В. И. Мысовских, А. И. Скопин

СВОЙСТВА ВЛОЖЕНИЯ НЕПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ СТЕПЕНИ ВОСЕМЬ

В работе исследованы типы подгрупп степени восемь в симметрической группе S_8, отличных от p-подгрупп. Под типом подгруппы понимается наиболее сильное из следующих свойств: слабая нормальность [11], веерность ([1, 2]), полинормальность и паранормальность ([1, 3]), пронормальность и абнормальность ([8, 9, 1]), максимальность, нормальность, которым обладает подгруппа в S_8. Следует отметить, что исследования проводились для изучения вопроса об эквивалентности понятий полинормальности и паранормальности в конечной группе. В связи с этим p-подгруппы не рассматривались, поскольку для них эти понятия совпадают [4]. Отметим, что типы всех подгрупп в симметрических группах не выше седьмой степени исследованы в работе [5].

Список классов сопряженных подгрупп степени 8 в S_8 взят нами из работы [10] и мы сохранили порядок следования подгрупп в нем, но использовали более современные обозначения. Работа проводилась на компьютере, в рамках системы компьютерной алгебры GAP [12]. Интересно отметить, что независимое построение рассматриваемых нами подгрупп в GAP показало полноту списка Миллера [10]. Исследование свойств вложения этих подгрупп в группу S_8 проводилось на основе программ на языке GAP, разработанных на основе описанных в [7] алгоритмов. Приводимый далее список типов подгрупп по-существу является продолжением проведенной вручную работы, анонсированной в приложении к [6]. Эти вычисления подверглись машинной перепроверке с исправлением некоторых обнаруженных неточностей.

Обозначения подгрупп здесь такие же, как и в [5], но значительная часть подгрупп задана при помощи порождающих подстановок. Таблица состоит из пяти столбцов. В первом указан порядок подгруппы, во втором – ее номер среди равнопорядковых, в третьем – обозначение подгруппы. Четвертый столбец содержит информацию о порядке и номере нормализатора подгруппы в S_8, что позволяет идентифицировать его с точностью до сопряженности. Точное значение нормализатора может быть легко найдено в системе GAP. Наконец, в пятом столбце указан тип подгруппы в S_8. Поскольку свойства веерности и слабой нормальности никак не связаны, при отсутствии паранормальности упоминаем оба свойства. Сокращение сл.н. означает слабую нормальность, а нсн – ее отсутствие.

