У. М. Пачев

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОТОКОВ КЛАССОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ БИНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ В ГАУССОВЫХ РОДАХ

Введение

Для решения асимптотических задач арифметической теории тернарных квадратичных форм Ю. В. Линник в ряде работ (см. [4]) разработал оригинальный метод аналитической теории чисел, использующий некоммутативную арифметику и названный при его дальнейшем развитии дискретным эргодическим методом (далее ДЭ-метод). Настоящая статья развивает идею Ю. В. Линника [3] о возможности перенесения асимптотических теорем о числе классов положительных бинарных квадратичных форм на каждый гауссовый род в отдельности (относительно этой проблематики см. также [5, 9]). В ней доказывается эргодическая теорема о потоках указанных классов, из которой получается асимптотическая формула с остаточными членами для числа классов бинарных квадратичных форм в гауссовом роде, образы которых при изображении целыми точками поверхности простейшего двуполостного гиперболоида

$$f_0(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_3 - x_2^2 = m, \quad x_1 > 0 \tag{1}$$

принадлежат данной области на поверхности (1) и данному классу вычетов по заданному модулю (при этом остаточные члены получены в предположении некоторых гипотез о поведении L-функции Дирихле). В последнее время Дьюк [12] методом модулярных форм с использованием результатов Иванца [11] получил асимптотическую формулу с безусловным остаточным членом для числа целых точек в данной области двуполостного гиперболоида. Но в [12] в отличие от нашей работы не рассматривалось распределение квадратичных форм по классам вычетов и по гаусссовым родам и, кроме того нами проводится исследование ДЭ-методом, что позволило дополнительно выявить эргодическое поведение потоков классов бинарных квадратичных форм в гауссовом роде.

§1. Сведения из аналитической арифметики матриц второго порядка и гипотезы о поведении L-функции Дирихле

В этом параграфе мы приводим некоторые факты из аналитической арифметики матриц второго порядка, используемые в ДЭ-методе, и две гипотезы о поведении L-функции Дирихлу, справедливость которых дают остаточные члены в асимптотических формулах для числа рассматриваемых классов бинарных квадратичных форм. Следующее предложение является "ключевой" леммой ДЭ-метода для двуполостных гиперболоидов.

Предложение 1. *Пусть $L_1, \ldots, L_n$, $N(L_i) = m$ $(i = 1, \ldots, n)$ – различные целые положительно определенные приведенные примитивные вектор-матрицы норм $m > 0$. Пусть $k > 0$ – нечетное число с условием*

$$l^2 + m \equiv 0 \pmod k. \tag{2}$$

Пусть имеют место матричные равенства

$$l + L_i = K_i T_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

где K_i, T_i – целые матрицы, причем

$$N(K_i) = k, \ N(T_i) = \frac{l^2 + m}{k} = t \quad (i = 1, \ldots, n); \tag{4}$$

$$\textit{н.о.д.}\ (k, t) = 1. \tag{5}$$

Пусть $\xi = \xi(m)$, $\xi_1 = \xi_1(m)$ – произвольные положительные вещественные функции аргумента $m > 0$ с условием

$$\xi(m) \to \infty, \quad \xi_1(m) \to \infty \quad \textit{при} \quad m \to \infty. \tag{6}$$

Тогда, если еще выполнены условия

$$n \gg h(-m) m^{-\frac{1}{\xi(m)}}, \tag{7}$$

$$\textit{н.о.д.}\ (m, k) \ll m^{-\frac{1}{\xi_1(m)}}, \tag{8}$$

$$\{h(-m)\}^{\alpha} \ll \sigma_0(k) \ll \{h(-m)\}^{\alpha_1}, \tag{9}$$

то найдется такая функция $\eta(m) \to \infty$ *при* $m \to \infty$, *что для числа* w *неассоциированных справа матриц* $K_1, \ldots, K_n$ *в равенствах* (3) *справедлива оценка снизу*

$$w \gg \sigma_0(k) m^{-\frac{1}{\eta(m)}}, \tag{10}$$

где $\sigma_0(k)$ – *число примитивных неассоциированных справа матриц нормы* k; $h(-m)$ – *число классов собственное примитивных положительных бинарных квадратичных форм определителя* m; α, α_1, $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 \leqslant 1$ – *вещественные постоянные.*

Доказательство см. [7], где получено явное выражение для функции $\eta(m)$ через функции $\xi(m)$ и $\xi_1(m)$.

