Е. В. Дыбкова

НАДДИАГОНАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЫ ДЛЯ ХОРОШЕГО ФОРМЕННОГО КОЛЬЦА НАД ПОЛЕМ

Около 20 лет назад профессором З. И. Боревичем была опубликована серия статей по описанию подгрупп линейных групп над кольцами с помощью сетей идеалов. Предлагаемая работа применяет этот подход к изучению решетки подгрупп гиперболической унитарной группы, содержащих все диагональные унитарные матрицы, над широким классом полей (по поводу определения гиперболической унитарной группы см. [10, 11] и [6]). Как и в случае полной линейной группы (см. [1, 2]), каждая такая подгруппа оказывается связанной с сетью идеалов соответствующего порядка, и в этом смысле описание решетки наддиагональных подгрупп является стандратным. Для симплектических, ортогональных и классических унитарных групп четных размерностей доказываемая здесь теорема обобщает соответствующие результаты работ [3–5, 8, 9]. Методика нашего доказательства весьма близка к рассуждениям, использованным в [4] и [5], и в значительной мере отличается от идей работ [8] и [9], где существенно использована специфика локальных полей.

Доказательство большинства вспомогательных утверждений весьма громоздки и имеют чисто технический характер, поэтому мы ограничиваемся указанием схемы рассуждений, опуская детали. Используемые без расшифровки терминология и обозначения взяты из [6] и [7].

Начнем с объяснения того, о каких хороших форменных кольцах здесь идет речь. Пусть R – поле с инволюцией$^{-}$ (возможно, тривиальной), λ – его элемент, для которого $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Напомним (см. [11], 5.2B), что все форменные кольца (R, Λ) в этой ситуации описываются следующим образом. Если инволюция действует на R нетривиально и R_0 – подполе неподвижных относительно инволюции элементов, то R/R_0 – квадратичное расширение и каждое λ, удовлетворяющее указанному условию, однозначно определяет форменный параметр $\Lambda = \alpha R_0$ при не-котором ненулевом α из R (гиперболические унитарные группы $U(2n, R, \Lambda)$ называются в этом случае классическими унитарными группами, все они сопряжены между собой в полной линейной группе $GL(2n, R)$). Если инволюция на R тривиальна, то $\lambda = \pm 1$; при $\mathrm{char} R \neq 2$ любое из двух значений λ однозначно определяет форменный параметр: $\Lambda = 0$ при $\lambda = 1$ (группа $U(2n, R, \Lambda)$ в этом случае является ортогональной группой четной размерности) и $\Lambda = R$ при $\lambda = -1$ (здесь $U(2n, R, \Lambda)$ – симплектическая группа). Сложнее дело обстоит с тривиальной инволюцией при $\mathrm{char} R = 2$ – в этом случае $\lambda = 1$ и все возможные форменные параметры Λ – это различные R^2-подпространства поля R; таким образом, в этой ситуации кроме ортогональной группы $U(2n, R, 0)$ и симплектической группы $U(2n, R, R)$ возникает целая серия промежуточных гиперболических унитарных групп (следуя Дьедонне, Хан и О'Мира в [11] называют их дефективными ортогональными группами). Форменное кольцо (R, Λ) над полем R мы называем *хорошим*, если для него выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

1) $\Lambda = 0$ или
2) инволюция на R нетривиальна или
3) $\mathrm{char} R \neq 2$.

Говоря другими словами, из всех гиперболических унитарных групп над полями за пределами нашего рассмотрения остались симплектическая группа над полем характеристики 2 и дефективные ортогональные группы.

Сформулируем теперь сам результат.

