В. И. Мысовских

О РЕШЕТКЕ ПОДГРУПП, НОРМАЛИЗУЕМЫХ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ В ПОЛНОЙ МОНОМИАЛЬНОЙ ГРУППЕ

§1. Введение

Изучение решеток подгрупп составляет важный и интересный раздел теории групп, отраженный в недавно вышедшей книге R. Schmidt'a [16]. Вопросы расположения промежуточных подгрупп активно исследовались в Петербурге, благодаря усилиям З. И. Боревича и его учеников. Обобщая ситуацию стандартного расположения в линейных группах [2], З. И. Боревич ввел и исследовал понятия веерной, полинормальной и паранормальной подгрупп в абстрактной группе [3, 5]. По существу, полинормальность подгруппы D в группе G означает, что для каждой D-полной промежуточной подгруппы H (т.е. такой, что $D^H = H$) существует субнормализатор в G и совпадает с ее нормализатором $N_G(D)$. Это требование гарантирует "стандартное" описание решетки промежуточных подгрупп $L(D,G)$. Работа [1] и обзор [14] наиболее полно отражают сводку результатов, в частности, связи с пронормальностью [12], абнормальностью [13] и их слабыми аналогами. Отметим также работы [4, 6, 7], содержащие описание решеток в неполинормальных случаях.

Представляется естественным рассмотреть ситуацию стандартного расположения подгрупп и в других решетках. Так, например, в работе [11] с этой точки зрения рассмотрена решетка подгрупп нормализуемых данной. Введено понятие сильно полинормальной подгруппы, отражающее стандартное расположение, отмечены его связи с полинормальностью.

Целью настоящей работы является исследование решетки подгрупп полной мономиальной группы $H \wr S_n$, нормализуемых симметрической группой S_n степени n. Доказано, что для произвольной группы H (конечной или бесконечной) эта подгруппа обладает несколько более сильным, чем сильная полинормальность, свойством. Последнее, часто более удобное для доказательства, названо здесь по аналогии с терминологией З. И. Боревича *сильной паранормальностью*. Аналогичный результат получен для знакопеременной группы A_n при $n \geqslant 4$.

Отметим, что полученные здесь теоремы существенно усиливают соответствующие результаты работы автора [8], поскольку решетка подгрупп, нормализуемых данной в общем случае значительно превосходит решетку промежуточных подгрупп. В частности, в случае симметрической группы имеет место неприятная для доказательства ситуация раздвоения (см. [11]). Наконец, следует отметить, что интерес автора к рассмотренным здесь подгруппам был стимулирован также его исследованиями по группам инерции дискретных функций и автоморфизмов кодов над конечным алфавитом [9].

§2. Сильная паранормальность

Пусть G – группа. Для элементов $x, t \in G$ через $x^t = t^{-1}xt$ обозначаем элемент, сопряженный с x при помощи t; их коммутатор $[x,t] = x^{-1}t^{-1}xt = x^{-1}x^t$. Используем запись $G = \langle S \rangle$, если группа G порождена своим подмножеством S. Для подгрупп $H, D \leqslant G$ определен их взаимный коммутант $[H, D] = \langle [h,d] : h \in H, d \in D \rangle$. Для элемента $x \in G$ и подгруппы $D \leqslant G$ через $[x, D]$ обозначаем подгруппу, порожденную всеми коммутаторами вида $[x, d]$, $d \in D$. Отметим, что $[x, D]$ не обязана быть нормальным делителем в порождении $\langle x, D \rangle$. Наряду с простыми коммутаторами и коммутантами рассматриваем и высшие. Для них используем левонормированную запись, т.е. $[H, K, D] = [[H, K], D]$. Нормализатор подгруппы H в G обозначаем $N_G(H)$. По определению группа H совершенна тогда и только тогда, когда $[H, H] = H$.

Напомним два ключевых определения из работы [11].

Определение. *Пусть $D \leqslant G$. Подгруппа H группы G называется D-совершенной, если $[H, D] = H$.*

Определение. *Говорим, что подгруппа D сильно полинормальна в G, если для любого $x \in G$ имеет место коммутаторное равенство $[\langle x \rangle, D, D] = [\langle x \rangle, D]$.*

Приведем ряд лемм о простых свойствах взаимных коммутантов и D-совершенных подгрупп, необходимых впоследствии для доказательства основного результата.

Лемма 1. *Пусть D – подгруппа в G и $x \in G$. Имеем:*

1) *подгруппа $[x, D]$ нормализуется D, т.е. $D \leqslant N_G([x, D])$;*
2) *для всякого натурального k подгруппа $[x, \underbrace{D, \dots, D}_{k \text{ раз}}]$ нормализуется D;*
3) *$[x, D, D] \lhd [x, D]$;*
4) *для всякого $d \in D$ имеем равенство $[x^d, D] = [x, D]$;*
5) *если $D = \langle d_i : i \in I \rangle$, то подгруппа $[x, D]$ порождается множеством*

$$S = \{[x, d_i]^d : d \in D,\ i \in I\}.$$

Доказательство леммы легко получается из известной коммутаторной формулы $[xy, u] = [x, u]^y[y, u]$, простых свойств взаимных коммутантов и нормальных подгрупп. Отметим, что утверждение п. 1 содержится в книге [17].

Лемма 2. *Подгруппа, порожденная семейством D-совершенных подгрупп, сама D-совершенна.*

Доказательство. Пусть $V = \{H_t : t \in T\}$ – семейство D-совершенных подгрупп, т.е. $[H_t, D] = H_t$ для всех $t \in T$. Пусть $H = \langle V \rangle$. Для всякого $t \in T$ имеем:

$$H_t = [H_t, D] \leqslant [H, D],$$

откуда получаем включение $H \leqslant [H, D]$.

С другой стороны, все подгруппы H_t нормализуются подгруппой D, а потому и H нормализуется D. Следовательно, $[H, D] \leqslant H$. Таким образом, $H = [H, D]$, т.е. подгруппа H является D-совершенной. Лемма доказана.

Дадим определение сильной паранормальности.

Определение. *Говорим, что подгруппа D сильно паранормальна в группе G, если для всякого элемента $x \in G$ имеет место равенство $[x, D, D] = [x, D]$.*

Очевидно, что в силу Леммы 2 из сильной паранормальности вытекает сильная полинормальность. Если подгруппа D сильно паранормальна в G, то она и паранормальна там (в смысле работы [5]). Обратное неверно.

§3. Случай симметрической группы

Пусть S_n – симметрическая группа степени n, H – произвольная (не обязательно конечная) группа. Рассмотрим сплетение $H \wr S_n$ – полную мономиальную группу степени n над H. Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Рассмотрим полную мономиальную группу $G = H \wr S_n$. При $n \geqslant 3$ и произвольной группе H активная подгруппа $P = S_n$ сильно паранормальна в G.*

Доказательство. Воспользуемся конструкцией и обозначениями работы [8]. Пусть $\mathbb{Z}[H]$ – целочисленное групповое кольцо для H. Отождествим группу G с мономиальной подгруппой в $GL(n, \mathbb{Z}[H])$. Тогда P окажется группой матриц-подстановок, получающихся как образ симметрической группы при мономорфизме $\varphi : S_n \to GL(n, \mathbb{Z}[H])$. Последний сопоставляет подстановке $\pi \in S_n$ матрицу y_π с элементами $(y_\pi)_{ij} = \delta_{i,\pi(j)}$, где δ – символ Кронекера. В частности, для $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ через y_{ij} обозначаем образы транспозиций $y_{ij} = \varphi((ij))$. Ясно, что последние матрицы порождают интересующую нас подгруппу $P = \langle y_{ij} : 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \rangle$.

База сплетения представлена группой диагональных матриц B, порожденной матрицами $d_r(\varepsilon)$, $\varepsilon \in H$. Для произвольной диагональной матрицы $b \in B$ вида

$$b = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = d_1(\varepsilon_1) d_2(\varepsilon_2) \ldots d_n(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_i \in H$$

обозначаем коммутаторы $u_{ij} = [b, y_{ij}] = d_i(\varepsilon_i^{-1}\varepsilon_j) d_j(\varepsilon_j^{-1}\varepsilon_i)$, $i \neq j$. Отметим ключевую для дальнейших вычислений коммутаторную формулу

$$u_{ij} = y_{jk}[y_{ik}, u_{ij}] y_{jk} = [y_{ik}, u_{ij}]^{y_{jk}}, \tag{$*$}$$

справедливую для всех попарно различных троек индексов i, j, k: $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$ (см. [8]).