Непримарные подгруппы степени 8 в S_8

п	No.	подгруппа	п No.н	свойство
6	1	$\langle(123)(456)\rangle\cdot S_{78}$	72(3)	не веерна, нсн
	2	$A(\langle(123456)\rangle\cdot S_{78})$	24(1)	не веерна, нсн
	3	$\langle(123)(456),(12)(45)(78)\rangle$	24(1)	паранормальна
	4	$\langle(123)(456),(14)(26)(35)(78)\rangle$	72(3)	не веерна, нсн
12	1	$\langle(123456)\rangle\cdot S_{78}$	24(1)	веерная, сл.н.
	2	$\langle(123)(456),(12)(45)\rangle\cdot S_{78}$	24(1)	паранормальна
	3	$\langle(123)(456),(14)(26)(35)\rangle\cdot S_{78}$	72(3)	веерная, нсн
	4	$\langle(123456),(14)(23)(56)(78)\rangle$	24(1)	веерная, сл.н.
	5	$\langle(123456)(78),(13)(46)\rangle$	24(1)	паранормальна
	6	$\langle(123456)(78),(14)(23)(56)\rangle$	24(1)	веерная, сл.н.
	7	$\langle(123)(567),(12)(34)(56)(78)\rangle$	48(16)	не веерна, сл.н.
15	1	$\langle(12345)(678)\rangle$	120(1)	пронормальна
18	1	$\langle(123)\rangle\cdot\langle(456)\rangle\cdot S_{78}$	144(2)	пронормальна
	2	$A(S_{123}S_{45})\cdot\langle(678)\rangle$	72(1)	не веерна, нсн
	3	$\langle(123),(456),(12)(45)(78)\rangle$	144(2)	пронормальна
	4	$\langle(142536)(78),(123)\rangle$	72(3)	не веерная, нсн
24	1	$\langle(142536),(12)(56)\rangle\cdot S_{78}$	24(1)	паранормальна
	2	$A_{1234}\cdot\langle(56)(78)\rangle$	192(1)	не веерна, нсн
	3	$\langle(123),(34)(56)(78)\rangle$	192(1)	не веерна, нсн
	4	$\langle(1234)(5678),(12)(56)\rangle$	48(16)	паранормальна
	5	$\langle(1324)(56)(78),(15)(26)(78)\rangle$	96(4)	пронормальна
	6	$\langle(1324)(78),(12)(35)(46)(78)\rangle$	96(4)	пронормальна
	7	$\langle(135246)(78),(12)(78)\rangle$	96(4)	пронормальна
	8	$\langle(135)(246),(12)(34)\rangle\cdot S_{78}$	96(4)	пронормальна
	9	$\langle(123)(567),(12)(34)(56)(78),(15)(26)(37)(48)\rangle$	48(16)	веерная, сл.н.
	10	$\langle(145)(236),(1526)(3748)\rangle$	48(17)	паранормальна
	11	$\langle(123)(567),(12)(34)(56)(78),(16)(25)(37)(48)\rangle$	48(16)	веерная, сл.н.
30	1	$\langle(12345)\rangle\cdot S_{678}$	120(1)	пронормальна
	2	$A(L_{12345})\cdot\langle(678)\rangle$	120(1)	пронормальна
	3	$\langle(12345)(678),(14)(23)(67)\rangle$	120(1)	пронормальна
36	1	$A(S_{123}S_{45})S_{678}$	72(1)	веерная, нсн
	2	$A(S_{123}S_{456})S_{78}$	144(2)	пронормальна

