А. И. Генералов

РАЗМЕРНОСТЬ КРУЛЛЯ КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ НАД НЕТЕРОВЫМИ СПРАВА ПОЛУЦЕПНЫМИ КОЛЬЦАМИ

1. Введение. Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, $\operatorname{mod} R$ – категория конечно представимых правых R-модулей. Аддитивный контравариантный функтор $F: \operatorname{mod} R \to \mathcal{A}b$, где $\mathcal{A}b$ – категория абелевых групп, называется конечно представимым, если в категории (аддитивных) контравариантных функторов $\operatorname{Fun}((\operatorname{mod} R)^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$ существует точная последовательность вида

$$(-, X) \to (-, Y) \to F \to 0,$$

где $X, Y \in \operatorname{mod} R$, а также для краткости обозначаем $(-, X) = \operatorname{Hom}_R(-, X)$. Через $\mathcal{F}$ обозначим полную подкатегорию в $\operatorname{Fun}((\operatorname{mod} R)^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$, состоящую из конечно представимых функторов. Известно, что $\mathcal{F}$ – абелева категория (см. [1, с. 199]).

Говорим, что категория $\operatorname{mod} R$ имеет размерность Крулля, если для фильтрации Крулля–Габриеля (см. [2]) $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ категории $\mathcal{F}$ существует ординал γ такой, что $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{F}$, а наименьший такой ординал называем размерностью Крулля и обозначаем $\gamma = K.\dim(\operatorname{mod} R)$.

Из результатов [3] вытекает, что кольцо R имеет конечный тип представления тогда и только тогда, когда $K.\dim(\operatorname{mod} R) = 0$, т.е. любой конечно представимый функтор $F \in \mathcal{F}$ имеет конечную длину. Для ручных наследственных алгебр в [4] доказано, что $K.\dim(\operatorname{mod} R) = 2$. Таким образом, в этом случае имеется фильтрация Крулля–Габриеля

$$0 = \mathcal{F}_{-1} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 = \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ – подкатегория объектов конечной длины в фактор-категории $\mathcal{F}/\mathcal{F}_i$. С другой стороны, для многих классов конечномерных алгебр (как “диких”, так и “ручных”) показано, что размерность Крулля соответствующих категорий модулей не существует (см. [2]).

Цель настоящей работы – доказательство следующего основного результата.

Теорема 1.1. *Для нетерова справа полуцепного кольца R, не являющегося артиновым,* $K.\dim\,(\mathrm{mod}\ R) = 1$.

Заметим, что артиново полуцепное кольцо R имеет конечный тип представления, и в этом случае $K.\dim\,(\mathrm{mod}\ R) = 0$.

2. Предварительные сведения. Пусть R – (двусторонне) полуцепное нетерово справа кольцо, не являющееся артиновым. Через $\mathrm{ind}\,R$ обозначим множество представителей классов изоморфных неразложимых правых R-модулей. Любой модуль из $\mathrm{ind}\,R$ является цепным [5]. Обычно мы отождествляем модуль из $\mathrm{ind}\,R$ и класс изоморфных ему модулей. Кроме того, будем дополнительно предполагать, что R двусторонне неразложимо. Ввиду результатов [6–8] (см. также [9, теорема 2.11]) такое кольцо R Морита-эквивалентно одному из колец следующих типов:

(А)
$$H_m(V) = \begin{pmatrix} V & V & \dots & V \\ p & V & \dots & V \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p & p & \dots & V \end{pmatrix} \subset M_m(V), \tag{2.1}$$

где m – натуральное число, V – локальная (не обязательно коммутативная) область целостности с максимальным идеалом p; в этом случае R является полусовершенным hnp-кольцом;

(Б)
$$\begin{pmatrix} H & Z \\ 0 & B \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $H = H_m(V)$, B – неразложимое артиново полуцепное кольцо, Z – некоторый (H, B)-бимодуль такой, что Z_B конечно порожден. При этом кольцо B имеет простой проективный модуль (см. [10]).

Аналогично случаю конечномерных алгебр (см., например, [11]) вводится понятие колчана Ауслендера–Райтен Γ_R кольца R. В частности, короткая точная последовательность в $\mathrm{mod}\ R$

$$\eta : 0 \to A \to B \xrightarrow{\sigma} C \to 0 \tag{2.3}$$

называется AR-последовательностью, если она не расщепляется, $A,\ C \in \mathrm{ind}\,R$ и выполняется условие: для любого неизоморфизма $f\colon X \to C$, где $X \in \mathrm{ind}\,R$, существует гомоморфизм $f' : X \to B$ такой, что $\sigma f' = f$.