Рассмотрим произвольную подстановку $\pi \in S_n$ и ее образ $y_\pi = \varphi(\pi)$. Требуется проверить, что для всякого $b \in B$ элемент $x = b\,y_\pi$ удовлетворяет равенству $[x, P] = [x, P, P]$. Ввиду пунктов 2 и 5 Леммы 1 достаточно доказать, что $t_{\pi,ij} = [x, y_{ij}] \in [x, P, P]$. Вычисляем:

$$t_{\pi,ij} = [by_\pi, y_{ij}] = y_{\pi^{-1}}(b^{-1} y_{ij} b y_{ij}) y_{ij} y_\pi y_{ij} = y_{\pi^{-1}}(u_{ij}) y_{ij} y_\pi y_{ij}.$$

Для уничтожения крайнего левого элемента в этом произведении выполним сопряжение матрицей $y_{\pi^{-1}}$:

$$z_{\pi,ij} = t_{\pi,ij}^{y_{\pi^{-1}}} = u_{ij} y_\sigma, \quad \text{где } \sigma = [(ij), \pi^{-1}] \in A_n.$$

Подстановка σ есть произведение двух транспозиций. При $n \geqslant 4$ для нее имеется 4 возможности:

1°. $\sigma = e$ – единичная подстановка;

2°. $\sigma = (ijk)$, где k отлично от i и j;

3°. $\sigma = (ikj)$, $k \neq i$, $k \neq j$;

4°. $\sigma = (ij)(kl)$, все индексы различны.

Отметим, что при $n = 3$ последний случай не возникает.

В случае 1° по формуле $(*)$ имеем:

$$z_{\pi,ij} = u_{ij} = [y_{ik}, u_{ij}]^{y_{jk}} \in [x, P, P]^{y_{jk}} = [x, P, P]$$

поскольку последняя группа нормализуется P по п. 2 Леммы 1.

В остальных случаях коммутируем $z_{\pi,ij}$ с матрицей-подстановкой y_{ik}. С учетом формулы $(*)$ последовательно получаем:

$$\begin{aligned} w_{\pi,ijk} = [z_{\pi,ij}, y_{ik}] &= y_{\sigma^{-1}} u_{ij}^{-1} y_{ik} u_{ij} y_\sigma y_{ik} = \\ &= y_{\sigma^{-1}} y_{ik} y_{jk} (y_{jk} [y_{ik}, u_{ij}] y_{jk}) y_{jk} y_\sigma y_{ik} = \\ &= y_{\sigma^{-1}} y_{ikj} (u_{ij}) y_{jk} y_\sigma y_{ik}. \end{aligned}$$

Для нейтрализации стоящих слева от u_{ij} сомножителей выполним сопряжение при помощи матрицы $y_{\sigma^{-1}} y_{ikj}$.

$$w_{\pi,ijk}^{y_\sigma y_{ikj}} = u_{ij} y_\tau, \quad \text{где } \tau = (ij)\sigma(ik)\sigma^{-1}(ikj).$$

Непосредственные вычисления показывают, что в случаях 2°–4° подстановки σ и τ совпадают. Это означает, что

$$z_{\pi,ij} = w_{\pi,ijk}^{y_{\sigma^{-1}} y_{ikj}} \in [x, P, P].$$

Из п. 2 Леммы 1 заключаем, что матрица $t_{\pi,ij} = z_{\pi,ij}^{y_\pi}$ также содержится в подгруппе $[x, P, P]$. Ввиду п. 5 Леммы 1 имеем равенство

$$[x, P] = \langle [x, y_{ij}]^y : y \in P \rangle = \langle t_{\pi,ij}^y : y \in P \rangle.$$

Поскольку по доказанному $t_{\pi,ij} \in [x, P, P]$ и P нормализует последнюю группу, получаем включение $[x, P] \leqslant [x, P, P]$. Обратное справедливо всегда, что и означает P-совершенность подгруппы $[x, P]$ в G. В силу произвольности выбора $x \in G$ подгруппа P сильно паранормальна в G. Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть* Λ – *ассоциативное кольцо с единицей. При* $n \geqslant 3$ *подгруппа матриц-перестановок* $P \approx S_n$ *сильно паранормальна в мономиальной группе* $\mathrm{Mon}\,(n, \Lambda)$.

§4. Случай знакопеременной группы

Результат работы [8] для знакопеременной группы A_n также может быть перенесен на решетку подгрупп, нормализуемых A_n в сплетении $G = H \wr A_n$.

Теорема 2. *Пусть* H – *произвольная группа. При* $n \geqslant 4$ *подгруппа* $P \approx A_n$ *сильно паранормальна в сплетении* $G = H \wr A_n$.

