами (C. R. Leedham–Green, M. F. Newman, M. R. Vaughan–Lee и другие).

В завершение этого раздела отметим, что докторская диссертация А. И. Скопина, защищенная в 1991 г. на алгебраическом ученом совете, была первой в Ленинграде работой подобного рода, где активно использовались методы вычислительной теории групп.

§3. Методы теории представлений и характеров

Как уже упоминалось в конце §1, теория представлений играет существенную роль в вычислительной теории групп. Среди работ ленинградских алгебраистов в этом направлении выделим исследования А. В. Руколайне. В 1984 году он начал заниматься вычислением комплексных характеров конечных групп с помощью ЭВМ. При этом было составлено несколько программ на языке АЛГОЛ-ГДР для ЭВМ БЭСМ-6 в системе КРАБ, которые реализуют вычисление комплексных характеров конечных групп следующим методом. Вычисляются комплексные характеры конечной группы G, индуцированные линейными характерами циклических подгрупп группы G. К ним присоединяются, например, корневые характеры, значения которых на элементе g группы равны числу корней заданной степени из элемента g. Далее рассматривается модуль целочисленных линейных комбинаций полученных характеров, в котором выделяются образующие путем минимизации квадратичной формы на этом модуле, значения которой равны внутреннему произведению характеров. Для некоторых конечных групп G таким способом получаются все неприводимые комплексные характеры группы (см. [3]).

В дальнейшем для некоторых конечных групп были построены модули виртуальных (обобщенных) характеров, для образующих которых значение внутреннего произведения характера на себя равно 2 и внутреннее произведение различных образующих равно 1 за единственным исключением, когда оно равно 0. Если число образующих не менее пяти, то в этом случае однозначно восстанавливаются некоторые неприводимые характеры, составляющие рассмотренные выше образующие [4]. Такое восстановление некоторых неприводимых характеров получено А. В. Руколайне независимо от эквивалентного вычисления, предложенного Р. Паркером и описанного в [20].

С конца 1994 г. в Петербурге появилась мощная система компьютерной алгебры GAP (Groups, Algorithms and Programming) [22], предоставленная благодаря любезности проф. J. Neubüser'а (RWTH, Aachen). Этот огромный пакет, содержащий обширную документацию и ёмкие библиотеки разных уровней, ориентирован на алгебраические вычисления на персональных компьютерах. Акцент сделан на реализации теоретико-групповых алгоритмов. С помощью системы GAP А. В. Руколайне продолжил ранее начатую работу с комплексными характерами конечных групп. Для некоторых простых спорадических групп, используя описанную выше технологию вычислений, были повторно найдены многие неприводимые комплексные характеры, причем для некоторых спорадических групп – все неприводимые характеры. Такие вычисления представляют интерес, поскольку они выполняются единым методом и скорость вычислений выше, чем с помощью известного алгоритма Диксона–Шнайдера (см. [21]).

§4. Другие направления

Среди других направлений исследований по вычислительной теории групп в Петербурге можно упомянуть работы о вычислении структурных констант некоторых исключительных групп Шевалле, о (2,3)-порождении некоторых простых конечных групп, о тестировании подгрупп конечных групп на некоторые свойства вложения типа пронормальности и паранормальности, об исследовании групп автоморфизмов кодов над конечным алфавитом и групп инерции функций k-значной логики. В настоящей заметке мы не имеем возможности рассмотреть их подробнее.

В заключение авторы статьи пользуются возможностью сердечно поздравить от имени всех авторов настоящего сборника А. И. Скопина с 70-летним юбилеем, пожелать ему дальнейших творческих успехов, а также многостороннего развития заложенных им идей и методов в области вычислительной теории групп его учениками.

Литература

1. Ф. А. Иванов, А. И. Скопин, *Максимальная 2-порожденная трансметабелева группа первого типа экспоненты 9.* Алгебра и анализ **2**, No. 6 (1990), 150–160.
2. А. И. Кострикин, *О проблеме Бернсайда.* Докл. АН СССР **119**, No. 6 (1958), 1081–1084.
3. А. В. Руколайне, *Вычисление комплексных характеров конечных групп с помощью ЭВМ.* X Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. Гомель, 1986, с. 199.
4. А. В. Руколайне, *Вычисление комплексных характеров конечных групп с помощью ЭВМ. II.* XI Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы сообщений. Свердловск, 1989, с. 100–101.
5. А. И. Скопин, *О собирательной формуле.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **46** (1974), 59–63.

6. А. И. Скопин, *О соотношениях в группах экспоненты 8.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **57** (1976), 129–169.
7. А. И. Скопин, *Трансметабелевы группы.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 159–163.
8. А. И. Скопин, *Метабелева группа экспоненты 9 с двумя образующими.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 124–131.
9. А. И. Скопин, *Факторы нильпотентного ряда некоторых метабелевых групп примарной экспоненты.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **132** (1983), 129–163.
10. А. И. Скопин, *Исследование на БЭСМ-6 структуры нильпотентного ряда метабелевой 2-порожденной группы экспоненты 27.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 247–256.
11. А. И. Скопин, *О реализации вычислений на ЭВМ в трансметабелевых группах.* Вестн. ЛГУ. Сер.1, вып. 1 (1988), 20–23.
12. А. И. Скопин, *Тождество Якоби и собирательная формула Ф. Холла в трансметабелевых группах двух типов.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **175** (1989), 106–112.
13. А. И. Скопин, *Нижний центральный ряд максимальной 2-порожденной трансметабелевой группы I типа экспоненты 8.* Алгебра и анализ **2**, No. 5 (1990), 198–220.
14. А. И. Скопин, *Базисы свободных метабелевых и трансметабелевых групп.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 126–139.
15. А. И. Скопин, *Графическое построение собирательной формулы для некоторых типов групп.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 140–151.
16. А. И. Скопин, Ю. Г. Тетерин, *Ускорение алгорифма построения собирательной формулы Ф. Холла.* Зап. научн. семин. ПОМИ **227** (1995), 106–112.
17. А. Л. Шмелькин, *Свободные полинильпотентные группы.* Изв. АН СССР. Сер мат. **28**, No. 1 (1964), 91–122.
18. S. Bachmuth, H. Heilbroun, and H. Y. Mochisuki, *Metabelian Burnside groups.* Proc. Roy. Soc. London. Ser. A **307** (1968), 235–250.
19. B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups II.* Springer-Verlag, 1982, 531 p.
20. H. Pahlings, *Computing with characters of finite groups.* Acta Appl. Math. **21** (1990), 41–56.
21. A. V. Rukolaine, *Root characters in computer calculations with complex characters of some sporadic simple groups.* Intern. Algebraic Conf. dedicated to the memory of D. K. Faddeev. Abstracts. St. Petersburg, 1997, pp. 109–111.
22. M. Schönert et al, *GAP – Groups, Algorithms and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH, Aachen, 1994.
23. A. Seress, *An Introduction to Computational Group Theory.* Notices AMS **44**, No. 6 (1997), 671–679.
24. Ch. C. Sims, *Computation with finitely presented groups.* Cambrige University Press, 1994.

Vavilov N. A., Mysovskikh V. I., and Teterin Yu. G. Computational Group Theory in St. Petersburg.

The paper is devoted to the history of Computational Group Theory in St. Petersburg. Some features of the scientific area are pointed out. We mention here some results of A. I. Skopin concerned with computations in Burnside groups of small prime-power exponents as well as A. V. Rukolaune's work on computation of ordinary characters of some finite simple groups. The note is dedicated to the 70th anniversary of A. I. Skopin's birthday.

С.-Петербургский
государственный университет

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 22 октября 1997 г.