В работах [12, 13] (см. также [14]) фактически описаны (хотя и на ином языке) связные компоненты колчана Γ_R для нетерова справа полуцепного кольца R. При этом мы получаем "теорему существования" AR-последовательностей: для любого непроективного неразложимого правого R-модуля C существует AR-последовательность, оканчивающаяся в C.

Для произвольной короткой точной последовательности η в $\operatorname{mod} R$ вида (2.3) функтор $\operatorname{Coker}(-,\sigma) \in \mathcal{F}$ обозначим через F_η. Тогда с использованием указанной выше теоремы существования аналогично случаю артиновых алгебр (ср. [3, 11]) доказывается следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть R – нетерово справа полуцепное кольцо. Функтор $F \in \mathcal{F}$ является простым объектом в $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) *существует AR-последовательность η в $\operatorname{mod} R$ такая, что $F \simeq F_\eta$;*

2) *существует неразложимый проективный правый R-модуль C такой, что вложение $\alpha : \operatorname{Rad} C \to C$ индуцирует точную последовательность*

$$0 \to (-, \operatorname{Rad} C) \to (-, C) \to F \to 0.$$

Для кольца R типа (А) колчан Γ_R состоит из двух компонент: "стабильной трубки" $\mathcal{E}_1$ ранга m (см. [15]), состоящей из неразложимых периодических модулей, и, следовательно, имеющих конечную длину, а также компоненты $\mathcal{E}_2$, состоящей из неразложимых проективных модулей $P_1, \dots, P_m$, со стрелками $P_{i+1} \to P_i$, $i = 1, \dots, m$, соответствующими вложениям $P_{i+1} \simeq \operatorname{Rad} P_i \subset P_i$ (индекс i определен по модулю m). Для краткости компоненту $\mathcal{E}_2$ называем окружностью (длины m).

Для кольца R типа (Б) колчан Γ_R состоит из трех компонент из стабильной трубки $\mathcal{E}_1$ ранга m (она состоит из H-модулей конечной длины), из (конечной) компоненты $\mathcal{E}_3$, изоморфной колчану Ауслендера–Райтен Γ_B кольца B, а также из некоторой конечной компоненты $\mathcal{E}_2$, которая состоит из модулей P_{ij}, распределенных по k ($k \geqslant 2$) "окружностям" длины m:

$$\dots \to P_{ij} \to P_{i-1,j} \to \dots, \quad j = 1, \dots, k,$$

(т.е. $P_{ij} \simeq \operatorname{Rad} P_{i-1,j}$), при этом кроме стрелок, лежащих на этих окружностях, в $\mathcal{E}_2$ имеются стрелки $P_{ij} \to P_{i,j-1}$ ($i = 1, \dots, m$;

$j = 2, \ldots, k$), соответствующие эпиморфизмам с простыми ядрами, лежащими в $\mathcal{E}_3$. Таким образом, как и для колец типа (А), средний член любой AR-последовательности содержит не более двух неразложимых прямых слагаемых. Модули $P_i = P_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, – это все неразложимые проективные правые R-модули, не имеющие конечной длины. Кроме того, модули, лежащие на одной и той же окружности в $\mathcal{E}_2$ имеют одну и ту же "артинову часть" $A_j = a(P_{ij})$, $j = 1, \ldots, k$, т.е. наибольший артинов подмодуль в P_{ij}, при этом $A_1 = 0$, а модули A_j, $j > 1$, лежат в $\mathcal{E}_3$ и имеют длину $l_R(A_j) = j - 1$. Заметим, что модули $Q_i = P_i/A_k \simeq P_{i1}$, $i = 1, \ldots, m$, составляют полное множество попарно неизоморфных неразложимых проективных H-модулей.

Наконец, в обоих случаях ненулевые морфизмы существуют только из компоненты $\mathcal{E}_j$ $(j > 1)$ в компоненту $\mathcal{E}_{j-1}$. Кроме того, в случае (Б) для $X \in \mathcal{E}_1$, $Y \in \mathcal{E}_3$ имеем $\mathrm{Hom}_R(X,Y) = 0 = \mathrm{Hom}_R(Y,X)$ и $\mathrm{Ext}^1_R(X,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_R(Y,X)$.

