А. А. Панин

ТЕОРИЯ ГАЛУА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛНЫХ ДЕДЕКИНДОВЫХ СТРУКТУР

Введение

В настоящей работе обобщаются результаты [2, 3]. Именно, здесь строится некоторая теория Галуа для полных структур. Из доказанного удается вывести известное описание промежуточных подгрупп полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащих группу диагональных матриц (см. [1]).

Всюду в дальнейшем автоморфизмом полной структуры мы называем биективное отображение структуры на себя, перестановочное с верхней и нижней гранями любого ее подмножества.

Все используемые обозначения и определения вводятся в [2].

Формулировка основных результатов

Пусть L – полная дедекиндова структура, L_0 – ее конечная подструктура, являющаяся булевой алгеброй, G – подгруппа группы всех автоморфизмов структуры L, $H = G(L_0)$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – все атомы L_0. Рассмотрим ряд дополнительных условий (по умолчанию предполагается, что все индексы изменяются от 1 до n):

1°. $0_{L_0} = 0_L$, $1_{L_0} = 1_L$.

2°. Если $f \in G$ и $f(e_i)+\hat{e}_j = 1$ для некоторых i, j, то $f(e_i)\cdot\hat{e}_j = 0$.

3°. Если $a \in G$ и $[a(e_i)]_i = e_i$ для некоторого i, то существует $h \in H_i$ такой, что $[ha(x_i)]_i = [ah(x_i)]_i = x_i$ для любого $x_i \leqslant e_i$.

4°. Существует $h \in H_t \cap G(\bar{L}_0)$ такой, что $[aha^{-1}(x_i)]_r = [a([a^{-1}(x_i)]_t]_r$ для всех $a \in G$, $r \neq i$, $x_i \leqslant e_i$.

5°. Пусть $u \in \bar{L}_0$, $u \geqslant e_i$ для некоторого i; $g \in G$, $[g(u)]_i = e_i$. Тогда существует $t \in G$ такой, что:

1) $[gt(e_i)]_i = e_i$,

2) $t(e_s) = e_s$ для $s \neq i$,

3) $[t(e_i)]_j \leqslant [u]_j$.

6°. Если $f, g \in G$ такие, что $[f(e_i)]_j \leqslant [g(e_i)]_j$ для некоторых i, j, то $[f(x)]_j \leqslant [g(x)]_j$ для любого $x \in L_0'$, $x \leqslant e_i$.

7°. Если $u \leqslant e_j$ для некоторого j, то для любого $i \neq j$ существуют $y_\alpha \leqslant e_j$, $\alpha \in I$ такие, что $u = \sum\limits_{\alpha \in I} y_\alpha$ и $H_{ij}(y_\alpha) \neq \varnothing$.

8°. Если $x = [f(e_i)]_j$ для некоторых $f \in G$, $i \neq j$, то существует $g \in H_{ij}(x)$ такой, что $[g(u)]_j = [f(u)]_j$ для каждого $u \leqslant e_i$.

9°. Если $w \in L$, $[w] = (0, \dots, e_i, \dots, x, \dots, 0)$, где $w \cdot e_j = 0$ и $x \leqslant e_j$ такой, что $H_{ij}(x) \neq \varnothing$, то существует $t \in H_{ij}(x)$, для которого $t(w) = e_i$.

10°. Пусть $a_\alpha \in H_{ij}(x_\alpha)$ и $y \leqslant \sum\limits_{\alpha \in I} x_\alpha$ такой, что $H_{ij}(y) \neq \varnothing$. Тогда $H_{ij}(y) \subseteq \langle H, a_\alpha : \alpha \in I \rangle$.

11°. Если $a \in G$, то для любых $i \neq j$ и любого $h \in H_t$ $H_{ij}([aha^{-1}(e_i)]_j \cap \langle a, H \rangle \neq \varnothing$.

12°. $L_0' \subseteq \bar{L}_0$.

13°. Для всякого $x \leqslant e_i$, $x \neq e_i$, существует коатом $y \leqslant e_i$, для которого $x \leqslant y$.

Для каждого i обозначим $w_i = \prod\limits_{x - \text{ коатом в } e_i} x$ и $w = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i$.

14°. Структура $L^w = \{x \in L : x \geqslant w\}$ имеет конечную длину.

Обозначим $G^w = \{g \in G : g$ тождественен на $L^w\}$.

15°. Пусть $t \in H_{ij}(x)$, $x \leqslant w_j$. Тогда существует $h \in H$, для которого $th \in G^w$.

16°. Структура $L^w \cap \bar{L}_0(H)$ конечна.

Теорема 1. *При выполнении условий* 1°–12° *имеем для любой подгруппы $F \geqslant H$ группы G:*

(1) *$\sigma = \sigma(F)$ – сетевой набор в L_0';*

(2) *$G(K_\sigma) \trianglelefteq F$;*

(3) *если M – подструктура L_0', для которой $G(M) \trianglelefteq F$, то $G(M) = G(K_\sigma)$.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1°–11°, 13°–16°. *Пусть, далее, $\tau = (\tau_{ij})$ – сетевой набор в L_0', $g \in G$. Тогда:*

(1) *если $[g(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij}$ для всех i, j, то $g \in G(K_\tau)$;*

(2) *индекс $G(K_\tau)$ в ее нормализаторе конечен.*

Доказательство основных результатов

Доказательство всех пунктов Теоремы 1 аналогично доказательству соответствующих утверждений работы [2]. Отметим, что вместо рассуждений [2], использующих свойства функции размерности на L, нужно применять модулярный закон и следующее очевидное утверждение:

Если $A \subseteq G$, причем $A^{-1} = A$, и $a(x) \leqslant x$ для всех $a \in A$ и некоторого $x \in L$, то $a(x) = x$ для всех $a \in A$.

