А. И. Виноградов

СРАВНЕНИЕ СПЕКТРОВ. II

К 80-летию Н. М. Коробова

Введение

В работе [1] была доказана гипотеза Сельберга для конгруэнц-групп $\Gamma_0(q)$ без мультипликатора. Небольшое видоизменение схемы работы [1] позволяет получить гипотезу Сельберга и для варианта конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором $\chi(\sigma)$ в инвариантном равенстве для собственных функций:

$$f_j(\sigma z) = \chi(\sigma) \cdot f_j(z),$$

где $\chi = \chi_q$ – квадратичный характер ведущего модуля q:

$$\chi(\sigma) = \chi_q(d), \quad \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(q).$$

В этом случае надо видоизменить двойную свертку из [1], снабдив ее характером χ:

$$L(\widetilde{s}, \chi) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n,q)=1}}^{\infty} \sum_{\substack{m=1 \\ q \cdot m+n>0}}^{\infty} \frac{\sigma_{-\Delta}(n,\chi) \cdot \tau_{\nu_1}(m) \cdot \tau_{\nu_2}(q \cdot m + n)}{(q \cdot m)^{s_1} \cdot (qm+n)^{s_2}} \tag{0.1}$$

с тем же самым набором параметров $\widetilde{s} = (s_1, s_2, \nu_1, \nu_2, \Delta)$, что и в работе [1]. При этом для $n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$ полагаем

$$\sigma_n(n, \chi) = \sum_{c/n,\, c>0} \chi(c) \cdot c^s, \quad s \in \mathbb{C}. \tag{0.2}$$

При $n = 0$ полагаем, что

$$\sigma_s(0, \chi) \equiv 0, \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{C}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ (Грант No. 96–01–00679).

С одной стороны двойную свертку (0.1) можно записать, по аналогии с равенством (5), [1], в виде:

$$L(\widetilde{s},\chi)=\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{\infty}\sigma_{-\Delta}(n,\chi)\cdot[\zeta_{q,n}(\widetilde{s})+\zeta_{q,-n}(\widetilde{s})],\tag{0.3}$$

где

$$\zeta_{q,\pm n}(\widetilde{s})=\sum_{\substack{m=1\\q\cdot m\pm n>0}}^{\infty}\frac{\tau_{\nu_1}(m)\cdot\tau_{\nu_2}(qm\pm n)}{(q\cdot m)^{s_1}\cdot(qm\pm n)^{s_2}}\tag{0.4}$$

и знаки $\pm n$ следва и справа в равенстве (0.4) согласованы.

Свертка (0.4) является типичной сверткой для конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$ без мультипликатора, спектральное разложение которой подробно изучено в работе [2]. Подставляя ее спектральное разложение из работы [2] в равенство (0.3) и суммируя его затем по $n\geqslant 1$, $(n,q)=1$, получаем спектральное разложение двойной свертки (0.1) в пространстве без мультипликатора, где гипотеза Сельберга уже доказана.

С другой стороны, вводя новый числовой параметр $l=qm+n$ (и следовательно, $n=l-qm$) мы можем перегруппировать суммирование (0.1) и записать двойную свертку в новом виде:

$$L(\widetilde{s},\chi)=\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{\infty}\frac{\tau_{\nu_2}(l)}{l^{s_2}}\cdot\zeta_l(\widetilde{s},\chi),\tag{0.5}$$

где

$$\zeta_l(\widetilde{s},\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_{\nu_1}(m)\cdot\sigma_{-\Delta}(qm-l;\chi)}{(qm)^{s_1}}.\tag{0.6}$$

Свертка (0.6) является типичной сверткой для конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором χ, которую удобно разлагать по спектру, используя суммы Клостермана нулевой вершины фундаментальной области F_q группы $\Gamma_0(q)$. Для того, чтобы убудиться в этом достаточно подставить равенство (0.2) в (0.6) при $s=-\Delta$ и поменять порядки суммирования. В результате равенство (0.6) преобразуется к виду двойного ряда:

$$\zeta_l(\widetilde{s},\chi)=\sum_{\substack{c=1\\(c,q)=1}}^{\infty}\frac{\chi(c)}{c^{\Delta}}\sum_{\substack{m=1\\qm\equiv l\pmod c}}^{\infty}\frac{\tau_{\nu_1}(m)}{(qm)^{s_1}}.\tag{0.7}$$

Из работы [3] следует, что двойной ряд (0.7) разлагается по спектру конгруэнц-групы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором $\chi = \chi_q$ в нулевой вершине фундаментальной области F_q группы $\Gamma_0(q)$. Но техника спектрального разложения работы [3] удобна только при фиксированном сдвиге l, в то время как нам требуется усреднить это разложение в (0.5) по всем $l \geqslant 1$, $(l, q) = 1$. Поэтому в данном случае удобнее снова воспользоваться работой [2], вместо [3], но уже в варианте с мультипликатором. В результате получается второе спектральное разложение двойной свертки (0.1) для случая конгруэнц-группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором $\chi = \chi_q$. Сравнивая это разложение с первым – без мультипликатора, где гипотеза Сельберга уже доказана, мы получаем его гипотезу и в варианте с мультипликатором. В рабочем варианте свертки (0.1) надо ввести сглаживающую функцию, как это было сделано в §1, [1]. В этом случае сглаживающая функция усложнится и примет вид:

$$\exp\left[-\frac{|n|}{qm} - \frac{|n|}{T_1 \cdot (qm+n)} - \frac{qm+n}{T_2 \cdot |n|}\right]. \tag{0.8}$$

Здесь появляются два свободных параметра $T_1 \geqslant 1$ и $T_2 \geqslant 1$ вместо одного T в [1]. Оба эти параметра в дальнейшем мы устремим к ∞ независимо друг от друга, как это было с параметром T в [1].

