**В. И. Мысовских**

# ТЕСТИРОВАНИЕ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ НА СВОЙСТВАХ ВЛОЖЕНИЯ ТИПА ПРОНОРМАЛЬНОСТИ

## §1. Введение

В теории расположения промежуточных подгрупп, развитой З. И. Боревичем в работах [1–3], имеется несколько важных нерешенных проблем. До сих пор неизвестно, будет ли всякая полинормальная подгруппа конечной группы также и паранормальной. Не удалось ни доказать, ни опровергнуть гипотезу об эквивалентности этих свойств в классе разрешимых групп (см. [1]). Поэтому представляется естественным исследование подобных вопросов на фактическом материале. С этой целью в настоящей заметке описываются некоторые алгоритмы для тестирования подгрупп конечной группы на следующие свойства вложения: абнормальность, пронормальность и их слабые аналоги, поли- и паранормальность, слабая нормальность (в смысле К. Г. Мюллера, [6]).

Предлагаемый здесь метод позволяет избежать нахождения решетки $L(G)$ всех подгрупп рассматриваемой группы $G$ и максимально сократить число испытываемых элементов группы. Разработанные алгоритмы реализованы в виде программ в рамках системы компьютерной алгебры GAP [7] и могут быть получены при помощи соответствующих ftp-серверов (Aachen и St. Andrews) или от автора. Эти программы универсальны, т.е. применимы ко всем типам групп, реализованных в GAP (группы подстановок, матричные группы, $fp$-группы, $AG$-группы). Однако наибо-

Часть работы выполнена во время пребывания автора на кафедре Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen. Автор крайне признателен Deutsche Forschungsgemeinschaft за финансовую поддержку визита (грант “Algorithmische Zahlentheorie und Algebra”) и сердечно благодарит профессора J. Neubüser'а и его коллег с LDFM за гостеприимство и прекрасные условия для работы.

лее эффективно их использование в случае неразрешимой группы $G$, поскольку в разрешимой ситуации возможна дополнительная редукция при помощи факторизации по нормальным делителям. Учитывая высокую вычислительную сложность исходной задачи a priori, реальные вычисления могут быть выполнены для групп, порядок которых не превышает нескольких сотен тысяч.

## §2. Свойства вложения подгруппы в группу

Напомним обозначения и основные определения. Пусть $G$ – группа. Рассмотрим подгруппу $D \leqslant G$. Для элемента $x \in G$ через $D^x = x^{-1}Dx$ обозначаем подгруппу, сопряженную с $D$ при помощи $x$. В качестве знака порождения мы используем угловые скобки, а для подмножества $M \subset G$, содержащего единицу группы, обозначаем $D^M = \langle D^m : m \in M \rangle$. В частности, для промежуточной подгруппы $H : D \leqslant H \leqslant G$ определено нормальное замыкание $D^H$, т.е. наименьший нормальный делитель в $H$, содержащий $D$. Нормализатор подгруппы $D$ в $G$ обозначаем $N = N_G(D)$.

**Определение 1.** *Промежуточная подгруппа $H : D \leqslant H \leqslant G$ называется $D$-полной, если $D^H = H$, т.е. в $H$ нет собственных нормальных делителей, содержащих $D$.*

**Определение 2.** *Подгруппа $D$ называется паранормальной в $G$, если для всякого $x \in G$ подгруппа $\langle D, D^x \rangle$ является $D$-полной.*

**Определение 3.** *Подгруппа $D$ называется пронормальной в $G$, если для любого $x \in G$ подгруппы $D$ и $D^x$ сопряжены уже́ в своем порождении $\langle D, D^x \rangle$.*

**Определение 4.** *Подгруппа $D$ называется абнормальной в $G$, если для всякого $x \in G$ выполнено включение $x \in \langle D, D^x \rangle$.*

**Определение 5.** *Подгруппа $D$ называется слабо нормальной в $G$, если для $\forall\ x \in G$ из $D^x \leqslant N_G(D)$ следует равенство $D^x = D$, т.е. $D$ – единственная из сопряженных, лежащих в нормализаторе.*

Заменяя в определениях 2–4 подгруппу $\langle D, D^x \rangle$ на бо́льшую $D^{\langle x \rangle}$, получим определения полинормальности, слабой пронормальности и слабой абнормальности соответственно. Имеются эквивалентные определения указанных свойств в терминах решетки промежуточных подгрупп $L(D, G)$, но они нас не устраивают с вычислительной точки зрения.

## §3. Первоначальная версия алгоритмов

Прежде всего отметим связь понятий абнормальности и пронормальности, содержащуюся в следующем хорошо известном утверждении.

**Предложение 1.** *Подгруппа $D$ абнормальна в $G$ тогда и только тогда, когда она пронормальна в $G$ и самонормализуема, т.е. $N_G(D) = D$.*

Этот факт позволяет ограничиться рассмотрением пронормальности. Проверка последнего свойства на компьютере упрощается при следующей переформулировке.

**Предложение 2.** *Подгруппа $D$ пронормальна в $G$ тогда и только тогда, когда для всякого $x \in G$ выполнено $\langle D, D^x \rangle \cap Nx \neq \varnothing$, (здесь $N = N_G(D)$, $Nx$ – правый смежный класс).*

Для дальнейшей редукции рассмотрим правую трансверсаль $T$ группы $G$ по нормализатору $N$, т.е. множество, содержащее ровно по одному представителю каждого правого смежного класса. Легко видеть, что для разных представителей $x$, $y$ из одного класса $Nx$ имеем равенство $D^x = D^y$. Отсюда вытекает справедливость следующих утверждений.

