В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье

УСЛОВИЕ СОГЛАСНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОГРУЖЕНИЯ С P-РАСШИРЕНИЕМ

Пусть K/k – расширение Галуа полей с группой Галуа F, $1 \to B \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1$ – расширение конечных групп. Задача погружения

$$(K/k, G, \varphi) \tag{1}$$

состоит в построении алгебры Галуа L над полем k с группой G, причем поле K содержится в L и ограничение автоморфизмов $g \in G$ на подполе K совпадает с $\varphi(g)$.

Необходимым условием существования решения задачи (1) является условие согласности Фаддеева–Хассе (см. [1]), которое состоит в том, что в качестве "решения" можно выбрать модуль согласности, т.е. $K[B]$-модуль ранга 1, на котором действуют операторы из G ($K[B]$ здесь групповое кольцо группы B над полем L).

Рассмотрим скрещенное произведение $\Lambda = G \times K$, т.е. алгебру над полем k, состоящую из элементов вида $\sum\limits_{g \in G} g x_g$, где $x_g \in K$, причем выполнены равенства $g_1\, x_{g_1}\, g_2\, x_{g_2} = g_1\, g_2\, x_{g_1}^{\varphi(g_2)}\, x_{g_2}$ для любых $g_1,\, g_2 \in G$ и $x_{g_1},\, x_{g_2} \in K$.

В работе [1] было показано, что условие согласности для задачи (1) эквивалентно тому, что скрещенное произведение Λ является матричной алгеброй порядка n над некоторой подалгеброй, где n – порядок группы F.

В этой статье мы будем предполагать, что F – p-группа. Пусть G_p – некоторая силовская p-подгруппа в G и B_p – силовская p-подгруппа ядра B, содержащаяся в G_p, т.е. $B_p = G_p \cap B$. Обозначим через φ_p ограничение гомоморфизма φ на G_p. Можно рассматривать задачу погружения

$$(K/k,\, G_p,\, \varphi_p). \tag{2}$$

В настоящей работе мы покажем, что в некоторых частных случаях условия согласности для задач (1) и (2) эквивалентны.

Лемма. *Пусть имеется задача погружения* (1) *и* G_0 *– некоторая подгруппа в* G *со свойством* $\varphi_0(G_0) = F$, *где* φ_0 *– ограничение гомоморфизма* φ *на* G_0. *Если выполнено условие согласности для задачи* $(K/k,\, G_0,\, \varphi_0)$, *то выполнено условие согласности и для задачи* (1).

Доказательство. Пусть Λ_0 и Λ – скрещенные произведения поля K с группами G_0 и G соответственно. Существует естественное вложение Λ_0 в Λ. Если группа G_0 согласна с K, то в алгебре Λ_0 существует матричная алгебра порядка n, следовательно, и алгебра Λ обладает этим свойством, т.е. группа G согласна с K.

Теорема 1. *Если* B_p *– нормальный делитель в* B, *то условия согласности для задач* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что из условия согласности для задачи (1) следует условие согласности для задачи (2). Предположим, что алгебра $\Lambda = G \times K$ является матричной алгеброй порядка $n = |F|$ над своей подалгеброй. Рассмотрим произвольный центральный минимальный идемпотент e алгебры Λ_p.

Пусть G_e – подгруппа в G, состоящая из элементов, оставляющих e неподвижным, и $g_1, \ldots, g_t$ – представители смежных классов G по G_e. Тогда идемпотенты $e_i = e^{g_i}$, где $i = 1, \ldots, t$, являются различными минимальными идемпотентами алгебры Λ_p (мы воспользовались тем, что G_p нормальна в G), и, следовательно, они попарно ортогональны.

Рассмотрим $E = \sum_{i=1}^{t} e_i$. Так как e_i ортогональны, то E является идемпотентом, причем E лежит в центре алгебры Λ. Покажем, что $E \neq 0$. Действительно, если $E = 0$, то $e = e_1 = -(e_2 + \ldots + e_t)$. Умножая равенство на e, имеем $e^2 = 0$, что невозможно, следовательно, $E \neq 0$.