Теорема. *Пусть (R, Λ) – хорошее форменное кольцо над полем R и R_0 – его подполе элементов, не меняемых инволюцией, причем $\mathrm{card}\, R \geqslant 13$ и $\mathrm{card}\, R_0 \geqslant 7$. Тогда для любой подгруппы H гиперболической унитарной группы $U(2n, R, \Lambda)$, содержащей все диагональные унитарные матрицы ($\Delta \leqslant H \leqslant U$), найдется такая единственная точная D-сеть идеалов σ порядка $2n$, что H заключена между надэлементарной сетевой подгруппой и нормализатором обычной сетевой подгруппы в U, соответствующими этой сети:*

$$U_0(\sigma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma).$$

Мы начнем доказательство теоремы с построения максимальной точной D-сети, элементарная сетевая подгруппа которой содержится в данной наддиагональной подгруппе. Для этого при любой подгруппе H группы U положим

$$\Gamma_i = \{\alpha \in R \cap \Lambda_i \mid T_{i,-i}(\alpha) \in H\}$$

и рассматрим набор из $(2n)^2$ подмножеств кольца R

$$\sigma_{ij} = \{\alpha \in R \mid T_{ij}(\alpha) \in H\} \quad \text{при} \quad i \neq \pm j,$$

$$\sigma_{i,-i} = \sum_{k \neq \pm i} \sigma_{ik}\, \sigma_{k,-i} + \langle \Gamma_i \rangle \quad \text{и} \quad \sigma_{ii} = R$$

(все встречающиеся здесь индексы принадлежат множеству $\Omega = \{1, \dots, n, -n, \dots, -1\}$).

Лемма 1. *Пусть R – поле с инволюцией, (R, Λ) – хорошее форменное кольцо над этим полем и* $\operatorname{card} R \geqslant 3$. *Если H – подгруппа U, нормализуемая всеми диагональными унитарными матрицами, то построенный выше набор $\sigma = (\sigma_{ij})$ – точная D-сеть идеалов порядка $2n$ в (R, Λ) и $EU(\sigma) \leqslant H$. Если $\tau = (\tau_{ij})$ – другая точная сеть, для которой $U(\tau) \leqslant H$, то $\tau_{ij} \leqslant \sigma_{ij}$ при всех индексах i и j (другими словами, указанная сеть σ является единственной максимальной среди всех точных, чьи элементарные сетевые подгруппы содержатся в H).*

Доказывается эта лемма непосредственной проверкой с использованием коммутационных соотношений для унитарных трансвекций (см., например, [10]). Единственная трудность возникает с установлением следующего факта: если $\alpha \in \sigma_{i,-i} \cap \Lambda_i$, то $\alpha \in \Gamma_i$. Для $\Lambda = 0$ этот факт очевиден, а в остальных случаях достаточно использовать равенство $\Lambda = \Lambda_{\min}$ для хорошего форменного кольца.

Далее мы покажем, что именно построенная только что сеть σ обладает всеми указанными в формулировке теоремы свойствами, но сначала рассмотрим случай $n = 1$. В случае произвольного поля с инволюцией произведение $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha}$ для всякого α из R мы будем называть *нормой* этого элемента. Мультипликативная группа норм всех ненулевых элементов обозначена через T (таким образом, $T = R^{*2}$, если инволюция на R тривиальна).

Лемма 2. *Пусть форменное кольцо (R, Λ) удовлетворяет всем условиям теоремы и $\Delta(2, R, \Lambda) \leqslant H \leqslant U(2, R, \Lambda)$. Тогда для ассоциированной с H в силу леммы* 1 *точной D-сети σ имеются включения $U_0(\sigma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma)$.*

Доказательство. Наше утверждение тривиально при $\Lambda = 0$, поскольку в этом случае имеется только 2 наддиагональные подгруппы Δ и U (см. [11], 5.3A) и для единственной точной D-сети $\sigma_1 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ выполнены равенства $U_0(\sigma_1) = \Delta$ и $N_U(\sigma_1) = U$. При $\Lambda \neq 0$ не только σ_1, но и все остальные D-сети

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} R & 0 \\ R & R \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$$

точны, причем утверждение леммы очевидно, если σ совпадает с одной из этих трех сетей. Поэтому нам достаточно доказать мономиальность любой наддиагональной группы, не содержащей нетривиальных трансвекций.