Такое усложнение весовой функции (0.8) по сравнению с [1] связано с тем, что в двух разных спектральных разложениях этой работы используются разные вершины фундаментальной области F_q, в то время как в [1] вершина была одна в двух случаях.

Для спектрального разложения свертки (0.4) при фиксированном n функция (0.8) примет вид:

$$\exp\left[-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{T_1 \cdot (x^2 \pm 1)} - \frac{x^2 \pm 1}{T_2}\right], \tag{0.9}$$

где $x = \sqrt{\frac{qm}{|n|}}$ – спектральный параметр. При этом для сверток $\zeta_{q,n}(\widetilde{s})$, ($n > 0$, в определении (0.9) надо взять квадратичный полином со знаком $+1$: (x^2+1) и с интервалом изменения параметра x вида $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$. Для свертки $\zeta_{q,-n}(\widetilde{s})$, $n > 0$, надо взять квадратный полином со знаком -1: (x^2-1) и с интервалом изменения параметра x вида $(1 \leqslant x \leqslant \infty)$.

Для спектрального разложения свертки (0.6) для фиксированного сдвига $l = qm + n$ (т.е. $n = l - qm$) весовая функция (0.8) преобразуется к виду:

$$\exp\left[-\frac{|qm-l|}{qm}-\frac{|qm-l|}{T_1\cdot l}-\frac{l}{T_2\cdot|qm-l|}\right]. \tag{0.10}$$

На языке спектрального параметра $y=\sqrt{\frac{qm}{l}}$ функция (0.10) примет вид:

$$\exp\left[-\frac{|y^2-1|}{y^2}-\frac{|y^2-1|}{T_1}-\frac{1}{T_2\cdot|y^2-1|}\right]. \tag{0.11}$$

При этом спектральный параметр y меняется в интервале $(0\leqslant y\leqslant\infty)$.

Хотя весовые функции (0.9) и (0.11) отличаются от весовых функций из [1], но это отличие не принципиальное. И в том и в другом случае эти функции принадлежат одному классу гладких функций, обеспечивающих хорошую сходимость всех спектральных сумм и интегралов.

§1. Ряды Гекке, скрученные с характером

Единственная тонкость, которая отличает этот вариант от исходной работы [1] – это появление здесь рядов Гекке, скрученных с квадратичным характером χ_q, чей модуль q совпадает с конгруэнц-модулем группы $\Gamma_0(q)$. По естественным причинам такие ряды не могли появиться в работе [1], т.к. там нет характера.

Появление таких рядов здесь связано с тем, что в спектральном разложении (0.3) возникает ряд-свертка после суммирования по $n\geqslant 1$:

$$L_j(w,-\Delta;\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{-\Delta}(n,\chi)}{n^w}\cdot\overline{\rho_j(n)}. \tag{1.1}$$

При этом $\rho_j(n)$ – коэффициент Фурье относительно вершины ∞ для собственной функции $f_j(z)$ дискретного спектра оператора Лапласа из пространства без мультипликатора.

Требуется аналитически продолжить ряд (1.1) в левую полуплоскость $\operatorname{Re} w\leqslant 1$ и получить его функциональное уравнение.

Если подставить в (1.1) явный вид суммы $\sigma_{-\Delta}$ из (0.2) и поменять порядки суммирования, то равенство (1.1) примет вид

$$L_j(w,0;\chi)=\frac{L_j(w)\cdot L_j(w,\chi)}{L_j(2w,\chi)}. \tag{1.2}$$

В равенстве (1.2) мы взяли для простоты наиболее важную точку $\Delta = 0$ из всего интервала изменений этого параметра ($0 \leqslant \Delta \leqslant \infty$).

В правой части равенства (1.2) появились L-ряды Гекке, скрученные с квадратичным характером:

$$L_j(w, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^w} \cdot \overline{\rho_j(n)}, \qquad \operatorname{Re} w > 1. \tag{1.3}$$

При этом считаем, что $L_j(w) \equiv L_j(w, 1)$.

Сейчас теория рядов (1.3) существует только в случае, когда модуль характера χ и конгруэнц-модуль группы $\Gamma_0(q)$ взаимно просты [4]. Но в нашем случае как раз наоборот, модуль характера χ из (1.3) совпадает с конгруэнц-модулем группы $\Gamma_0(q)$. Поэтому удобнее изучать левую часть равенства (1.2), исходя из непосредственного определения ее в (1.1), как свертки ряда Эйзенштейна с мультипликатором χ и собственной функцией дискретного спектра $f_j(z)$, у которых единая инвариантная группа автоморфности $\Gamma_0(q)$. Такой подход дает полную теорию таких рядов-сверток вместе с функциональным уравнением векторно-матричного типа для сверток на всех вершинах.