	3	$A(S_{123}S_{456}S_{78})$	144(2)	пронормальна
	4	$\langle(123456),(135)\rangle\cdot S_{78}$	72(3)	веерная, нсн
	5	$\langle(135)(246),(1234)(56)(78)\rangle$	144(2)	пронормальна
	6	$\langle(142536)(78),(12)(45)\rangle$	144(2)	пронормальна
	7	$\langle(142536),(12)(45)(78)\rangle$	72(3)	веерная, нсн
	8	$S_{123}\cdot\langle(456)\rangle\cdot S_{78}$	72(1)	веерная, нсн
48	1	$S_{1234}\cdot\langle(56)(78)\rangle$	192(1)	веерная, нсн
	2	$A_{1234}S_{56}S_{78}$	192(1)	веерная, сл.н.
	3	$A_{1234}\cdot\langle(5678)\rangle$	192(1)	веерная, сл.н.
	4	$A_{1234}K_{1234}$	576(1)	не веерна, нсн
	5	$A(S_{1234}S_{56})S_{78}$	96(1)	веерная, нсн
	6	$\langle(1324),(12)(35)(46)\rangle\cdot S_{78}$	96(4)	пронормальна
	7	$\langle(1324)(56),(15)(26)\rangle\cdot S_{78}$	96(4)	пронормальна
	8	$A(S_{1234}\cdot\langle(5678)\rangle)$	192(1)	паранормальна
	9	$A(S_{1234}S_{56}S_{78})$	192(1)	паранормальна
	10	$\langle(123),(34)(56)(78),(34)(57)(68)\rangle$	192(1)	веерная, нсн
	11	$\langle(135)(246),(14)(23)(78),(12)(34)(56)\rangle$	96(4)	пронормальна
	12	$\langle(135)(246),(14)(23)(78),(12)(34)(56)(78)\rangle$	96(4)	пронормальна
	13	$\langle(135)(246),(14)(23),(12)(34)(56)(78)\rangle$	96(4)	пронормальна
	14	$\langle(123)(567),(124)(568),(12)(34)\rangle$	576(2)	не веерна, нсн
	15	$\langle(135246),(12)\rangle\cdot S_{78}$	96(4)	пронормальна
	16	$\langle(1234)(5678),(12)(56),(15)(26)(37)(48)\rangle$	48(16)	паранормальна
	17	$\langle(145)(236),(13682457)\rangle$	48(17)	паранормальна
56	1	$\langle(12)(34)(56)(78),(2354786)\rangle$	168(2)	паранормальна
60	1	$A(L_{12345})S_{678}$	120(1)	пронормальна
	2	$L_{12345}\cdot\langle(678)\rangle$	120(1)	пронормальна
	3	$A(L_{12345}S_{678})$	120(1)	пронормальна
72	1	$S_{123}S_{456}S_{78}$	144(2)	пронормальна
	2	$\langle(135)(246),(1234)(56)\rangle\cdot S_{78}$	144(2)	пронормальна
	3	$\langle(142536),(12)(45)\rangle\cdot S_{78}$	144(2)	пронормальна
	4	$\langle(142536),(1425)(36)(78)\rangle$	144(2)	пронормальна
	5	$\langle(142536)(78),(1425)(36)(78)\rangle$	144(2)	пронормальна
	6	$\langle(142536)(78),(1425)(36)\rangle$	144(2)	пронормальна
96	1	$S_{1234}S_{56}S_{78}$	192(1)	паранормальна
	2	$S_{1234}\cdot\langle(5678)\rangle$	192(1)	паранормальна
	3	$S_{1234}K_{5678}$	576(1)	веерная, нсн
	4	$\langle(135246),(12),(13)(24)\rangle\cdot S_{78}$	96(4)	абнормальна
	5	$A_{1234}(S_{56}\S S_{78})$	192(1)	веерная, сл.н.
	6	$\langle(123)(56),(34)(5768)\rangle$	192(1)	паранормальна
	7	$\langle(123)(5768),(34)(56)\rangle$	192(1)	паранормальна
	8	$A(S_{1234}(S_{56}\S S_{78}))$	192(1)	паранормальна
	9	$\langle(1234)(5678),(1243)(67)\rangle$	192(2)	паранормальна
	10	$\langle(163527)(48),(1526)(3748)\rangle$	192(2)	веерная, сл.н.
	11	$\langle(1648)(2537),(1527)(3648)\rangle$	576(2)	веерная, нсн
	12	$\langle(138247)(56),(145)(236),(12)(34)\rangle$	384	пронормальна
120	1	$L_{12345}S_{678}$	120(1)	абнормальна
	2	$\langle(125)(364),(35)(46)\rangle\cdot S_{78}$	240	пронормальна

	3	$A(\langle(132654),(13)(26)\rangle\cdot S_{78})$	240	пронормальна
144	1	$A_{1234}A_{5678}$	1152	пронормальна
	2	$(S_{123}\S S_{456})S_{78}$	144(2)	абнормальна
168	1	$\langle(1234567),(12)(34)(57)(68)\rangle$	336	паранормальна
	2	$\langle(12)(34)(56)(78),(2354786),(357)(468)\rangle$	168(2)	паранормальна
180	1	$A_{12345}\cdot\langle(678)\rangle$	720(1)	пронормальна
192	1	$S_{1234}(S_{56}\S S_{78})$	192(1)	паранормальна
	2	$\langle(1234)(5678),(1243)(67),(15)(26)(37)(48)\rangle$	192(2)	паранормальна
	3	$\langle S_{12}S_{34}S_{56}S_{78},(135)(246),(357)(468)\rangle$	384	пронормальна
	4	$\langle A(S_{12}S_{34}S_{56}S_{78}),(135)(246),(57)(68)\rangle$	384	пронормальна
	5	$\langle A(S_{12}S_{34}S_{56}S_{78}),(135)(246),(1728)\rangle$	384	пронормальна
240	1	$\langle(132654),(13)(26)\rangle\cdot S_{78}$	240	абнормальна
288	1	$S_{1234}A_{5678}$	576(1)	веерная, нсн
	2	$A(S_{1234}S_{5678})$	1152	пронормальна
	3	$\langle A_{1234}A_{5678},(15)(26)(37)(48)\rangle$	576(2)	веерная, нсн
336	1	$\langle(1234567),(12)(34)(56)(78),(34)(58)(67)\rangle$	336	максимальна
360	1	$S_{12345}\cdot\langle(678)\rangle$	720(1)	пронормальна
	2	$A_{12345}S_{678}$	720(1)	пронормальна
	3	$A(S_{12345}S_{678})$	720(1)	пронормальна
384	1	$\langle S_{12}S_{34}S_{56}S_{78},(135)(246),(37)(48)\rangle$	384	максимальна
576	1	$S_{1234}S_{5678}$	1152	пронормальна
	2	$\langle A(S_{1234}S_{5678}),(15)(26)(37)(48)\rangle$	1152	пронормальна
	3	$\langle A(S_{1234}S_{5678}),(1526)(37)(48)\rangle$	1152	пронормальна
720	1	$S_{12345}S_{678}$	720(1)	максимальна
	2	$A_{123456}S_{78}$	1440	пронормальна
	3	$A(S_{123456}S_{78})$	1440	пронормальна
1152	1	$\langle S_{1234}S_{5678},(15)(26)(37)(48)\rangle$	1152	максимальна
1344	1	$\langle(1453786),(17)(45),(12)(34)(56)(78)\rangle$	1344	паранормальна
1440	1	$S_{123456}S_{78}$	1440	максимальна
(8!)/2	1	$A_{12345678}$	8!	нормальна
8!	1	$S_{12345678}$	8!	нормальна