Доказательство. Результат может быть проверен при помощи вычислений аналогичных доказательству Теоремы 1 с использованием соответствующих коммутаторных формул из работы [8]. Во избежание громоздких выкладок и демонстрации другой техники здесь проверим для $n \geqslant 5$ чуть более слабое свойство – сильную полинормальность.

В работе [8] доказано, что подгруппа P паранормальна в G. В частности, она полинормальна. При $n \geqslant 5$ группа $P \approx A_n$ проста, а потому совпадает со своим коммутантом. Из Теоремы 1 работы [11] вытекает сильная полинормальность P в G.

Случай $n = 4$. Будем проверять условие сильной паранормальности для $P \approx A_4$ в $G = H \wr A_4$. Сохраним конструкцию и обозначения из доказательства Теоремы 1. Отметим, что достаточно в качестве x рассмотреть элементы вида $x = b\,p$, где p пробегает представителей всех классов сопряженных элементов подгруппы P (см. п. 4 Леммы 1). Непосредственные вычисления с учетом формул из работы [10]

$$u_{123} = [y_{234}, [y_{124}, u_{123}]]^{y_{134}},$$
$$u_{124} = [y_{243}, [y_{123}, u_{124}]]^{y_{143}}$$

показывают P-совершенность подгруппы $[x, P]$ во всех возможных случаях. Теорема 2 доказана.

В связи с приведенными результатами естественно возникает следующий вопрос.

Проблема. Пусть P – некоторая подгруппа в симметрической группе S_n. Рассматривается мономиальная группа $G = H \wr P$ –

сплетение некоторой группы H с группой подстановок P. Когда подгруппа P сильно паранормальна (паранормальна) в G независимо от выбора первого множителя H?

Литература

1. М. С. Ба, З. И. Боревич, *О расположении промежуточных подгрупп.* — Кольца и линейные группы. Сб. научн. трудов, Краснодар (1988), 14–41.
2. З. И. Боревич, *Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 12–29.
3. З. И. Боревич, *О расположении подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 5–12.
4. З. И. Боревич, В. А. Койбаев, Чан Нгок Хой, *Решетки подгрупп в $GL(2,\mathbb{Q})$, содержащих нерасщепимый тор.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 24–43.
5. З. И. Боревич, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 13–19.
6. З. И. Боревич, В. И. Мысовских, *Бесконечные цепи последовательных нормализаторов в полной линейной группе над полем.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 44–48.
7. В. А. Койбаев, *Описание D-полных подгрупп в полной линейной группе над полем из трех элементов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 76–78.
8. В. И. Мысовских, *Паранормальность симметрической группы в сплетениях.* — Вестн. ЛГУ, Сер. 1, вып. 4, No. 22 (1989), 25–28.
9. В. И. Мысовских, *О теоретико-групповом методе исследования функций k-значной логики.* — Вестн. СПбГУ, Сер. 1, вып. 1, No. 1 (1996), 50–53.
10. В. И. Мысовских, А. В. Степанов, *О расположении подгрупп в полупрямом произведении.* — Известия ЛЭТИ. Сб. научн. трудов, С.-Петербург, вып. 449 (1992), 77–79.
11. А. В. Степанов, *О расположении подгрупп, нормализуемых фиксированной.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **198** (1991), 92–102.
12. K. Doerk and T. Hawkes, *Finite soluble groups.* Berlin-New York, 1992.
13. B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Berlin-Heidelberg- New York, 1967.
14. V. I. Mysovskikh, *A survey on the lattices of intermediate subgroups and some subgroup embedding properties.* 1996 (unpublished manuscript).
15. P. M. Neumann, *On the structure of standard wreath products of groups.* — Math. Z. **84** (1964), 343–373.
16. R. Schmidt, *Subgroup lattices of groups.* De Gruyter, 1994.
17. M. Suzuki, *Group theory II.* Springer-Verlag, 1986.

Mysovskikh V. I. On the lattice of subgroups normalized by a symmetric one in the complete monomial group.

We consider a lattice of subgroups normalized by a symmetric group S_n in the complete monomial group $G = H \wr S_n$ where H is an arbitrary (finite or infinite) group. It is shown that for $n \geqslant 3$ the subgroup is strongly paranormal in this wreath product for any H. A similar result is obtained for an alternating group A_n, $n \geqslant 4$. The property of strong paranormality for D in G means that for any element $x \in G$ the commutator identity $[[x, D], D] = [x, D]$ holds. That condition garantees a standard arrangement of subgroups of G normalized by D.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 27 января 1997 г.