Получив эту теорию, мы получаем одновременно и теорию рядов (1.3), исходя из мультипликативного представления (1.2).

Отметим также, что этот подход весьма общий. Он годится и для случая, когда модуль q_1 конгруэнц-группы $\Gamma_0(q_1)$ с мультипликатором $\chi = \chi_{q_1}$ не совпадает с модулем q_2 конгруэнц-группы $\Gamma_0(q_2)$ пространства без мультипликатора. В этом случае свертку типа (1.1) надо рассматривать относительно группы пересечения $\Gamma_0\left(\frac{q_1 \cdot q_2}{k}\right)$, где $k = (q_1, q_2)$. Поэтому такой подход годится и для случая взаимной простоты $(q_1, q_2) = 1$ из [4].

Для конкретного применения модулярной и автоморфной техники к свертке (1.1) ее надо перевести на стандартный язык сверток Ранкина двух автоморфных функций.

Для этого надо заменить сумму $\sigma_{-\Delta}(n, \chi)$ полным коэффициентом Фурье $\tau_s(n, \chi)$ ряда Эйзенштейна $E(z, s; \chi)$ для вершины ∞ группы $\Gamma_0(q)$ с мультипликатором χ:

$$\tau_s(n, \chi) = \chi(n) \cdot |n|^{s-\frac{1}{2}} \cdot \sigma_{1-2s}(n, \chi), \tag{1.4}$$

а суммирование в (1.1) по натуральному ряду $n \in \mathbb{N}$ заменить всем кольцом целых чисел $n \in \mathbb{Z}$ без нуля:

$$L_j(w,s;\chi) = \sum_{n\neq 0} \frac{\tau_s(n,\chi)}{|n|^w} \cdot \overline{\rho_j(n)}, \tag{1.5}$$

при этом $s \in \mathbb{C}$ любое, с условием $\operatorname{Re} s \geqslant \frac{1}{2}$. В результате в (1.5) получилась свертка Ранкина с интегральным представлением по единичной полосе $\Pi = \{z = x+iy, |x| \leqslant \frac{1}{2}, y>0\}$:

$$\begin{gathered}\Gamma_j(w,s;\chi)\cdot L_j(w,s;\chi) = \iint\limits_{\Pi} E(z,s;\chi)\cdot \overline{f_j(z)}\cdot y^w \cdot d\mu(z),\\ \operatorname{Re} w > 1 + \left|\operatorname{Re} s - \frac{1}{2}\right|,\end{gathered} \tag{1.6}$$

$d\mu(z) = \frac{dx\,dy}{y^2}$ – инвариантный дифференциал, $\Gamma_j(w,s;\chi)$ – переходный коэффициент:

$$\begin{gathered}\Gamma_j(w,s;\chi) = 2\cdot \frac{(2\pi)^{-w}\cdot q^{\frac{1}{2}-s}}{\xi(2s,\chi)} \cdot \int\limits_0^\infty K_{i\varkappa_j}(y)\cdot K_{s-\frac{1}{2}}(y)\cdot y^{w-1}\,dy,\\ \xi(s,\chi) = \varepsilon_\chi \cdot \left(\frac{q}{\pi}\right)^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\cdot L(s,\chi).\end{gathered} \tag{1.7}$$

ε_χ – знак суммы Гаусса характера $\chi = \chi_q$, $L(s,\chi)$ – классический ряд Дирихле характера χ. Интеграл в правой части (1.7) от двух k-функций – табличный, он равен величине:

$$\frac{2^{w-3}}{\Gamma(w)} \cdot \Pi\,\Gamma\left(\frac{w \pm i\varkappa_j \pm \left(s-\frac{1}{2}\right)}{2}\right). \tag{1.8}$$

В (1.8) мы использовали для краткости символ произведения Π, означающий, что надо взять произведение четырех Γ-множителей с четырьмя комбинациями знаков, указанных в аргументе.

Сворачивая единичную полосу Π в правой части (1.6) на фундаментальную область F_q группы $\Gamma_0(q)$ с использованием двух инвариантных равенств:

$$\left.\begin{aligned} E(\sigma z,s;\chi) &= \chi(\sigma)\cdot E(z,s;\chi)\\ f_j(\sigma z) &= f_j(z),\end{aligned}\right. \qquad \sigma \in \Gamma_0(q)$$

мы приведем интеграл правой части (1.6) к виду:

$$\iint\limits_{F_q} \overline{f_j(z)} \cdot E(z, w; \chi) \cdot E(z, s; \chi) d\mu(z). \tag{1.9}$$

Зная поведение ряда Эйзенштейна $E(z, w; \chi)$ по параметру w во всей комплексной w-плоскости, мы получаем аналитическую продолжимость по w и для свертки (1.5).

Аналогичную продолжимость можно получить и по параметру s.