Действующую на R инволюцию можно считать нетривиальной – иначе наше утверждение следует из [12] (теорема 1). Проведя при необходимости скэйлинг форменного кольца (см. [11], пример 4 из 5.1. C), будем считать $\lambda = 1$ и $\Lambda = R_0$. Если H ассоциирована с сетью σ_1 и немономиальна, то она содержит произведение $T_{-1,1}(\alpha)T_{1,-1}(\beta) = x(\alpha\beta)$ при некоторых ненулевых $\alpha, \beta \in R_0$, $\alpha\beta \neq -1$ (каждая из трансвекций этого произведения группе H, конечно, не принадлежит). Для бесконечного поля R наше утверждение легко следует из теоремы 1 и предложения 3 [12]: достаточно заметить, что $x(\alpha, \beta)$ принадлежит пересечению $H \cap SL(2, R_0)$, содержащему все матрицы $d_1(\theta)$ при $\theta \in R_0^*$. Считая дальше поле R конечным, учтем, что в этой ситуации $T = R_0^*$. При любом $\theta \in R^*$ группе H принадлежит матрица

$$X(\theta) = x(\alpha, \beta)\, d_1(\theta)\, x^{-1}(\alpha, \beta) =$$
$$= \theta \begin{pmatrix} 1 + \alpha\beta - \frac{\alpha\beta}{N(\theta)} & (\frac{1}{N(\theta)} - 1)\beta \\ (1 - \frac{1}{N(\theta)})\alpha(1 + \alpha\beta) & \frac{1+\alpha\beta}{N(\theta)} - \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Внедиагональные элементы этой матрицы равны 0 только при $N(\theta) = 1$, а диагональные обращаются в 0 при $N(\theta) = \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}$ и $N(\theta) = \frac{1+\alpha\beta}{\alpha\beta}$ соответственно. Таким образом, при $2\alpha\beta \neq -1$ мы можем найти такое $\theta \in R^*$, что указанная матрица $X(\theta)$ содержит ровно один нулевой элемент, из чего легко следует наличие в H нетривиальной трансвекции. В случае $2\alpha\beta = -1$ (и $\mathrm{char} R \neq 2$) достаточно $x(\alpha, \beta)$ заменить на $d_1^{-1}(\frac{1}{2}(\theta + \overline{\theta}^{-1}))X(\theta)$, выбрав ненулевой θ, для которого $N(\theta)^4 \neq 1$ (это возможно из-за условия $\mathrm{card}\, R_0 > 5$). Лемма 2 доказана.

Единственность точной D-сети, для которой $U_0(\sigma) \leqslant H \leqslant N_U(\sigma)$, вытекает из следующего утверждения о сетях произвольного порядка, справедливого не только для хороших форменных колец.

Лемма 3. *Пусть (R,Λ) – форменное кольцо над телом R и $\operatorname{card} R \geqslant 5$. Если для некоторых индексов $i \neq j$ и α из R унитарная трансвекция $T_{ij}(\alpha)$ содержится в нормализаторе $N_U(\sigma)$ некоторой D-сетевой подгруппы $U(\sigma)$, то эта трансвекция содержится в $EU(\sigma)$.*

Для доказательства достаточно использовать коммутационные соотношения и пример из 6.1.A в [11].

Итак, при $n = 1$ наша теорема полностью доказана. При установлении включения $H \leqslant N_U(\sigma)$ для $n > 1$ мы используем формулируемое ниже следствие леммы, доказанной в [7].

Лемма 4. *Пусть (R,Λ) – форменное кольцо, причем R – поле и $\operatorname{card} R \geqslant 5$, σ – точная D-сеть в (R,Λ), матрица a принадлежит группе U. Тогда a принадлежит $N_U(\sigma)$ тогда и только тогда, когда при всех индексах i, j, k, l выполняются включения*

$$a_{ik}\,\sigma_{kl}\,a'_{lj} \leqslant \sigma_{ij}.$$

Приводимые далее несколько лемм помогут нам в дальнейшем проверить выполнение включений леммы 4. Первая из них аналогична лемме 6 из [5] и лемме 5 из [4], ее доказательство мы опускаем.