Рассмотрим компоненту ΛE алгебры Λ. Тогда мы имеем разложение алгебры ΛE в прямую сумму идеалов $\Lambda\, e_i$, следовательно, по теореме Д. 1.2 из [2] алгебра ΛE является алгеброй матриц порядка $[G : G_e]$ над подалгеброй $e\Lambda e$. Заметим, что алгебра $e\Lambda e$ изоморфна алгебре $(G_e \times K)e$. Так как алгебра ΛE содержит матричную алгебру порядка $n \cdot [G : G_e]$, то алгебра $(G_e \times K)e$ содержит матричную алгебру порядка n. Нам остается изучить алгебру $\Lambda_e\, e = (G_e \times K)e$, где через Λ_e мы обозначили скрещенное произведение $G_e \times K$.

Алгебра $\Lambda_p\, e$ естественым образом вкладывается в алгебру $\Lambda_e\, e$, причем размерность алгебры $\Lambda_e\, e$ над $\Lambda_p\, e$ равна индексу $[G_e : G_p]$, т.е. взаимно проста с p. Пусть $\Lambda_e\, e = \sum_{i=1}^{t} \Lambda_e\, e_i$ – разложение алгебры $\Lambda_e\, e$ на простые компоненты, отвечающее разложению $e = \sum_{i=1}^{t} e_i$ идемпотента e на примитивные идемпотенты.

Ясно, что отображение $\Lambda_p\, e \to \Lambda_e\, e_i$ инъективно для любого i в силу простоты алгебры $\Lambda_p\, e$. Поскольку размерность алгебры $\Lambda_e\, e$ над $\Lambda_p\, e$ взаимно проста с p, среди компонент $\Lambda_e\, e_i$ существует компонента, размерность которой над $\Lambda_p\, e$ взаимно проста с p. Пусть для определенности это $\Lambda_e\, e_1$. В этом случае центры алгебр $\Lambda_p\, e$ и $\Lambda_e\, e_1$ совпадают (центр этих алгебр является подполем поля K, которое является p-расширением).

Так как выполнено условие согласности для задачи (1), алгебра $\Lambda_e\, e_1$ содержит матричную алгебру порядка n. В то же время алгебра $\Lambda_e\, e_1$ изоморфна тензорному произведению алгебры $\Lambda_p\, e_1$ и ее централизатора, размерность которого взаимно проста с p. Следовательно, матричная алгебра размерности n содержится в алгебре $\Lambda_p\, e_1$, которая изоморфна алгебре $\Lambda_p\, e$.

Рассмотрим теперь случай, когда ядро B задачи погружения – сверхразрешимая группа.

Теорема 2. *Если B – сверхразрешимая группа, то условия согласности для задач* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Доказательство. Нам достаточно показать, что из условия согласности для задачи (1) следует условие согласности для задачи (2). Воспользуемся свойством сверхразрешимости группы, а именно тем, что коммутант B' группы B является нильпотентной группой (теорема 10.5.4 [3]). Заметим, что B' является нормальным делителем в G. Кроме того, B' как нильпотентная группа является прямым произведением своих силовских подгрупп $B_1, \dots, B_m$, причем каждая из подгрупп B_i является нормальным делителем в G. Пусть B_0 – подгруппа в B', состоящая из произведения подгрупп B_i, порядок которых взаимно прост с p. Заметим, что B_0 может быть как собственной подгруппой в B', так и совпадать с B', но в любом случае B_0 – нормальный делитель в G, порядок которого взаимно прост с p.

Рассмотрим сопутствующую для задачи (1) задачу погружения $(K/k,\, G/B_0,\, \varphi_1)$, где φ_1 – естественный гомоморфизм группы G/B_0 на F. Если для задачи (1) выполнено условие согласности, то оно выполнено и для задачи $(K/k, G/B_0, \varphi_1)$. Заметим, что группа G_p является силовской p-подгруппой и для группы G/B_0. Кроме того, группа B_p является силовской p-подгруппой группы B/B_0 и является в ней нормальным делителем. Следовательно, по теореме 1 выполнено условие согласности для задачи (2). Теорема доказана.