Для получения функционального уравнения надо использовать аналоги свертки (1.6) для всех вершин α:

$$\Gamma_j(w, s; \chi) \cdot L_{j,\alpha}(w, s; \chi) = \iint\limits_{\Pi} E(\sigma_\alpha z, s; \chi) \cdot f_j(\sigma_\alpha z) \cdot y^w \, d\mu(z),$$

где σ_α – нормированная матрица, переводящая вершину ∞ в α: $\sigma_\alpha(\infty) = \alpha$. Подробную структуру этих матриц можно найти в [5].

Поэтому задача о свертке (1.1) сводится к вопросу о том, когда она эквивалентна свертке (1.5). А этот вопрос в свою очередь эквивалентен вопросу о связи между коэффициентами Фурье $\rho_j(n)$ и $\rho_j(-n)$, потому что свертку (1.5) можно переписать на языке суммы по натуральному ряду $n \in \mathbb{N}$ в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^w} [\tau_s(n, \chi) \cdot \overline{\rho_j(n)} + \tau_s(-n, \chi) \cdot \overline{\rho_j(-n)}]. \tag{1.10}$$

Используя явный вид коэффициента $\tau_s(n, \chi)$ из (1.4), мы видим, что для него справедливо равенство: $\tau_s(-n, \chi) = \chi(-1) \cdot \tau_s(n, \chi)$. Поэтому коэффициент ряда (1.10) приводится к виду:

$$\tau_s(n, \chi) \cdot [\overline{\rho_j(n)} + \chi(-1) \cdot \overline{\rho_j(-n)}]. \tag{1.11}$$

В дальнейшем мы покажем, что для общей вершины α справедливо равенство:

$$\overline{\rho_{j,\alpha}(-n)} = \xi_j \cdot \rho_{j,\alpha}(n), \tag{1.12}$$

где $\xi_j = \pm 1$ собственное число оператора отражения функции f_j:

$$(T_{-1} f_j)(z) = f(-\bar{z}) = \xi_j \cdot f_j(z).$$

К тому же мы дальше докажем, что для вершины $\alpha = \infty$ все коэффициенты $\rho_{j,\infty}(n) \equiv \rho_j(n)$ вещественны для всех $n \neq 0$:

$$\rho_{j,\infty}(n) = \overline{\rho_{j,\infty}(n)}, \quad n \neq 0.$$

Поэтому для них равенство (1.12) принимает более простую форму:

$$\rho_{j,\infty}(-n) = \xi_j \cdot \rho_{j,\infty}(n).$$

Следовательно коэффициент (1.11) имеет вид:

$$\tau_s(n,\chi) \cdot \rho_j(n) \cdot [1 + \chi(-1) \cdot \xi_j]. \tag{1.13}$$

Поэтому свертка (1.5) эквивалентна свертке (1.1), если выполняется равенство:

$$\chi(-1) \cdot \xi_j = +1. \tag{1.14}$$

Если четности характера χ и функции f_j не совпадают:

$$\chi(-1) \cdot \xi_j = -1, \tag{1.15}$$

тогда свертка (1.5) вырождается и ее надо заменить другой сверткой вида:

$$L_j(w,s;\chi) = \sum_{n \neq 0} \frac{n \cdot \tau_s(n,\chi)}{|n|^{w+1}} \cdot \overline{\rho_j(n)}. \tag{1.16}$$

Эта свертка соответствует частной производной собственной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot f_j(z),$$

подставленной в ядро интеграла (1.6) на место самой функции $f_j(z)$ и замены параметра w на $(w+1)$.

Такие свертки подробно изучены в работе [6], поэтому мы отсылаем читателя в этом пункте к этой работе. Следовательно, с учетом работы [6], задача об эквивалентности сверток (1.1) и (1.16) по аналогии с (1.5) сводится к аналогу коэффициента (1.13):

$$\tau_s(n,\chi) \cdot \rho_j(n) \cdot [1 - \chi(-1) \cdot \xi_j]. \tag{1.17}$$

С учетом условия (1.15) свертка (1.16) не вырождена в этом случае как это видно из (1.17), что обеспечивает нам теорию продолжимости и функционального уравнения для свертки (1.1) как в случае (1.14) так и в (1.15).

Поэтому наша задача о свертке (1.1) свелась к изучению свойств коэффициентов Фурье $\rho_{j,\alpha}(n)$ для всех вершин α и всех $n \neq 0$ и главное – установить справедливость равенства (1.12).

К решению этой задачи мы и переходим.

§2. Дискретный спектр оператора Лапласа

Рассмотрим бесконечномерное Гильбертово пространство автоморфных функций нулевого веса инвариантных относительно группы $\Gamma_0(q)$. В качестве базиса выберем все линейно независимые собственные функции дискретного спектра оператора Лапласа Δ:

$$\Delta \cdot u_j(z) = \lambda_j \cdot u_j(z), \tag{2.1}$$

где

$$\Delta = -y^2 \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right). \tag{2.2}$$

Из самосопряженности оператора Δ и его отрицательной нормировки в (2.2) следует, что все собственные числа λ_j из равенств (2.1) чисто вещественны и положительны: $\lambda_j > 0$. Случай $\lambda_j = 0$ соответствует нулевой собственной функции $u_0(z) \equiv 0$ и в дальнейшем мы его рассматривать не будем.

Из явного вида оператора Лапласа (2.2) следует его разложение в произведение двух комплексно-сопряженных линейных множителей:

$$\Delta = -L \cdot \bar{L}, \quad L = y \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Следовательно базис $\{u_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ вместе с каждой своей функцией $u(z)$ содержит ее комплексное сопряжение $\overline{u(z)}$.

Из вещественности собственных чисел λ в уравнении (2.1) следует, что функции $u(z)$ и $\overline{u(z)}$ принадлежат одному и тому же собственному числу λ:

$$\Delta \cdot u = \lambda \cdot u, \quad \Delta \cdot \bar{u} = \lambda \cdot \bar{u}. \tag{2.3}$$

На основе функций $u(z)$ и $\overline{u(z)}$ построим линейным образом две новые функции:

$$v_1(z) = \frac{1}{2}[u(z) + \overline{u(z)}] \tag{2.4}$$

и
$$v_{-1}(z)=\frac{1}{2}[u(z)-\overline{u(z)}]. \tag{2.5}$$
Из определений (2.4) и (2.5) следует, что функция $v_1(z)$ чисто вещественна, а $v_{-1}(z)$ – чисто мнима.

Из системы двух равенств (2.3) следует, что функции $v_j(z)$, $j=\pm 1$, так же являются собственными функциями оператора Лапласа Δ и принадлежат тому же собственному числу λ:
$$\Delta\cdot v_j=\lambda\cdot v_j,\quad j=\pm 1. \tag{2.6}$$
Из инвариантности функций $u(z)$ и $\overline{u(z)}$ относительно группы $\Gamma_0(q)$ следует аналогичная инвариантность и для функций $v_j(z)$, $j=\pm 1$:
$$v_j(\sigma z)=v_j(z),\quad \sigma\in\Gamma_0(q). \tag{2.7}$$
Поэтому функции $v_j(z)$, $j=\pm 1$, можно разложить в ряд Фурье относительно любой вершины α фундаментальной области F_q группы $\Gamma_0(q)$:
$$v_j(\sigma_\alpha\cdot z)=\sum_{n\neq 0}\psi_{j,\alpha}(n)\cdot\sqrt{y}\cdot K_{i\varkappa_j}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}. \tag{2.8}$$
Это разложение является стандартным для любой собственной функции дискретного спектра инвариантной относительно группы $\Gamma_0(q)$. При этом $\varkappa_j=\sqrt{\lambda_j-1/4}$, $j=\pm 1$. В нашем случае $\lambda_1=\lambda_{-1}=\lambda$.

σ_α – нормированная матрица, переводящая вершину ∞ в α: $\sigma_\alpha(\infty)=\alpha$. Подробности о структуре этих матриц читатель может еайти в работе [5].

Из чистой вещественности функции $v_1(z)$, а следовательно и для $v_1(\sigma_\alpha z)$, получается равенство для ее коэффициентов Фурье из (2.8) при $j=1$:
$$\psi_{1,\alpha}(-n)=\overline{\psi_{1,\alpha}(n)}. \tag{2.9}$$
Из этого равенства и разложения (2.8) следует четность функции $v_1(z)$:
$$v_1(-\bar{z})=v_1(z). \tag{2.10}$$
Точно так же из чистой мнимости функции $v_{-1}(z)$, а следовательно и для $v_{-1}(\sigma_\alpha z)$, следует равенство для ее коэффициентов Фурье (2.8) для $j=-1$:
$$\psi_{-1,\alpha}(-n)=-\overline{\psi_{-1,\alpha}(n)}. \tag{2.11}$$

Из этого равенства и разложения (2.8) следует нечетность функции $v_{-1}(z)$:

$$v_{-1}(-\bar{z}) = -v_{-1}(z). \qquad (2.12)$$

Если ввести оператор отражения T_{-1}:

$$T_{-1} \cdot v_j(z) = v_j(-\bar{z}), \qquad (2.13)$$

тогда равенства (2.12) и (2.10) можно объединить в одно:

$$T_{-1} \cdot v_j(z) = v_j(-\bar{z}) = \xi_j \cdot v_j(z), \qquad (2.14)$$

где $\xi_{\pm 1} = \pm 1$.

Равенства (2.9) и (2.11) так же можно объединить в одно:

$$\psi_{j,\alpha}(-n) = \xi_j \cdot \overline{\psi_{j,\alpha}(n)}. \qquad (2.15)$$

Поэтому на основе исходного базиса $\{u_j(z)\}$ мы построим новый базис $\{v_j(z)\}$ канонический относительно оператора отражения T_{-1}.

В случае однократности собственного числа λ, т.е. когда функция $u(z)$ либо чисто вещественна, либо чисто мнима, тогда переход к v-базису для этого случая тривиален. Полагаем $u(z) = v_1(z)$ в первом случае и $u(z) = v_{-1}(z)$ – во втором.

Из равенств (2.6) и (2.14) следует коммутационное соотношение для операторов Δ и T_{-1} на базисе $\{v_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$:

$$(\Delta \otimes T_{-1}) \cdot v_j(z) = (T_{-1} \otimes \Delta) \cdot v_j(z). \qquad (2.16)$$

Отсюда следует, что оно справедливо и на всем пространстве.

На v-функциях базиса определим действие кольца операторов Гекке T_m для любого целого $m \geqslant 1$ равенством:

$$T_m \cdot v_j(z) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\substack{a \cdot d = m \\ 1 \leqslant b \leqslant d}} v_j\left(\frac{az+b}{d}\right). \qquad (2.17)$$

Из этого равенства сразу следует коммутационное соотношение для v-базиса:

$$(\Delta \otimes T_m) v_j(z) = (T_m \otimes \Delta) \cdot v_j(z). \qquad (2.18)$$

Поэтому ясно, что оно сохраняет свою справедливость и на всем пространстве.

Из определения (2.17) легко следует и коммутационное соотношение оператора T_{-1} и операторов Гекке T_m, $m \geqslant 1$:

$$(T_{-1} \otimes T_m)v_j(z) = (T_m \otimes T_{-1})v_j(z). \tag{2.19}$$

Коммутационные соотношения для операторов Гекке:

$$(T_n \otimes T_m)v_j(z) = (T_m \otimes T_n)v_j(z) \tag{2.20}$$

хорошо известны со времен самого Гекке.

Имея коммутационные соотношения (2.16), (2.18), (2.19) и (2.20) мы можем воспользоваться известной теоремой из теории операторов Гильбертова пространства и заменить базис $\{v_j(z)\}$ новым каноническим базисом $\{f_j(z)\}$, состоящим из собственных функций всех коммутирующих операторов одновременно:

$$\Delta \cdot f_j(z) = \lambda_j \cdot f_j(z), \tag{2.21}$$

$$T_m \cdot f_j(z) = t_j(m) \cdot f_j(z), \quad m \geqslant 1, \tag{2.22}$$

$$T_{-1} \cdot f_j(z) = \xi_j \cdot f_j(z). \tag{2.23}$$

Отсюда видно, что нет особой проблемы в подключении оператора отражения T_{-1} к кольцу всех операторов Гекке группы $\Gamma_0(q)$, если пространство порождено собственными функциями классического оператора Лапласа Δ.

Такая проблема возникает только при переходе к общему оператору Лапласа–Бельтрами.

§3. Вещественность и мнимость четных и нечетных функций базиса

Основная теорема о коммутирующих операторах в Гильбертовом пространстве не гарантирует автоматического переноса всех полезных свойств v-базиса на f-базис. Речь, конечно, идет о чистой вещественности четных v-функций и чистой мнимости нечетных.

Тем не менее эти свойства сохраняются и для общего канонического f-базиса с системой равенств (2.21)–(2.23). Это мы сейчас и докажем.

Из равенства (2.21) и условий автоморфности f-базиса относительно группы $\Gamma_0(q)$ следует стандартное разложение Фурье любой фиксированной f-функции базиса $\{f_j(z)\}$ относительно вершины ∞:

$$f(z) = \sum_{n\neq 0} \rho(n) \cdot \sqrt{y} \cdot K_{i\varkappa}(2\pi|n|y) \cdot e^{2\pi inx}, \tag{3.1}$$

где $\varkappa = \sqrt{\lambda - 1/4}$, $\lambda > 0$ – собственное число, которому принадлежит функция $f(z)$.

Для этой функции так же справедливо утверждение, что и ее комплексное сопряжение $\overline{f(z)}$ так же принадлежит каноническому базису $\{f_j(z)\}$. По этим двум функциям мы снова введем две функции вида

$$v_{\pm 1}(z) = \frac{1}{2}[f(z) \pm \overline{f(z)}] \tag{3.2}$$

по аналогии с равенствами (2.4) и (2.5).

Для этих функций также справедливо разложение Фурье в вершине ∞:

$$v_j(z) = \sum_{n\neq 0} \psi_j(n) \cdot \sqrt{y} \cdot K_{i\varkappa_j}(2\pi|n|y) \cdot e^{2\pi inx}, \tag{3.3}$$

где $j = \pm 1$.

Явный вид коэффициентов Фурье $\psi_j(n)$ легко получить из двойного равенства (3.2), если туда подставить ряды Фурье (3.1) и (3.2):

$$\psi_{\pm 1}(n) = \frac{1}{2}[\rho(n) \pm \overline{\rho(-n)}. \tag{3.4}$$

С другой стороны, пользуясь ортогональностью рядов Фурье на единичном интервале $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ получаем из (3.3) интегральное представление для коэффициентов Фурье:

$$\psi_j(n) \cdot \sqrt{y} \cdot K_{i\varkappa_j}(2\pi|n|y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v_j(z) \cdot e^{-2\pi inx}\, dx. \tag{3.5}$$

Сдваивая интеграл (3.5), запишем его в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [v_j(z) \cdot e^{-2\pi inx} + v_j(-\bar{z}) \cdot e^{2\pi inx}] dx. \tag{3.6}$$

Но функции $v_j(z)$, $j = \pm 1$, являются собственными функциями оператора отражения T_{-1}, как это было установлено в §2. Поэтому интеграл (3.6) можно записать в новом виде:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} v_j(z) \cdot [e^{-2\pi inx} + \xi_j \cdot e^{2\pi inx}]dx. \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что для четной функции $v_j(z)$, когда $j = +1$, интеграл (3.7) равен:

$$2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} v_1(z) \cdot \cos 2\pi nx\, dx. \tag{3.8}$$

А для нечетной функции $v_j(z)$, когда $j = -1$, интеграл (3.7) равен:

$$-2i \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} v_{-1}(z) \cdot \sin 2\pi nx\, dx. \tag{3.9}$$

Но четная функция $v_{+1}(z)$ – чисто вещественная, а нечетная $v_{-1}(z)$ – чисто мнимая. Поэтому как интеграл (3.8) так и (3.9) оба чисто вещественные величины.