Лемма 5. *Пусть (R,Λ) – форменное кольцо, причем R – поле и $\operatorname{card} R \geqslant 5$. Если H – подгруппа U, нормализуемая группой Δ, a – матрица из этой подгруппы и для некоторого индекса r имеем $a_{rj} = 0$ при всех $j \neq r$, то для всех $i \neq \pm r$ трансвекции $T_{ir}(a_{ir})$ лежат в H.*

Следующие три утверждения переносят на унитарную ситуацию соответствующие факты, установленные в [4] для ортогональной группы при $\operatorname{char} R \neq 2$ (см. предложения 2, 3 и лемму 9); доказательство при этом, конечно, существенно усложняется.

Лемма 6. *Пусть (R,Λ) – форменное кольцо, причем R – поле и $\operatorname{card} R \geqslant 7$. Если $\Delta \leqslant H \leqslant U$, $a \in H$ и для некоторых индексов*

r и k элемент a_{rk} равен нулю, то при всех $i \neq \pm r$ трансвекции $T_{ir}(a_{ik}\,a'_{kr})$ и $T_{ir}(a_{i,-k}\,a'_{-k,r})$ принадлежат H.

Доказательство проводится в несколько шагов, остановимся на основных моментах; через $b(\theta)$ обозначена матрица $b(\theta) = ad_{-k}(\theta)\,a^{-1}$. 1) $a_{r,-k}\,a'_{-k,r} = 1$ – матрица $c(\theta,\varkappa,\eta) = b(\theta)\,d_r(\varkappa)\,b(\eta^{-1})$ для различных обратимых θ и η, отличных от 1, и $\varkappa = \frac{\eta(\theta-1)}{\theta(\eta-1)}$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы, далее варьируем θ и η. 2) $a_{r,-k} = 0$ – лемме 5 удовлетворяет $b(\theta)$. 3) $a'_{-k,r} = 0$ – матрица $b(\theta)$ удовлетворяет условию первой части. 4) $\mu = a_{r,-k}\,a'_{-k,r} \neq 0,1$ и $\mu+\overline{\mu} \neq 1$ – при $\theta = \frac{\mu-1}{\mu}$ применяем вторую часть к матрице $b(\theta)$. 5) $\mu+\overline{\mu} = 1$ – при θ, $\eta \neq 0,1,-\frac{\overline{\mu}}{\mu}$, $\varkappa = \frac{(\theta-1)(\eta\mu+\overline{\mu})}{(\eta-1)(\theta\mu+\overline{\mu})}$ и $\theta \neq \eta$ матрица $c(\theta,\varkappa,\eta)$ удовлетворяет условию леммы 5 (здесь приходится рассматривать два подслучая $\mu \notin R_0$ и $2\mu = 1$ при $\mathrm{char} R \neq 2$).

В следующей лемме, как и в [4], для матрицы a через $\Delta^{kl}_{ij}(a)$ обозначен ее минор 2-го порядка $\Delta^{kl}_{ij}(a) = a_{ik}\,a_{jl} - a_{il}a_{jk}$.

Лемма 7. *Пусть (R,Λ) – форменное кольцо, причем R – поле и $\mathrm{card}\,R \geqslant 7$, $\Delta \leqslant H \leqslant U$, $a \in H$. Предположим, что для некоторой четверки индексов i, r, k, l $(r \neq \pm i, \pm k)$ выполнены следующие два условия*

1) 6 элементов a_{rl}, $a_{r,-l}$, a_{kl}, $a_{k,-l}$, $a_{-k,l}$, $a_{-k,-l}$ матрицы a отличны от 0 и

2) ненулевыми являются два минора $\Delta^{l,-l}_{i,-r}(a)$ и $\Delta^{l,-l}_{k,-k}(a)$ этой матрицы.

Тогда при любом α из R трансвекция $T_{ir}(\alpha)$ принадлежит H.

Основная идея доказательства весьма проста: для матрицы $b = b(\theta) = ad_e(\theta)a^{-1}$ при выполнении условия 1) элемент b_{rk} равен 0 либо при $N(\theta) = 1$, если $a_{rl}\,a'_{lk} + a_{r,-l}\,a'_{-l,k} = 0$, либо только при $\theta = 1$, если $a_{rl}\,a'_{lk} + a_{r,-l}\,a'_{-l,k} \neq 0$ и $N(a_{rl}\,a'_{lk}) = N(a_{r,-l}\,a'_{-l,k})$, либо при $\theta = 1$ и еще одном значении θ, имеющем неединичную норму, в оставшемся случае. Само доказательство вновь приходится делить на части, причем наиболее трудоемкими оказываются вычисления при $i = \pm k$. 1) $N(a_{rl}\,a'_{lk}) \neq N(a_{r,-l}\,a'_{-l,k})$ или $N(a_{rl}\,a'_{l,-k}) \neq N(a_{r,-l}\,a'_{-l,-k})$ – выбираем θ с неединичной нормой, для которого b_{rk} или $b_{r,-k}$ обращается в 0, и применяем лемму 6 к матрице $b(\theta)$ (при $i = \pm k$ в осложненных случаях заменяем a на $T_{ri}(\alpha)a$ для подходящего α). Далее считаем соответствующие пары норм одинаковыми (при этом условие на миноры позволяет в оставшихся частях доказательства считать исключенным случай тривиальной инволюции для $\mathrm{char} R = 2$). 2) $a_{rl}\, a'_{lk} + a_{r,-l}\, a'_{-l,k} = 0$ или $a_{rl}\, a'_{l-k} + a_{r,-l}\, a'_{-l,-k} = 0$ (эта часть рассуждений особенно громоздка при $i = \pm k$) – берем $\theta \neq 0, 1$ с единичной нормой и при $i \neq \pm k$ применяем лемму 6 к матрице $b(\theta)$, этот же прием годится при $i = \pm k$, если инволюция нетривиальна или $\Lambda = 0$; в оставшемся симплектическом случае для $\mathrm{char} R \neq 2$ осложнения возникают только при $a_{kl}\, a'_{lk} = a_{k,-l}\, a'_{-l,k} = \frac{1}{4}$ – в этой ситуации заменяем a на $b(\eta)$, подбирая η так, чтобы $b(\eta)$ удовлетворяла условиям первой части доказательства при $l = k$. Далее считаем обе суммы ненулевыми, что в силу условий на миноры означает нетривиальность инволюции. 3) $a_{kl}\, a'_{l,-k} + a_{k,-l}\, a'_{-l,-k} = 0$ или $a_{-k,l}\, a'_{lk} + a_{-k,-l}\, a'_{-l,k} = 0$ – применяем лемму 6 к матрице $b(\theta)$ для θ, не принадлежащего R_0 и имеющего единичную норму; в случае $i = \pm k$ заменяем при необходимости a на $T_{r,-i}(\alpha)a$ для подходящего α. Далее обе суммы считаем ненулевыми и полагаем $\mu = a_{kl}\, a'_{lk} + a_{k,-l}\, a'_{-l,k}$. 4) $\mu + \overline{\mu} = 1$ – сначала показываем принадлежность H трансвекций $T_{r,\pm k}(\alpha)$ для любых α из R, рассматривая матрицу $b(\theta)d_k(\eta)b(\theta^{-1})$ при $N(\theta) = N(\eta) = 1$ и применяя к ней лемму 6, а затем эту же лемму применяем к одному из произведений $T_{r,\pm k}(\alpha)a$ для подходяшего α. 5) Оставшийся случай – подбираем θ с единичной нормой так, чтобы матрица $b(\theta)$ удовлетворяла условию первой части доказательства при $l = k$.