Доказательство Теоремы 2 будет приведено ниже.

Лемма 1. *Для любого $f \in G$ $f(w) = w$.*

Доказательство. Достаточно для любого $f \in G$ проверить $[f(w_i)]_j \leqslant w_j$ для всех i, j.

Очевидно, что $w \in L_0'$, поэтому при $i = j$ все следует из условия 6°.

Пусть $i \neq j$, $g \in H_{ij}(e_j)$. По условию 9° существует $t \in H_{ji}(e_i)$, такой, что $tg(e_i) = e_j$. Пусть y – произвольный коатом в e_j. Тогда $(tg)^{-1}(y)$ – коатом в e_i, откуда $tg(w_i) \leqslant y$, поэтому $[g(w_i)]_j \leqslant w_j$. Доказательство леммы завершается применением условия 6°.

Пусть $\tau = (\tau_{ij})$ – сетевой набор в L_0'.

Лемма 2. *Пусть $\rho_{ij} = \tau_{ij} + w_j$. Тогда:*

(1) $\rho = (\rho_{ij})$ – сетевой набор в L_0';

(2) $G(K_\rho) = G(K_\tau) \cdot G^w$.

Доказательство. Пусть i, j, k попарно различны, $g \in H_{ij}(x)$, $x \leqslant \tau_{ij} + w_j$.

По условиям 7° и 10° $g \in \langle H, H_{ij}(y),\, H_{ij}(z) : y \leqslant \tau_{ij},\, z \leqslant w_j \rangle$.

Если $f \in H_{ij}(y)$, где $y \leqslant \tau_{ij}$, то $[f(\tau_{ki} + w_i)]_j \leqslant \tau_{kj} + w_j$ по Лемме 1.

Если $f \in H_{ij}(z)$, где $z \leqslant w_j$, то $[f(\tau_{ki} + w_i)]_j \leqslant w_j$.

(1) Следует из условия 8°.

(2) Включение $\supseteq$ очевидно. Далее, по условию 15° и Теореме 7.2 [2] $G(K_\rho) \subseteq \langle G(K_\tau), G^w \rangle$. Осталось заметить, что $G^w \trianglelefteq G$.

Доказательство Теоремы 2 (1).

А. Допустим, что $\tau_{ij} \leqslant w_j$ для всех $i \neq j$. Так как $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} g(e_i)$, то $e_1 = [g(e_1)]_1 + w_1$. По условию 13° $[g(e_1)]_1 = e_1$. Повторяя доказательство Теоремы 7.2 [2], получим $g \in \langle H, H_{ij}(x) : x \leqslant \tau_{ij} \rangle \leqslant G(K_\tau)$.

Б. Общий случай. Обозначим $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \tau_{ij}$. По определению сетевого набора имеем $g(x_i) \leqslant x_i$. Далее, по Лемме 1 $g(x_i + w) \leqslant$

$x_i + w$, и так как g при сужении на L^w становится автоморфизмом этой структуры, то по условию 14^0 имеем $g(x_i + w) = x_i + w$. Итак, $g \in G(K_\rho)$.

По Лемме 2 $g = g_1 g_2$, где $g_1 \in G(K_\tau)$, $g_2 \in G^w$. Так как $g_2(x_i) \leqslant x_i$, то $[g_2(e_i)]_j \leqslant \tau_{ij} \cdot w_j$ для всех $i \neq j$. По пункту А отсюда $g_2 \in G(K_\tau)$, поэтому и $g \in G(K_\tau)$.

Доказательство пункта (2) по существу не отличается от построений §7 работы [1].

Так же, как в [2], из Теорем 1 и 2 можно вывести описание подгрупп полной линейной группы над полулокальным кольцом (все поля вычетов которого имеют не менее семи элементов; см. [1]), содержащих группу диагональных матриц, в терминах сетей идеалов в этом кольце.

Автор выражает благодарность А. В. Яковлеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Санкт-Петербурга и Министерства образования РФ, программа "Молодые ученые – 1997", грант No. 22.

Литература

1. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц.* — Тр. Мат. ин-та Акад. Наук СССР **148** (1978), 43–57.
2. А. А. Панин, А. В. Яковлев, *Теория Галуа для одного класса дедекиндовых структур.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997).
3. А. З. Симонян, *Теория Галуа для дедекиндовых структур.* — Канд. дисс.. СПб, 1992, с. 73.

Panin A. A. The Galois theory for a class of modular the complete lattices.

A Galois theory for a class of the complete modular lattices is constructed. The known description of the intermediate subgroups of the full linear group over a semilocal ring, containing the group of diagonal matrices, can be deduced from the proved results.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 13 октября 1997 г.