Предложение 1, называемое далее ключевой леммой, будем обозначать через $\mathcal{Z}\{\xi, \xi_1, \eta, \alpha, \alpha_1\}$. Для получения в асимптотических формулаъ остаточных членов, зависящих только от элементарных функций, мы будем предполагать справедливость следующих двух гипотез о поведении L-функции Дирихле.

Гипотеза ($\mathfrak{N}$). Пусть $\chi - \chi(n)$ – вещественный характер Дирихле, имеющий наименьший модуль среди характеров, для которых

$$\chi(k) = \left(\frac{-m}{k}\right), \quad \text{если н.о.д.} \quad (k, 2m) = 1,$$

где $\left(\frac{-m}{k}\right)$ – символ Кронекера. $L(s,\chi)$-функция Дирихле, определяемая рядом

$$L(s,\chi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi(k)}{k^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Обозначим

$$l(m) = -\frac{\log L(1,\chi)}{\log m}.$$

Тогда при $m \to \infty$

$$l(m) \ll \frac{1}{\log\log m}, \tag{11}$$

где постоянные, входящие в символ $\gg$ абсолютные.

Вторая гипотеза относится к поведению нулей $L(s,\chi)$.

Гипотеза ($\mathfrak{M}$). В области

$$|s-1| < \frac{(\log\log m)^2 \log\log\log m}{\sqrt{\log m}}$$

комплексного переменного s при достаточно больших m нет нулей $L(s,\chi)$.

С учетом принятых гипотез из ключевой леммы следуют ее условные варианты (предложения 2, 3).

Предложение 2. *Пусть выполнена гипотеза* $(\mathfrak{N})$. *Тогда для любых вещественных* $c_1>0$, $c_2>0$ *имеет место ключевая лемма*

$$\mathcal{Z}\,\{\,c_1\log\log m,\; c_2\log\log m,\; c_3\log\log m;\; 0,1\,\}\,,$$

где $c_3>0$ *определяется через* c_1, c_2 *и постоянные гипотезы* $(\mathfrak{N})$.

Предложение 3. *Пусть выполнена гипотеза* $(\mathfrak{M})$ *и* $m=m_1m_2$, *где* m_1 *–бесквадратно, а* m_2 *– полный квадрат, причем*

$$m_2 \ll m^{\frac{c_4}{\sqrt{\log m}\log\log m}}\,, \tag{12}$$

$$\tau(k) \ll m^{\frac{c_5}{\sqrt{\log m}\log\log m}}\,, \tag{13}$$

где $\tau(k)$ *– число делителей* k.

Тогда имеет место ключевая лемма

$$\mathcal{Z}_{M,B}\left\{\frac{1\sqrt{\log m}\log\log m}{c_1},\frac{1\sqrt{\log m}\log\log m}{c_2},\frac{1\sqrt{\log m}\log\log m}{c};0,\alpha_1\right\},$$

где постоянная $c>0$ определяется постоянными $c_1>0$, $c_2>0$, $c_3>0$, $c_4>0$, $c_5>0$ и $M=\{m\}$ – последовательность чисел m, определяемая условием (12), $B=\{b\}$ – последовательность целых чисел $b=b(m)>0$ с условием (13).

При применении ДЭ-метода к неопределенным тернарным квадратичным формам еще возникают некоторые вопросы теории делимости матриц второго порядка большой нормы (см. [6] предложение 4.2, которое будет использовано в §3).