Напомним, что функтор $F \in \mathrm{Fun}(\ (\mathrm{mod}\ R))^{\mathrm{op}}, \mathcal{A}b)$ называется конечно порожденным, если существует эпиморфизм $(-, M) \to F$ для некоторого $M \in\ \mathrm{mod}\ R$.

Предложение 2.2. *Пусть U – конечно порожденный подфунктор функтора $(-, M)$, где $M \in\ \mathrm{mod}\ R$. Тогда U конечно представим.*

Доказательство. Пусть $(-, N) \to U$ – некоторый эпиморфизм, $N \in\ (\mathrm{mod}\ R)$. По лемме Йонеды существует R-гомоморфизм θ: $N \to M$ такой, что индуцированное естественное преобразование $(-, \theta)$ совпадает с композицией $(-, N) \to U \to (-, M)$. Пусть $K = \mathrm{Ker}\,\theta$. Тогда легко видеть, что точна последовательность

$$0 \to (-, K) \to (-, N) \to U \to 0.$$

Если $F \in \mathcal{F}$ – конечно представимый функтор, являющийся простым объектом в $\mathcal{F}$, то существует единственный модуль $M \in \mathrm{ind}\,R$ такой, что $F(M) \neq 0$. Стандартным образом с помощью индукции получаем следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Если $F \in \mathcal{F}$ имеет конечную длину (как объект в $\mathcal{F}$), то носитель $F\mathrm{Supp}\,F = \{X \in \mathrm{ind}\,R | F(X) \neq 0\}$ конечен.*

Доказательство следующего факта является упражнением на диаграммный поиск и предоставляется читателю.

Лемма 2.4. *Пусть в абелевой категории $\mathcal{A}$ дан универсальный квадрат*

$$\mathcal{J}: \begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B. \end{tikzcd}$$

Тогда:

а) *этот квадрат может быть вложен в следующую коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами*

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] & \\ & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0\cdot \\ 0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

б) *При этом точна последовательность*

$$0 \to A' \xrightarrow{\binom{-f}{\alpha'}} A \oplus B' \xrightarrow{(\alpha, g)} B \xrightarrow{h\beta} C'' \to 0.$$

Полезно отметить, что условие универсальности квадрата $\mathcal{J}$ в Лемме 2.4 равносильно точности последовательности из Леммы 2.4 б) в членах A' и $A \oplus B'$.

Предложение 2.5. *Пусть R – произвольное кольцо, и пусть в категории* $\operatorname{mod} R$ *дана диаграмма, состоящая из биуниверсальных квадратов*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C. \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Пусть η_1 *(соответственно* η_2*) – короткая точная последовательность, соответствующая левому (соответственно правому) квадрату в* (2.4), *а* η *– короткая точная последовательность, соответствующая объемлющему квадрату диаграммы* (2.4). *Тогда в* $\mathcal{F}$ *имеет место короткая точная последовательность*

$$0 \to F_{\eta_1} \to F_\eta \to F_{\eta_2} \to 0.$$

Доказательство. Построим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} \eta : 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\binom{\beta'\alpha'}{-f}} & C' \oplus A & \xrightarrow{(h,\beta\alpha)} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle 1\oplus\alpha} & & \Big\| & & \\ \eta_2 : 0 & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\binom{\beta'}{-g}} & C' \oplus B & \xrightarrow{(h,\beta)} & C & \longrightarrow & 0. \end{array} \qquad (2.5)$$

Левый квадрат этой диаграммы биуниверсален, и можно рассмотреть соответствующую короткую точную последовательность