Проведенные вычисления показали, что каждая полинормальная подгруппа степени 8 в S_8 является и паранормальной. Случай подгрупп степени восемь по сравнению с подгруппами в S_k, $k \leqslant 7$ (см. [5]), доставляет большое число примеров паранормальных, но не слабо пронормальных подгрупп. В то же время в S_8 возрасло количество невеерных подгрупп, что связано с увеличением числа промежуточных подгрупп и усложнением решеток.

Общее число непримарных подгрупп степени 8 в S_8 равно 110. Среди них имеется 11 невеерных подгрупп, 21 веерная, но не полинормальная, 21 паранормальная, но не слабо пронормальная, 46 пронормальных, 4 абнормальных, 5 максимальных и 2 нормальные подгруппы.

Литература

1. М. С. Ба, З. И. Боревич, *О расположении промежуточных подгрупп.* Кольца и линейные группы. - Сб. научн. трудов. Краснодар (1988), 14–41.
2. З. И. Боревич, *О расположении подгрупп.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **94** (1979), 5–12.
3. З. И. Боревич, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 13–19.
4. П. В. Гаврон, Л. Ю. Колотилина, *О подгруппах в T-группах.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **103** (1980), 62–65.
5. П. В. Гаврон, В. И. Мысовских, *О подгруппах симметрических групп степени не превосходящей семи.* Кольца и матричные группы. - Сб. научн. трудов. Орджоникидзе (1984), 35–42.
6. В. И. Мысовских, *Полинормальные подгруппы.* Диссертация, Ленинград 1990.
7. В. И. Мысовских, *Тестирование подгрупп конечной группы на свойства вложения типа пронормальности.* Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997).
8. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups.* Berlin–New York, 1992.
9. B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, 1967.
10. G. A. Miller, *Memoir on the substitution-groups whose degree does not exceed eight.* Am. J. Math. **21** (1899), 287–338.
11. K. H. Müller, *Schwachnormale Untergruppen:eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalizatorgleichen Untergruppen.* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **36** (1966), 129–157.
12. M. Schönert et al, *GAP – Groups, Algorithms and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH, Aachen, Germany, fifth edition, 1995.

Mysovskikh V. I., Skopin A. I. Embedding properties of non-primary subgroups of the symmetric group of degree eight.

The paper is devoted to investigation of some subgroup embedding properties for 110 subgroups of the symmetric group on eight letters. We deal with those non-primary subgroups whose degree is exactly eight. The results were obtained by using of the computer algebra system GAP. They are summarized in a form of the table. We found out that every polynormal subgroup is at the same time also paranormal.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 22 октября 1997 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН