В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

ЗАДАЧА ПОГРУЖЕНИЯ С МЕТАБЕЛЕВЫМ ЯДРОМ

Пусть K/k – расширение Галуа с группой F и

$$1 \to B \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$$

расширение конечных групп. Рассмотрим задачу погружения

$$(K/k, G, \varphi), \tag{1}$$

которая состоит в построении расширения Галуа (алгебры Галуа) L над полем k с группой G, причем ограничение автоморфизмов $g \in G$ на подполе K совпадает с $\varphi(g)$. В настоящей работе мы будем предполагать, что K/k – p-расширение, т.е. F – p-группа и ядро B задачи погружения является метабелевой группой, т.е. группой, коммутант которой абелев.

Пусть $B_0 = B \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ – убывающий p-центральный ряд группы B, т.е. последовательность подгрупп, которая строится по следующему правилу: $B_1 = [B,B]B^p, \ldots$, $B_n = [B_{n-1}, B]B_{n-1}^p, \ldots$, где $[B_{n-1}, B]$ означает подгруппу группы B_{n-1}, порожденную взаимными коммутаторами, т.е. элементами $[b_{n-1}, b]$, где $b_{n-1} \in B_{n-1}$, $b \in B$.

Ясно, что все подгруппы B_n нормальны в G. Кроме того, так как B – конечная группа, то последовательность подгрупп B_n стабилизируется, т.е. существует номер m такой, что $B_m = B_{m+1}$. Положим $B_m = C$ и $G/C = H$. Заметим, что факторгруппа B/C является p-группой. Кроме того, H – максимальная факторгруппа группы G, являющаяся p-группой, точнее, если C_1 – нормальная подгруппа в G, содержащаяся в C такая, что G/C_1 – p-группа, то C_1 совпадает с C.

Рассмотрим задачу погружения

$$(K/k,\, H,\, \varphi_1), \tag{2}$$

Работа поддержана фондом РФФИ (грант No. 96-01-00854).

где φ_1 – естественный гомоморфизм группы H на F. В настоящей работе будет показано, что при сделанных предположениях (F – p-группа и B – метабелева группа) задачи (1) и (2) эквивалентны.

Докажем сначала теоретико-групповую лемму.

Лемма. *Расширение* $1 \to C \to G \to H \to 1$ *полупрямое.*

Доказательство. Пусть G_p – некоторая силовская p-подгруппа группы G, тогда $C_p = C \cap G_p$ – силовская подгруппа группы C. Покажем, что C_p – абелева группа. Пусть D – максимальная подгруппа абелевой группы $B/[B,B]$, порядок которой взаимно прост с p, и $\overline{D}$ – ее полный прообраз в B. Так как силовская p-подгруппа группы $\overline{D}$ содержится в $[B,B]$, то она абелева, т.к. B метабелева. Остается заметить, что по построению $C \subset \overline{D}$.

Пусть $\overline{G}$ – прямое произведение групп G и G_p с объединенной факторгруппой H. Рассмотрим коммутативную диаграмму с естественными гомоморфизмами

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & C_p \arrow[r] \arrow[d, equal] & \overline{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\zeta"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & 1 \\
1 \arrow[r] & C_p \arrow[r] & G_p \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

Заметим, что расширение

$$1 \to C_p \to \overline{G}_p \to G_p \to 1,$$

где $\overline{G}_p$ – силовская p-подгруппа группы $\overline{G}$, расщепляется, следовательно, по теореме Гашюца расщепляется и расширение

$$1 \to C_p \to \overline{G}_p \to G \to 1,$$

т.е. существует вложение $\mu : G \to \overline{G}$ такое, что $\psi\mu = id$. Композиция $\zeta\mu$ – гомоморфизм группы G в G_p. Заметим, что образ гомоморфизма $\zeta\mu$ является p-группой, а его ядро содержится в подгруппе C, следовательно, образ $\zeta\mu$ изоморфен H. Лемма доказана.

Докажем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Задачи погружения* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть разрешима задача (1). Заметим, что задача (2) является сопутствующей задачей первого рода для задачи (1), следовательно, она разрешима.

Обратно, пусть разрешима задача (2) и $\overline{L}$ – некоторое ее решение. Заметим, что $\overline{L}$ может быть как полем, так и алгеброй Галуа. Если $\overline{L}$ – поле, то по лемме задача погружения $(\overline{L}/k, G, \varphi_2)$ полупрямая, следовательно, разрешима (см. [1], теорема 1. 9). Если $\overline{L}$ – алгебра Галуа и L_0 – поле-ядро с группой H_0, то H_0 является подгруппой H. Обозначим через G_0 полный прообраз группы H_0 в G относительно гомоморфизма φ_2. Пусть φ_0 – ограничение φ_2 на G_0, тогда задачи погружения $(\overline{L}/k, G, \varphi_0)$ и $(L_0/k,\, G_0,\, \varphi_0)$ эквивалентны (см. [1], §6, гл. 1).

Заметим, что группа G_0 – полупрямое расширение подгруппы C с помощью H_0. Действительно, пусть μ – вложение $H \to G$, такое, что $\varphi_2\mu = id$, тогда подгруппа $\mu(H) \cap G_0$ изоморфна H_0 и не пересекается с C. Таким образом, задача $(L_0/k, G_0, \varphi_0)$ полупрямая, следовательно, разрешима. Остается заметить, что разрешимы задачи $(\overline{L}/k, G, \varphi_2)$ и $(K/k, G, \varphi)$. Теорема доказана.

Литература

1. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* Наука, Москва (1990).

Ishkhanov V. V., Lur'e B. B. The embedding problem with metabelian kernel.

A relationship of solvability conditions for the embedding problem with metabelian kernel over a p-extension of fields and its assosiated embedding problem of the first kind with maximal p-group is studied. It is proved that these problems are equivalent.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 17 ноября 1997 г.