$$\eta' : 0 \to A' \to B' \oplus C' \oplus A \to C' \oplus B \to 0.$$

Применяя вложение категорий $\Phi : \operatorname{mod} R \to \mathcal{F}$, $\Phi(M) = (-, M)$, к левому квадрату в (2.5), получим универсальный квадрат, который, пользуясь Леммой 2.4, вложим в коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} (-, A') & \longrightarrow & (-, C' \oplus A) & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & 0 \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle k} & & \\ (-, B') & \longrightarrow & (-, C' \oplus B') & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где k – мономорфизм и $\operatorname{Coker} k \simeq F_{\eta'}$. Легко видеть, что η' изоморфна прямой сумме коротких точных последовательностей $\eta_1 \oplus \eta_0$, где $\eta_0 : 0 \to 0 \to C' \xrightarrow{1_{C'}} C' \to 0$, и потому $F_{\eta'} \simeq F_{\eta_1}$. Ясно, что V_1, V_2 можно рассмотреть как подфункторы в $(-, C)$, при этом $F_\eta \simeq (-, C)/V_1$, $F_{\eta_2} \simeq (-, C)/V_2$. Следовательно, k индуцирует эпиморфизм $\varphi : F_\eta \to F_{\eta_2}$ с ядром, изоморфным $\operatorname{Coker} k \simeq F_{\eta_1}$.

3. Доказательство Теоремы 1.1 для кольца R типа (A). Для полусовершенного *hnp*-кольца R утверждение Теоремы 1.1, по-видимому, является фольклорным фактом. Для полноты приведем его доказательство.

В этом разделе всюду предполагается, что $R \simeq H_m(V)$ (см. (2.1)). Через $T_0 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ обозначаем функтор локализации; ввиду [16] он точен и биективен на объектах. Ясно, что достаточно доказать, что для любого $M \in \operatorname{ind} R$ объект $T_0(-, M)$ в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ имеет конечную длину.

Предложение 3.1. *Если S – простой правый R-модуль, то $T_0(-, S)$ – простой объект в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.*

Доказательство. Так как функтор $(-, S)$ отличен от нуля на бесконечном числе неразложимых конечно порожденных модулей, а именно, для модулей на трубке $\mathcal{E}_1$, допускающих эпиморфизм на S, то ввиду Леммы 2.3 $(-, S) \notin \mathcal{F}_0$, т.е. $T_0(-, S) \neq 0$. Для доказательства предложения теперь достаточно убедиться, что для любого конечно порожденного подфунктора $0 \neq U \subset (-, S)$ либо U, либо $(-, S)/U$ имеет конечную длину. Пусть дан эпиморфизм $\varphi : (-, X) \to U$; можно считать, что $X \in \operatorname{ind} R$. По лемме Йонеды существует R-гомоморфизм $\theta\colon X \to S$ такой, что $(-, \theta)$ совпадает с композицией $i\varphi$, где $i\colon U \to (-, S)$ – вложение. Ясно, что θ – эпиморфизм. Рассмотрим короткую точную последовательность в $\operatorname{mod} R$:

$$\eta : 0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ j\ } X \xrightarrow{\ \theta\ } S \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Если $X \in \mathcal{E}_1$, то и $K \in \mathcal{E}_1$. Тогда получаем точную последовательность в $\mathcal{F}$:

$$0 \longrightarrow (-, K) \xrightarrow{(-,j)} (-, X) \xrightarrow{(-,\theta)} (-, S),$$

причем $\operatorname{Im}(-, \theta) \simeq U$. Из результатов [12] следует, что для почти всех $Y \in \operatorname{ind} R$ точна последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow (Y, K) \longrightarrow (Y, X) \longrightarrow (Y, S) \longrightarrow 0.$$

и следовательно, для почти всех $Y \in \operatorname{ind} R$ имеем $(\operatorname{Coker} i)(Y) = 0$. Так как $\operatorname{Supp}(\operatorname{Coker} i) \subset \mathcal{E}_1$, то найдется ненулевой идеал I в R, аннулирующий все модули из $\operatorname{Supp}(\operatorname{Coker} i)$. Так как R/I – артиново полуцепное кольцо (см., например, [17, Теорема 3.3]), то рассматривая $\operatorname{Coker} i$ на категории $\operatorname{mod}(R/I)$, получаем, что $\operatorname{Coker} i \simeq (-,S)/U$ имеет конечную длину.

Предположим теперь, что в последовательности (3.1) $X \in \mathcal{E}_2$, т.е. X проективен. Тогда из Предложения 2.1 следует, что функтор $U \simeq \operatorname{Coker}(-,j)$ прост.