Кроме того, при $y > 0$ величина $\sqrt{y}$ чисто вещественна и положительна, т.к. мы берем только главную ветвь корня.

K-функция Макдональда:

$$K_{i\varkappa_j}(2\pi|n|y) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{i\varkappa_j} \cdot e^{-\pi|n|y\left(u+\frac{1}{u}\right)}\,\frac{du}{u} \tag{3.10}$$

так же чисто вещественна. Это сразу следует из разбиения интервала интегрирования (3.10) на две части: $(0,\infty) = (0,1) \cup (1,\infty)$ и замены переменной интегрирования $u \to \frac{1}{u}$ в первом интервале (0.1).

Все это вместе приводит к вещественности коэффициентов $\psi_j(n)$ в равенстве (3.5) как для $j = +1$, так и для $j = -1$, а через равенства (3.4) и к вещественности коэффициентов $\rho(n)$ и $\overline{\rho(-n)}$, а следовательно и $\rho(-n)$.

С другой стороны любая фиксированная функция $f(z)$ нашего базиса является собственной функцией оператора отражения, как это следует из равенства (2.23):

$$f(-\bar{z}) = \xi \cdot f(z), \quad \xi = \pm 1.$$

Подставляя в это равенство ее разложение Фурье (3.1), получаем соотношение между ее коэффициентами Фурье:

$$\rho(-n) = \xi \cdot \rho(n), \quad \xi = \pm 1. \tag{3.11}$$

Но мы только что установили вещественность всех коэффициентов Фурье $\rho(n)$, $n \neq 0$. Поэтому равенство (3.11) эквивалентно равенству

$$\rho(-n) = \xi \cdot \overline{\rho(n)}. \tag{3.12}$$

Подставляя это равенство в (3.1) для отрицательных номеров коэффициентов, получаем чистую вещественность четной функции $f(z)$ и чистую мнимость нечетной.

Если λ однократно, т.е. $f(z)$ чисто вещественна либо чисто мнима, то предыдущая процедура не нужна.

Тем самым с помощью разложения Фурье в вершине ∞, мы восстановили эффект тотальной вещественности четных функций базиса $\{f_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ и тотальной мнимости для нечетных.

Но эти качества базиса от вершины не зависят и остаются справедливыми для всей фундаментальной области F_q. Поэтому мы можем ими воспользоваться для переноса на базис $\{f_j(z)\}$ основных равенств (2.15) для коэффициентов Фурье всех функций $f_j(z)$, $1 \leqslant j \leqslant \infty$, любой вершины α фундаментальной области F_q:

$$f_j(\sigma_\alpha z) = \sum_{n \neq 0} \rho_{j,\alpha}(n) \cdot \sqrt{y} \cdot K_{i\varkappa_j}(2\pi|n|y) \cdot y^{2\pi n x}. \tag{3.13}$$

По тем же соображениям получаем справедливость аналога равенства (2.15) и для коэффициентов разложения (3.13):

$$\rho_{j,\alpha}(-n) = \xi_j \cdot \overline{\rho_{j,\alpha}(n)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant \infty. \tag{3.14}$$

К тому же теперь мы знаем, что для вершины $\alpha = \infty$ черту комплексного сопряжения в равенстве (3.14) можно снять из-за тотальной вещественности всех коэффициентов $\rho_{j,\infty}(n)$, $n \neq 0$.

Но для других вершин этого сделать нельзя, т.к. доказательство вещественности коэффициентов $\rho_{j,\infty}(n)$ не работает для других вершин.

Теорию операторов Гекке (2.17) мы традиционно принимаем на языке вершины ∞, хотя она может быть создана и для любой другой вершины α фундаментальной области F_q. Поэтому между коэффициентами Фурье $\rho_{j,\infty}(\pm n)$, $n \geqslant 1$, разложения (3.13) для вершины $\alpha = \infty$ и собственными числами операторов Гекке $t_j(n)$, $n \geqslant 1$, из равенства (2.22) существует линейная зависимость:

$$\rho_{j,\infty}(\pm n) = \rho_{j,\infty}(\pm 1) \cdot t_j(n), \quad n \geqslant 1. \tag{3.15}$$

Исходя из вещественности коэффициентов $\rho_{j,\infty}(\pm n)$, получаем равенство (3.14) в частном случае $n = 1$:

$$\rho_{j,\infty}(-1) = \xi_j \cdot \rho_{j,\infty}(1).$$

Поэтому равенство (3.15) для отрицательных номеров можно записать в мультипликативной форме:

$$\rho_{j,\infty}(-n) = \xi_j \cdot \rho_{j,\infty}(1) \cdot t_j(n), \quad n \geqslant 1. \tag{3.16}$$

Отметим, что нормировочный коэффициент $\rho_{j,\infty}(1)$ определяется ортонормированным равенством:

$$\iint\limits_{F_q} |f_j(z)|^2 d\mu(z) = 1,$$

откуда следует, что $\rho_{j,\infty}^{(1)} \neq 0$.