Рассмотрим коммутативную диаграмму с естественными гомоморфизмами

$$\begin{tikzcd} & & & B \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & B_p \arrow[r] \arrow[d] & \overline{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & B_p \arrow[r] & G_p \arrow[r, "\varphi_p"] & F \arrow[r] & 1, \end{tikzcd} \tag{3}$$

где $\overline{G}$ – прямое произведение групп G_p и G с объединенной фактор-группой F, т.е. подгруппа прямого произведения групп G_p и G, состоящая из пар (g_1, g_2) со свойством $\varphi_p(g_1) = \varphi(g_2)$. В некоторых случаях диаграммный поиск, примененный к (3) позволяет доказать эквивалентность условий согласности для задач (1) и (3).

Теорема 3. *Если B_p – абелева группа, то условия согласности для задач* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму (3). Заметим, что по предложению 1.13.2 [2] силовская p-подгруппа $\overline{G}_p$ группы $\overline{G}$ является полупрямым расщирением. Следовательно, по теореме Гашюца таковым является и $\overline{G}$. Тогда существует гомоморфизм $\mu : G \to \overline{G}$, такой, что $\psi\mu = 1$. Следовательно, существует отображение $\xi : G \to G_p$ такое, что коммутативен треугольник

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "\varphi"] \\ G_p \arrow[r, "\varphi_p"] & F. \end{tikzcd}$$

Пусть G_0 – образ гомоморфизма ξ. Тогда выполнено условие согласности для задачи $(K/k, G_0, \varphi_0)$, где φ_0 – ограничение гомоморфизма φ на G_0, которая является сопутствующей для задачи (1). Так как G_0 – подгруппа группы G_p, то по лемме выполнено условие согласности для задачи (2).

Теорема 4. *Если k и K – поля алгебраических чисел, то условия согласности для задач* (1) *и* (2) *эквивалентны.*

Доказательство. По теореме 2.9 [2] достаточно доказать, что выполнено условие согласности для сопутствующей задачи $(K/k, G_p/B_p', \varphi')$, где B_p' – коммутант группы B_p и φ' – естественное отображение $G_p/B_p' \to F$. Доказательство теоремы следует из рассуждений, аналогичных рассуждениям предыдущей теоремы, примененным к диаграмме

$$\begin{tikzcd} & & & B \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & B_p/B_p' \arrow[r] \arrow[d] & \overline{G}/B_p' \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & B_p/B_p' \arrow[r] & G_p/B_p' \arrow[r] & F \arrow[r] & 1. \end{tikzcd}$$

Теорема 5. *Если задача* (1) *разрешима, то выполнено условие согласности для задачи* (2).

Доказательство. Пусть L – решение задачи (1). Рассмотрим задачу $(L/k, \overline{G}, \overline{\varphi})$, где $\overline{\varphi}$ – естественное отображение $\overline{G} \to G$. Заметим, что последняя задача получается подъемом задачи (2), следовательно, условия согласности для них эквивалентны. По теореме 2.4 [2] условия согласности для задачи $(L/k, \overline{G}, \overline{\varphi})$ и $(L/k_p, \overline{G}_p, \overline{\varphi}_p)$ эквивалентны, где $\overline{G}_p$ – силовская p-подгруппа группы $\overline{G}$, $\overline{\varphi}_p$ – ограничение $\overline{\varphi}$ на $\overline{G}_p$ и k_p – соответствующая подалгебра. Остается заметить, что $\overline{G}_p$ – полупрямое расширение, следовательно, для задачи $(L/k_p, \overline{G}_p, \overline{\varphi}_p)$ выполнено условие согласности.

Теорема 6. *Условия согласности для задачи* (1) *и* (2) *эквивалентны, если G_p – факторгруппа группы G.*

В этом случае задача (2) сопутствует задаче (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 96-01-00854.

Литература

1. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, *Исследования по геометрии теории Галуа.* — Мат. сб. **15, No. 2** (1944), 243–284.
2. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* Наука, Москва, 1990, 272с.
3. М. Холл, *Теория групп.* ИЛ, Москва, 1962, 468с.

V. V. Ishkhanov, B. B. Lur'e. A compatibility condition for the embedding problem with p-extension.

Embedding problems with a group and its Sylow p-subgroup over a p-extension are considered. A Faddeev–Hasse compatibility condition for this problem are studied. It is proved that the compatibility condition for the problems considered are equivalent if the kernel is a supersolvable group or the Sylow p-subgroup is an invariant subgroup.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 февраля 1997 г.