Предложение 3.2. *Если $M \in \mathcal{E}_1$, то $T_0(-,M)$ имеет конечную длину в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.*

Доказательство. Рассмотрим короткую точную последовательность η: $0 \to N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\sigma} S \to 0$, где модуль S прост, а также индуцированную точную последовательность

$$0 \longrightarrow (-,N) \xrightarrow{(-,\alpha)} (-,M) \xrightarrow{(-,\sigma)} (-,S) \longrightarrow U \longrightarrow 0.$$

Так как относительно η проективны почти все $Y \in \operatorname{ind} R$, то $\operatorname{Supp} U$ конечен, и аналогично доказательству Предложения 3.1 получаем, что $U \in \mathcal{F}_0$. Таким образом, в категории $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow T_0(-,N) \longrightarrow T_0(-,M) \longrightarrow T_0(-,S) \longrightarrow 0.$$

Теперь с помощью Предложения 3.1 индукцией по длине $l = l_R(M)$ доказывается, что $T_0(-,M)$ имеет конечную длину, равную l.

Предложение 3.3. *Если $P \in \mathcal{E}_2$, то $T_0(-,P)$ прост в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.*

Доказательство. Из описания компоненты $\mathcal{E}_2$ (см. раздел 2) с помощью Леммы 2.1 получаем, что $(-,P)$ содержит строго убывающую цепь подфункторов: $\ldots \subset (-,\operatorname{Rad}(\operatorname{Rad} P)) \subset (-,\operatorname{Rad} P) \subset (-,P)$, и потому $T_0(-,P) \neq 0$. Далее, пусть $i : U \to (-,P)$ – вложение ненулевого конечно порожденного подфунктора U, $\varphi : (-,Q) \to U$ – некоторый эпиморфизм. Можно считать, что Q – неразложимый модуль. Пусть θ: $Q \to P$ – R-гомоморфизм такой, что $(-,\theta) = i\varphi$. Тогда Q проективен, а θ – мономорфизм, и следовательно, $U \simeq (-,Q)$; кроме того, $\operatorname{Coker}\theta \in \mathcal{E}_1$. Рассмотрим $W = \operatorname{Coker}(-,\theta) \in \mathcal{F}$. Если $\operatorname{Coker}\theta$ – простой модуль, то по Предложению 2.1 W прост в $\mathcal{F}$. В общем случае индукцией по $l_R(\operatorname{Coker}\theta)$ доказываем, что W имеет конечную длину.

Как отмечено в начале раздела, из Предложений 3.2 и 3.3 вытекает утверждение Теоремы 1.1 для кольца $R \simeq H_m(V)$.

4. Доказательство Теоремы 1.1 для кольца R типа (Б). Далее всюду R обозначает "треугольное" кольцо $\begin{pmatrix} H & Z \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (см. (2.2)). Сразу отметим, что для $M \in \mathcal{E}_3$ функтор $(-, M)$ лежит в $\mathcal{F}_0$, так как для $X \in \mathcal{E}_3 \operatorname{Hom}_R(X, M) = \operatorname{Hom}_B(X, M)$.

Предложение 4.1. *Пусть $S \in \mathcal{E}_1$ – простой модуль. Тогда $T_0(-, S)$ – простой объект в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Supp}(-, S)$ бесконечен, то $T_0(-, S) \neq 0$. Далее, рассмотрим композицию $(-, X) \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{i} (-, S)$, где $X \in \operatorname{ind} R$, φ – ненулевой эпиморфизм, i – вложение. Пусть $\theta \colon X \to S$ – эпиморфизм такой, что $(-, \theta) = i\varphi$. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$\eta : 0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ j\ } X \xrightarrow{\ \theta\ } S \longrightarrow 0. \tag{4.1}$$

Если $X \in \mathcal{E}_1$, то аналогично доказательству Предложения 3.1 получаем, что $(-, S)/U$ имеет конечную длину. Предположим теперь, что $X \in \mathcal{E}_2$. Если $X = P_i$ (в обозначениях раздела 2), то из Предложения 2.1 следует, что $U \simeq \operatorname{Coker}(-, j)$ – простой объект в $\mathcal{F}$. Если же $X = P_{ij} \in \mathcal{E}_2$, $j < k$, то можно построить AR-последовательность, оканчивающуюся в X:

$$\eta' : 0 \longrightarrow K' \xrightarrow{\ \alpha'\ } X' \oplus K \xrightarrow{\ \sigma\ } X \longrightarrow 0.$$

Она соответствует следующему биуниверсальному квадрату

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\rho'"'] & X' \arrow[d, "\rho"] \\ K \arrow[r, "j"] & X, \end{tikzcd}$$