Равенство (3.16) дополняет равенства (1.13) и (1.17) мультипликативной структурой собственных чисел операторов Гекке $t_j(n)$, которой мы воспользовались в неявном виде при получении равенства (1.2).

Подробности о структуре собственных чисел операторов Гекке $t_j(n)$, в частности, об их эрмитовости, можно найти, например, в работах [5, 7]. В дополнение к этим работам заметим, что из тотальной вещественности коэффициентов $\rho_{j,\infty}(n)$ следует эрмитовость операторов Гекке и для делителей конгруэнц–модуля q.

Отметим также, что все сказанное в §2 и §3 этой работы остается справедливым и для пространства с мультипликатором χ, если он является квадратичным характером $\chi = \chi_q$. В этом случае мультипликатор χ инвариантен при операции комплексного сопряжения, поэтому все рассуждения остаются верными и для него. Отсюда, в частности, следует, что работа [2] остается верной и в варианте с мультипликатором.

В заключении отметим, что во всех работах, на которые мы ссылались, используется тотально-вещественный базис пространства, в то время, как в этой работе тотально-вещественные только четные функции $f_j(z)$, а нечетные – чисто мнимы. Но это различие чисто формальное, так как тотальная вещественность базиса – это вопрос его нормировки.

Если на основе нашего базиса $\{f_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ определить новый базис $\{u_j(z)\}_{j=1}^{\infty}$ с помощью равенств:

$$u_j(z) = \begin{cases} f_j(z), & \xi_j = +1 \\ -i \cdot f_j(z), & \xi_j = -1, \end{cases} \tag{3.17}$$

то мы получим тотально-вещественную систему собственных функций в смысле работы [5] и других работ в списке литературы. Для того, чтобы показать, что все теоремы работы [5] остаются справедливыми и для базиса $\{f_j(z)\}$ этой работы возьмем ряд Фурье функции $u_j(z)$ из (3.17) для любой вершины α:

$$u_j(\sigma_\alpha z) = \sum \varphi_{j,\alpha}(n) \cdot \sqrt{y} \cdot K_{j\varkappa_j}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}. \tag{3.18}$$

Тогда коэффициенты Фурье (3.18) будут связаны с коэффициентами Фурье (3.13) линейной зависимостью:

$$\varphi_{j,\alpha}(n) = \frac{1}{2}[(1+\xi_j) - i(1-\xi_j)]\rho_{j,\alpha}(n). \tag{3.19}$$

Это равенство сразу же следует из определения (3.17) функции $u_j(z)$.

Из равенства (3.19) следует справедливость равенства для эрмитовых произведений этих коэффициентов:

$$\varphi_{j,\alpha}(n) \cdot \overline{\varphi_{j,\beta}(m)} = \rho_{j,\alpha}(n) \cdot \overline{\rho_{j,\beta}(m)}.$$

Поэтому формулы суммирования Кузнецова из работы [5] для эрмитовых произведений коэффициентов одни и те же как для базиса $\{f_j(z)\}$, так и для $\{u_j(z)\}$.

Для обычных произведений они отличаются множителем $\xi_j = \pm 1$ – собственным числом оператора отражения:

$$\varphi_{j,\alpha}(n) \cdot \varphi_{j,\beta}(m) = \xi_j \cdot \rho_{j,\alpha}(n) \cdot \rho_{j,\beta}(m).$$

В конце работы хочу высказать искреннюю благодарность своим коллегам по Институту Л. Д. Фаддееву, А. Г. Изергину и М. М. Скриганову за многочисленные консультации по теории операторов в Гильбертовых пространствах.

Литература

1. А. И. Виноградов, *Сравнение спектров.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **228** (1996), 1–10.
2. V. Bykovsky, N. Kuznetsov, A. Vinogradov, *Generalized summation formula for ingomogeneous convolution.* — International conference automorphic function and their application (27 June – 4 Jule, 1988), 18–64, Khabarovsk,.
3. А. И. Виноградов, *Спектральное разложение в разных вершинах.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **224** (1995), 129–146.
4. G. Shimura, Русский перевод 1973, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* 1971.
5. J.-M. Deshenillers, H. Jwaniec, *Klostermann sums and Fourier coefficients of cusp-forms.* — Inventiones Math. **70,** No. **2** (1982), 218–288.
6. А. И. Виноградов, *Неоднородные свертки Ранкина.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **226** (1996), 37–52.
7. H. Jwanice, *Small eigenvalues of Laplacian for* $\Gamma_0(N)$. — Acta Arithmetica **56,** No. 1 (1990), 65–82.

Vinigradov A. I. Comparison of the specrta. II.

The spectral Selberg conjecture is proved in a new version, i.e., for a congruence group with a nontrivial myltiplier.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 ноября 1996 г.