Лемма 8. *Пусть (R, Λ) – форменное кольцо, причем R – поле, $\mathrm{card}\, R \geqslant 13$ и $\mathrm{card}\, R_0 \geqslant 7$, $\Delta \leqslant H \leqslant U$. Если для некоторой матрицы a из H и для некоторой тройки индексов i, j, r $(i \neq \pm j)$ 8 элементов $a_{\pm i,\pm r}$, $a_{\pm j,\pm r}$ этой матрицы отличны от 0, то трансвекция $T_{ij}(\alpha)$ принадлежит H при всяком α.*

При доказательстве считаем, что хотя бы один из миноров $\Delta^{r,-r}_{i,-i}(a)$ или $\Delta^{r,-r}_{i,-j}(a)$ равен 0, – иначе работает лемма 7. Рассматривая несколько случаев, показываем, что при $N(\theta) \neq 1$ матрица $b = b(\theta) = ad_r(\theta)a^{-1}$ удовлетворяет условиям леммы 7 для некоторой четверки индексов. 1) $\Delta^{r,-r}_{i,-i}(a) = 0$ – подбираем θ так, чтобы ненулевыми были элементы $b_{j,\pm i}$, $b_{\pm i,\pm i}$ и миноры $\Delta^{i,-i}_{i,-i}(b)$, $\Delta^{i,-i}_{i,-j}(b)$. 2) $\Delta^{r,-r}_{j,-j}(a) = 0$ – обеспечиваем обратимость элементов $b_{-i,\pm j}$, $b_{\pm j,\pm j}$ и миноров $\Delta^{j,-j}_{j,-j}(b)$, $\Delta^{j,-j}_{i,-j}(b)$. 3) Оба минора $\Delta^{r,-r}_{i,-i}(a)$ и $\Delta^{r,-r}_{j,-j}(a)$ обратимы и $\Delta^{r,-r}_{i,-j}(a) = 0$ – добиваемся обратимости элементов $b_{j,\pm j}$, $b_{\pm i,\pm j}$ и миноров $\Delta^{j,-j}_{i,-i}(b)$, $\Delta^{j,-j}_{i,-j}(b)$.

Приступим теперь к непосредственной проверке включений леммы 4. При $k = l$ их выполнение следует из лемм 9 и 10.

Лемма 9. *Пусть (R, Λ) – форменное кольцо, причем R – поле, $\operatorname{card} R \geqslant 13$ и $\operatorname{card} R_0 \geqslant 7$, $\Delta \leqslant H \leqslant U$. Если $a \in H$, то при всех индексах i, j, k $(i \neq \pm j)$ трансвекция $T_{ij}(a_{ik}\, a'_{kj})$ принадлежит H.*

Доказательство похоже на рассуждения в предыдущей лемме. 6 элементов a_{ik}, $a_{-i,k}$. $a_{-i,-k}$, a_{jk}, $a_{j,-k}$ и $a_{-j,-k}$ можно считать ненулевыми – иначе утверждение либо тривиально, либо следует из леммы 6; при ненулевых $a_{i,-k}$ и $a_{-j,k}$ применяем лемму 8. Далее считаем $a_{i,-k}\, a_{-j,k} = 0$, рассматриваем матрицу $b = b(\theta) = ad_k(\theta)\, a^{-1}$ и подбираем θ так, чтобы b удовлетворяла условиям леммы 7. Для этого достаточно сделать ненулевыми $b_{j,\pm j}$, $b_{\pm i,\pm j}$, $\Delta^{j,-j}_{i,-i}(b)$ и $\Delta^{j,-j}_{i,-j}(b)$, если либо $a_{i,-k} = a_{-j,k} = 0$, либо $a_{i,-k}$ и $\Delta^{k,-k}_{i,-i}(a)$ отличны от 0, либо ненулевыми являются $a_{-j,k}$ и $\Delta^{k,-k}_{j,-j}(a)$. При $a_{i,-k} \neq 0$ и $\Delta^{k,-k}_{i,-i}(a) = 0$ достаточно добиться обратимости $b_{j,\pm i}$, $b_{\pm i,\pm i}$, $\Delta^{j,-j}_{j,-j}(b)$ и $\Delta^{j,-j}_{i,-j}(b)$, а при $a_{-j,k} \neq 0$ и $\Delta^{k,-k}_{j,-j}(a) = 0$ – обратимости $b_{-i,\pm j}$, $b_{\pm j,\pm j}$, $\Delta^{j,-j}_{j,-j}(b)$ и $\Delta^{j,-j}_{i,-j}(b)$.