т.е. $\alpha = \begin{pmatrix} -j' \\ \rho' \end{pmatrix}$, $\sigma = (\rho, j)$, где ρ и ρ' – эпиморфизмы с простым ядром $T = \operatorname{Ker} \rho' \simeq \operatorname{Ker} \rho$, лежащим в $\mathcal{E}_3$. Этот биуниверсальный квадрат приводит к следующей коммутативной диаграмме с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (-, K') \arrow[r] \arrow[d] & (-, X') \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (-, K) \arrow[r] & (-, X) \arrow[r] & U \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где ввиду Леммы 2.4 h – мономорфизм и $\mathrm{Coker}\, h \simeq F_{\eta'}$. Теперь индукцией по $n = k - l_R(a(X))$ устанавливаем, что U имеет конечную длину.

Следствие 4.2. *Пусть дана короткая точная последовательность в* $\mathrm{mod}\, R$ *вида* (4.1)*, где* K*,* $X \in \mathcal{E}_2$*,* $S \in \mathcal{E}_1$*. Тогда* $\mathrm{Coker}\,(-, j) \in \mathcal{F}_0$.

Доказательство. Если $l_R(S) > 1$, то представим j в виде композиции мономорфизмов $K \xrightarrow{\alpha} X' \xrightarrow{\beta} X$, где $X' = \mathrm{Rad}\, X$, β – вложение. Тогда получаем короткую точную последовательность в $\mathcal{F}$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(-, \alpha) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(-, j) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(-, \beta) \longrightarrow 0.$$

Из доказательства Предложения 4.1 следует, что функтор $\mathrm{Coker}\,(-, \beta) \in \mathcal{F}_0$. Теперь индукцией по $l_R(S)$ получаем требуемое утверждение.

Предложение 4.3. *Если* $M \in \mathcal{E}_1$*, то* $T_0(-, M)$ *имеет конечную длину в* $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.

Доказательство проводится аналогично доказательству Предложения 3.2.

Предложение 4.4. *Если* $P \in \mathcal{E}_2$ *– неразложимый проективный модуль, то* $T_0(-, P)$ *– простой объект в* $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.

Доказательство. Аналогично Предложению 3.3 получаем, что $T_0(-, P) \neq 0$. Предположим, что имеются морфизмы $(-, X) \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{i} (-, P)$, где φ – ненулевой эпиморфизм, i – вложение, $X \in \mathrm{ind}\, R$. Пусть $\theta\colon X \to P$ – R-гомоморфизм такой, что $(-, \theta) = i\varphi$. Предположим сначала, что $X \in \mathcal{E}_3$. Поскольку носитель $\mathrm{Supp}\,(-, X)$ лежит в $\mathcal{E}_3$, то $(-, X)$ имеет конечную длину, и следовательно, U также имеет конечную длину. Пусть теперь $X \in \mathcal{E}_2$. Тогда θ – мономорфизм, X проективен и $U \simeq (-, X)$. Тогда получаем короткую точную последовательность $0 \to X \xrightarrow{\theta} P \to M \to 0$, где $M \in \mathcal{E}_1$. Если $X = \mathrm{Rad}\, P$, то $\mathrm{Coker}\,(-, \theta)$ прост по Предложению 2.1. В общем случае индукцией по длине $l = l_R(M)$ доказывается, что $(-, P)/U$ имеет конечную длину, равную l.

Предложение 4.5. *Рассмотрим биуниверсальный квадрат в*

$$\mathcal{J}: \begin{array}{ccc} a(X) & \xrightarrow{j'} & X \\ {\scriptstyle \nu'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\ a(M) & \xrightarrow{j} & M, \end{array} \tag{4.2}$$

где $X, M \in \mathcal{E}_2$, j, j' – вложения, ν, ν' – эпиморфизмы с простым ядром $T = \operatorname{Ker}\nu' = \operatorname{Ker}\nu$. Построим соответствующую короткую точную последовательность

$$\eta : 0 \longrightarrow a(X) \longrightarrow a(M) \oplus X \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Тогда T_0F_η – простой объект в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.