**Предложение 3.** *Подгруппа $D$ пронормальна в $G$ тогда и только тогда, когда для $\forall\ t \in T : \langle D, D^t \rangle \cap Nt \neq \varnothing$.*

**Предложение 4.** *Подгруппа $D$ паранормальна в $G$, если и только если для $\forall\ t \in T$ подгруппа $\langle D, D^t \rangle$ является $D$-полной.*

Использование этих предложений уменьшает перебор в $|N|$ раз. Осталось отметить, что в системе GAP имеются эффективные функции Normalizer для вычисления нормализатора, сопряженных подгрупп (ConjugateSubgroup), нормального замыкания (NormalClosure) и правой трансверсали RightTransversal $(G, N)$. Все это и послужило основой для первоначальной версии программ для тестирования подгрупп на пронормальность, паранормальность и абнормальность. Слабые свойства (полинормальность и слабая пронормальность) не допускают указанной выше редукции, имеется пример подгруппы $D$ в конечной группе $G$, что для $y \in Nx$ соответствующие подгруппы $D^{\langle x \rangle}$ и $D^{\langle y \rangle}$ не совпадают. Поэтому для них мы используем гомомофизм $G$ в группу подстановок на множестве $\Omega$ всех сопряженных с $D$ в $G$

подгрупп. Затем для каждой орбиты выполняются надлежащие вычисления. Эти программы работают значительно медленнее рассмотренных выше.

## §4. Двойные смежные классы и дальнейшая редукция

Весной этого года удалось обнаружить простую, но никем ранее не замеченную связь между подгруппами вида $\langle D, D^x \rangle$ и разложением группы $G$ на двойные смежные классы относительно подгрупп $N$ и $D$. Именно, подгруппы такого вида постоянны на этих двойных смежных классах.

**Предложение 5.** *Если $y \in NxD$, то совпадают подгруппы $\langle D, D^x \rangle = \langle D, D^y \rangle$.*

**Доказательство.** Поскольку $y \in NxD$, то имеет место равенство $y = nxd$, где $n \in N$, $d \in D$. В следующей оценке используем свойства нормализатора и системы образующих:

$$\langle D, D^y \rangle = \langle D, D^{nxd} \rangle = \langle D, D^{xd} \rangle \leqslant \langle D, D^x, d \rangle = \langle D, D^x \rangle.$$

Из равенства $x = n^{-1} y d^{-1}$ получается обратное включение. Итак, $\langle D, D^x \rangle = \langle D, D^y \rangle$ и предложение 5 доказано.

Обозначим через $W$ систему представителей двойных смежных классов группы $G$ относительно $N$ и $D$ (называем ее трансверсалью $G$ по $N$ и $D$). Из предыдущего предложения и §3 вытекают утверждения, обеспечивающие дальнейшее сокращение перебора примерно в $|D|$ раз.

**Теорема 1.** *Подгруппа $D$ пронормальна в $G$ тогда и только тогда, когда для $\forall\ w \in W$ имеем $\langle D, D^w \rangle \cap Nw \neq \varnothing$.*

**Теорема 2.** *Подгруппа $D$ паранормальна в $G$, если и только если для $\forall\ w \in W$ подгруппа $\langle D, D^w \rangle$ является $D$-полной.*

Эти результаты вместе с эффективным алгоритмом для нахождения какой-либо трансверсали $W$ группы $G$ по $N$ и $D$, который реализован в системе GAP, образуют основу модифицированных алгоритмов для тестирования подгрупп на упомянутые свойства вложения. Тесты IsPolynormal и IsWeaklyPronormal таким путем улучшены быть не могут.

В заключение отметим, что наиболее простым для компьютерной проверки свойством является слабая нормальность: достаточно вычислить нормализатор, правую трансверсаль по нему и для каждой из сопряженных подгрупп использовать стандартную GAP-функцию IsSubgroup. С другой стороны, известно [4], что для $p$-подгруппы $D$ в $G$ слабая нормальность эквивалентна пронормальности. Это обстоятельство существенно упрощает тестирование $p$-подгрупп на свойства вложения.

## Литература


1. М. С. Ба, З. И. Боревич, *О расположении промежуточных подгрупп.* — Кольца и линейные группы. Сб. научн. трудов. Краснодар (1988), 14–41.
2. З. И. Боревич, *О расположении подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 5–12.
3. З. И. Боревич, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 13–19.
4. П. В. Гаврон, Л. Ю. Колотилина, *О подгруппах в $T$-группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 62–65.
5. B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag (1967).
6. K. H. Müller, *Schwachnormale Untergruppen: eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen.* — Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **36** (1966), 129–157.
7. M. Schönert et al, *GAP-Groups, Algorithms and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH, Aachen, Germany, fitfh edition (1995).



Mysovskikh V. I. Testing subgroups of a finite group on some embedding properties like pronormality.

We describe here algorithms for testing subgroups of a finite group on the following embedding properties: pronormality, abnormality, paranormality and their weak analogies. The method is based on a decomposition of the main group on some double cosets. These algorithms are realized in computer algebra system GAP.



С.-Петербургский
государственный университет


Поступило 11 ноября 1997 г.