Лемма 10. *Пусть для поля R и форменного кольца (R, Λ) выполнены все условия теоремы, $\Delta \leqslant H \leqslant U$ и σ – ассоциированная с H в силу леммы 1 точная D-сеть. Если $a \in H$, то при всех индексах i и k произведение $a_{ik}\, a'_{k,-i}$ принадлежит идеалу $\sigma_{i,-i}$.*

В доказательстве считаем произведение $a_{ik}\, a'_{k,-i}$ ненулевым, $n \geqslant 2$ и проводим индукцию по n. Предыдущая лемма и определение сети позволяют считать $a'_{kj}\, a_{jk} = a'_{kj}\, a_{j,-k} = a'_{-k,j}\, a_{jk} = 0$ при всех $j \neq \pm i$, что означает существование $r \neq \pm i$, для которого $a_{-r,k} = a_{-r,-k} = 0$. Поэтому в матрице $b = b(\theta) = ad_k(\theta)a^{-1}$ для любого θ имеем $b_{sr} = 0$ при всех $s \neq r$ и $b_{-r,t} = 0$ при всех $t \neq -r$. Рассматриваем группу U^r унитарных матриц порядка $2n$, у которых все внедиагональные элементы r-го столбца и $(-r)$-ой строки нулевые, и ее гомоморфизм φ^r, вычеркивающий строки и столбцы с номерами $\pm r$, в группу $U(2n-2, R, \Lambda)$. Понятно, что $H^r = \varphi^r(U^r \cap H)$ содержит $\Delta(2n-2, R, \Lambda)$; в силу леммы 1 с H^r ассоциирована некоторая точная D-сеть τ порядка $2n-2$. С другой стороны, естественным образом возникает другая (не обязательно точная) D-сеть σ^r порядка $2n-2$, получающаяся из σ вычеркиванием строк и столбцов с номерами $\pm r$. Используя предыдущую лемму и точность τ, устанавливаем включение $\tau_{lj} \subseteq \sigma_{lj}$ при всех l и j, отличных от $\pm r$. По индукционному предположению $b_{ii}\, b'_{i,-i} \in \tau_{i,-i}$ – остается выбрать θ так, чтобы оба сомножителя были ненулевыми.

Заканчивает доказательство нашей теоремы проверка оставшихся включений.

Лемма 11. *Если поле R, форменное кольцо (R, Λ) и группа H удовлетворяет условиям теоремы, σ – ассоциированная с H в силу леммы 1 точная D-сеть и $a \in H$, то при всех i, j, k, l имеются включения $a_{ik}\, \sigma_{kl}\, a'_{lj} \subseteq \sigma_{ij}$.*

В доказательстве для ненулевого σ_{kl} достаточно применить лемму 9 или лемму 10 к матрицам $aT_{kl}(\alpha)a^{-1}$ и $a\, d_k(\theta)\, T_{kl}(\alpha)a^{-1}$, взяв нетривиальную трансвекцию $T_{kl}(\alpha)$ из H, если $k \neq \pm l$ или $k = -l$ при ненулевом Λ, и различные обратимые θ. Для $\Lambda = 0$ и $\sigma_{k,-k} = R$ находим $r \neq \pm k$, при котором $\sigma_{kr} = \sigma_{r,-k} = R$, выбираем индекс l так, чтобы произведение $a'_{rl}\, a_{lr}$ было обратимым, а затем используем включения $a_{ik}\, \sigma_{kr}\, a'_{rl} \subseteq \sigma_{il}$ и $a_{lr}\, \sigma_{r,-k}\, a'_{-k,j} \subseteq \sigma_{lj}$.