Доказательство. Положим $X' = \operatorname{Rad} X$, $M' = \operatorname{Rad} M$. Тогда можно построить диаграмму, состоящую из биуниверсальных квадратов:

$$\begin{array}{ccccc} a(X) & \xrightarrow{\beta'} & X' & \xrightarrow{\alpha'} & X \\ {\scriptstyle \nu'}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\ a(M) & \xrightarrow{\beta} & M' & \xrightarrow{\alpha} & M, \end{array} \tag{4.3}$$

где α', α – вложения, $\alpha\beta = j$, $\alpha'\beta' = j'$, причем правый квадрат соответствует AR-последовательности $\tilde{\eta}$, оканчивающейся в M. Используя Предложение 2.5, получаем короткую точную последовательность в $\mathcal{F}$:

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F_\eta \longrightarrow F'' \longrightarrow 0,$$

где F' соответствует левому квадрату в (4.3), а F'' соответствует правому квадрату в (4.3). Тогда по Предложению 2.1 F'' прост в $\mathcal{F}$. Применяя предыдущее рассуждение к F' вместо F_η, по индукции строим бесконечную строго убывающую цепь подфункторов в F_η. Таким образом, $T_0F_\eta \neq 0$.

Далее, пусть U – конечно порожденный подфунктор в F_η, i: $U \to F_\eta$ – соответствующее вложение, $\varphi : (-, N) \to U$ – некоторый ненулевой эпиморфизм, где $N \in \operatorname{mod} R$. Ввиду проективности функтора $(-, N)$ в категории $\mathcal{F}$ существует R-гомоморфизм $\theta : N \to M$ такой, что $\rho(-, \theta) = i\varphi$, где $\rho : (-, M) \to F_\eta$ – канонический эпиморфизм. Рассмотрим разложение $N = \bigoplus\limits_{t=1}^{S} N_t$, где $N_t \in \operatorname{ind} R$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_S)$, $\theta_t : N_t \to M$. Если определить $U_t = \varphi(-, N_t)$, то ясно, что $U = \sum\limits_t U_t$. Если некоторый модуль N_t лежит в $\mathcal{E}_3$, то $\operatorname{Im}\theta_t \subset a(M)$, т.е. θ_t проходит через $j : a(M) \to M$, и потому $\operatorname{Im}(-, \theta_t) \subset \operatorname{Ker}\rho$. Следовательно, соответствующее $U_t = 0$. Аналогично, если для некоторого N_t, принадлежащего $\mathcal{E}_2$, $\operatorname{Ker}\theta_t \neq 0$, то θ_t проходит через $\nu : X \to M$, и следовательно, $U_t = 0$. Так как $U \neq 0$, то для некоторого t $N_t \in \mathcal{E}_2$, а соответствующее θ_t – мономорфизм. Ввиду Следствия 4.2 $\operatorname{Coker}(-, \theta_t)$ имеет конечную длину. Кроме того, существуют эпиморфизмы $\operatorname{Coker}(-, \theta_t) \to \operatorname{Coker}(-, \theta) \to F_\eta / U$, и потому F_η / U также имеет конечную длину.

Следствие 4.6. *Пусть η – короткая точная последовательность, соответствующая биуниверсальному квадрату $\mathcal{J}$ вида* (4.2)*, в котором $X, M \in \mathcal{E}_2$, j, j' – вложения, а $\nu : X \to M$ – некоторый эпиморфизм. Тогда $T_0 F_\eta$ имеет конечную длину в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.*

Доказательство. Если модуль $T = \operatorname{Ker}\nu \simeq \operatorname{Ker}\nu' \in \mathcal{E}_3$ не прост, то построим следующую диаграмму, состоящую из биуниверсальных квадратов, объемлющий квадрат которой совпадает с данным квадратом $\mathcal{J}$:

$$\begin{array}{ccccc} a(X) & \xrightarrow{\alpha'} & a(X') & \xrightarrow{\beta'} & a(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\alpha} & X' & \xrightarrow{\beta'} & M; \end{array} \tag{4.4}$$

здесь горизонтальные стрелки изображают естественные эпиморфизмы, вертикальные стрелки – вложения, причем ядро $\operatorname{Ker}\alpha' \simeq \operatorname{Ker}\alpha \subset T$ просто, а $T/\operatorname{Ker}\alpha \simeq \operatorname{Ker}\beta$. По Предложению 2.5 имеет место короткая последовательность в категории $\mathcal{F} : 0 \to F' \to F_\eta \to F'' \to 0$, где $F'(F'')$ соответствует левому (правому) квадрату в (4.4). По Предложению 4.5 $T_0 F'$ прост. Тогда индукцией по $l_R(T)$ получаем, что $T_0 F_\eta$ имеет конечную длину.

Предложение 4.7. *Пусть $M \in \mathcal{E}_2$. Тогда $T_0(-, M)$ имеет конечную длину в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$.*

Доказательство. Если M проективен, то это утверждение содержится в Предложение 4.4. Если же M не проективен, то можно построить биуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} a(P) \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\nu'"'] & P \arrow[d, "\nu"] \\ a(M) \arrow[r, "j"] & M, \end{tikzcd}$$

где $P \in \mathcal{E}_2$ – проективный модуль, ν', ν – эпиморфизмы, j, j' – вложения. Пусть η – короткая точная последовательность, соответствующая этому квадрату, и построим индуцированную последовательностью η точную последовательность

$$0 \longrightarrow (-, a(P)) \longrightarrow (-, a(M) \oplus P)) \longrightarrow (-, M) \longrightarrow F_\eta \longrightarrow 0.$$

Применяя к ней функтор T_0, получаем короткую точную последовательность в $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$:

$$0 \longrightarrow T_0(-, P) \longrightarrow T_0(-, M) \longrightarrow T_0 F_\eta \longrightarrow 0,$$

и требуемое утверждение следует из Предложения 4.4 и Следствия 4.6.

Таким образом, из Предложений 4.3 и 4.7 вытекает утверждение Теоремы 1.1 для кольца R типа (Б).

Литература

1. M. Auslander, *Coherent functors.* In: Proc. of the Conf. on Categorical Algebra (La Jolla, 1965). Springer, 1966, pp. 189–231.
2. W. Geigle, *Krull dimension and artin algebras.* — Lect. Notes Math. **1177** (1986), 135–155.
3. M. Auslander, *Representation theory of artin algebras, II.* — Commun. Algebra **1**, No. **4** (1974), 269–310.
4. W. Geigle, *The Krull–Gabriel dimension of the representation theory of a tame hereditary artin algebras and applications to the structure of exact sequences.* — Manuscr. Math. **54**, No. **1/2** (1985), 83–106.
5. Ю. А. Дрозд, *Об обобщенно однорядных кольцах.* — Матем. заметки **18**, **No. 5** (1975), 705–710.
6. G. O. Michler, *Structure of semi-pekfect hereditary noetherian rings.* — J. Algebra **13**, No. **3** (1969), 327–344.
7. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* — Препринт ИМ-75-1, Ин-т Мат. АН УССР (1975), Киев.
8. В. В. Кириченко, *Обобщенно однорядные кольца.* — Матем. сб. **99, No. 4** (1976), 559–581.
9. S. Singh, *Serial right noetherian rings.* — Canad J. Math. **36**, No. **1** (1984), 22–37.

10. R. B. Warfield, *Serial rings and finitely presented modules.* — J. Algebra **37**, No. **2** (1975), 187–222.
11. P. Gabriel, *Auslander–Reiten sequences and representation-finite algebras.* — Lect. Notes Math. **831** (1980), 1–71.
12. А. И. Генералов, *Индуктивно замкнутые собственные классы над ограниченными hnp-кольцами.* — Алгебра и логика **25, No. 4** (1986), 384–404.
13. А. И. Генералов, *Собственные классы коротких точных последовательностей над нетеровыми полуцепными кольцами.* — В кн.: Кольца и модули. Предел. теоремы теор. вер. Вып.I. Ленинград, 1986, с. 87–102.
14. А. И. Генералов, *Группы Гротендика и короткие точные последовательности над нетеровыми кольцами.* — В кн.: Абелевы группы и модули. Вып.9. Томск, 1990, с. 7–30.
15. C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms.* — Lect. Notes Math., 1099 (1984).
16. P. Gabriel, *Des catégories abeliennes.* — Bull. Soc. Math. France **90**, No. **3** (1962), 323–448.
17. D. Eisenbud and J. C. Robson, *Hereditary noetherian prime rings.* — J. Algebra **16**, No. **1** (1970), 86–104.

Generalov A. I. Krull dimension of the module category over right noetherian serial rings.

For a right noetherian serial ring R which is not artinian, it is proved that the Krull dimension of the category of finitely generated right R-modules equals one.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 17 февраля 1997 г.