Теорема полностью доказана. Добавим к сказанному, что для любой точной D-сети σ над телом подгруппа $U_0(\sigma)$ нормальна в $N_U(\sigma)$. При $\Lambda \neq 0$ это очевидно, поскольку $U_0(\sigma)$ совпадает с $U(\sigma)$ в силу теоремы 2 из [6]. При $\Lambda = 0$ по этой же теореме группа $U(\sigma)$ совпадает с произведением $U_0(\sigma)$ и своей абелевой подгруппы $F(\sigma)$, порожденной матрицами h_k для индексов, удовлетворяющих условию $\sigma_{k,-k} = \sigma_{-k,k} = R$. По теореме 1 из [7] группа $N_U(\sigma)$ также представима в виде произведения – подгруппы $U(\sigma)$ и подгруппы $P(\sigma)$, состоящей из всех содержащихся в $N_U(\sigma)$ мономиальных унитарных матриц. Поскольку $F(\sigma)$ содержится в $P(\sigma)$, справедливо равенство $N_U(\sigma) = U_0(\sigma)\, P(\sigma)$ – остается заметить, что $P(\sigma)$ нормализует $U_0(\sigma)$. Фактор-группа $U(\sigma)/U_0(\sigma)$ в ортогональном случае вычислена в [6] (см. теорему 3). Фактор-группа $N_U(\sigma)/U(\sigma)$ в общем случае может быть описана с помощью подстановок (теорема 2 из [7]):

$$N_U(\sigma)/U(\sigma) \cong \Pi(\sigma)/\Sigma(\sigma),$$

где $\Pi(\sigma)$ – группа подстановок π на множестве Ω, для которых $\pi(-i) = -\pi(i)$ при любых i и $\sigma^\pi = \sigma$, а $\Sigma(\sigma)$ – подгруппа π, удовлетворяющих условию $\sigma_{\pi(i),i} = \sigma_{i,\pi(i)} = R$ при всех i. С помощью подстановок можно описать и фактор-группу $N_U(\sigma)/U_0(\sigma)$ в ортогональном случае – она изоморфна $\Pi(\sigma)/\Sigma_0(\sigma)$, где подстановки из $\Sigma_0(\sigma)$ не только переводят в себя каждый класс эквивалентности, определяемой сетью σ, но к тому же количество положительных элементов, превращающихся в отрицательные, четно для каждого самосопряженного класса.

Литература

1. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
2. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. МИАН СССР **148** (1978), 43–57.
3. З. И. Боревич, С. Л. Крупецкий, *Подгруппы унитарной группы, содержащие группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 19–29.
4. Н. А. Вавилов, *О подгруппах расщепимых ортогональных групп.* — Сиб. матем. ж. **29:3** (1988), 12–25.
5. Н. А. Вавилов, Е. В. Дыбкова, *Подгруппы полной симплектической группы, содержащие группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 31–47.
6. Е. В. Дыбкова, *О сетевых подгруппах в гиперболической унитарной группе.* — Алгебра и анализ **9, No. 4** (1997), страницы 79–86.
7. Е. В. Дыбкова, *О сопряженности сетевых подгрупп в гиперболической унитарной группе над полем.* — Вестн. С.-Петербург. ун-та **Сер. 1, No. 4** (1997), страницы 6–8.
8. С. Л. Крупецкий, *О подгруппах унитарной группы над локальным полем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 81–103.
9. С. Л. Крупецкий, *О подгруппах унитарной группы над диадическим локальным полем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 79–89.
10. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The Classical Groups and K-Theory.* Splinger, Berlin et al., 1989, 576p.
11. A. Bak, N. A. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups. I. Elementary subgroups.* — Bielefeld, 44p. (to appear).
12. O. King, *Subgroups of the special linear group containing the diagonal subgroup.* — J. Alg. **132** (1990), 198–204.

Dybkova E. V. Overdiagonal subgroups of the hyperbolic unitary group for a good form ring over a field.

In the hyperbolic unitary group over a field the lattice of subgroups containing all diagonal unitary matrices, has the standard description. The corresponding form ring has to satisfy some conditions, in particular for fields of characteristic 2 we don't consider the symplectic group and the defective orthogonal groups.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 мая 1997 г.