§2. Построение потока в гауссовом роде и эргодические теоремы

Построим (ср. [5, 7]) поток целых точек на поверхности (1) соответствующих представителям гауссового рода G. При этом точка $(a,b,c)\in R^3$, вектор-матрица $L=\begin{pmatrix} b & -a\\ c & -a\end{pmatrix}$ и бинарная квадратичная форма $ax^2+2bxy+cy^2$ отождествляются между собой.

Пусть $q > 0$ – нечетное число, взаимно простое с m, (при построении потока в гауссовом роде число q будем считать квадратом нечетного числа), причем

$$\left(\frac{-m}{p}\right) = 1, \quad p \,|\, q \tag{14}$$

для всех простых делителей p числа q. Тогда найдется целое число u, для которого

$$u^2 + m \equiv 0 \pmod q. \tag{15}$$

Обозначим через $\widetilde{G}$ множество всех приведенных собственно примитивных вектор-матриц нормы m, образы которых лежат в гауссовом роде G. Построим поток $\varkappa_s(\widetilde{G}; q, u)$ длины s на множестве $\widetilde{G}$, отвечающий числам m, q, u и множеству $\widetilde{G}$. Обозначим через t число гауссовых родов собственно примитивных положительных бинарных квадратичых форм определителя m. Тогда под потоком $\varkappa_s(\widetilde{G}; q, u)$ мы понимаем совокупность $\frac{h(-m)}{t}$ последовательностей длины s целых приведенных собственно примитивных вектор-матриц

$$L_k^{(1)}, L_k^{(2)}, \ldots, L_k^{(s)} \in \widetilde{G} \quad \left(k = 1, \ldots, \frac{h(-m)}{t}\right),$$

которые строятся следующим образом. В силу (15) по основной теореме арифметики матриц второго порядка (см. [6]) можно записать

$$u + L = QU, \quad N(Q) = q, \tag{16}$$

где Q и U – целые матрицы, причем Q – примитивная матрица, определяемая с точностью до ассоциированности справа. При этом в силу (16)

$$L' = Q^{-1} L Q \tag{17}$$

– целая приведенная собственно примитивная вектор-матрица нормы m. Операцию, по которой L ставится в соответствии L', будем обозначать через T, та что $L'TL = Q^{-1}LQ$, где T – обратимая операция, действующая на множестве $\widetilde{G}$. Операция T индуцирует также поток $\varkappa_s = \varkappa_s(G; q, u)$ на множестве классов гауссового рода G, если использовать композицию классов бинарных квадратичных форм (см. [5]). Операция T задает поток $\varkappa_s(\widetilde{G}; q, u)$

любой заданной длины s на множестве $\widetilde{G}$: каждой вектор-матрице $L \in \widetilde{G}$ отвечает цепочка $L \to L^{(1)} \to L^{(2)} \to \ldots \to L^{(s-1)}$, где $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(s-1)}$ определяются рекуррентно: $L^{(i)} = TL^{(i-1)} = TL^{(i)} = T^i L$, $L^{(0)} = L$ $(i = 1, \ldots, s-1)$.

Возможность построения потока в гауссовом роде получается следующим образом (см. [3]). Если в (17) взять матрицы $L = \begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix}$ и $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\det Q = q > 0$, то отвечающая матрице L' форма $\varphi'(x,y) = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ получается из формы $\varphi(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ соответствующей матрице L подстановкой $T = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Если $\det Q$ выберем квадратом нечетного числа, т.е. $q = q_1^{2k}$ (при этом в ДЭ-методе k – достаточно большое фиксированное целое число), то соответствующие унимордулярные матрицы T будут иметь рациональные коэффициенты с общим значенателем $\sqrt{q} = q_1^k$, взаимно простым с m и, следовательно, $\varphi'(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ будут принадлежать к одному и тому же гауссовому роду (см. [1, 3]). Для так построенного потока $\varkappa_s = \varkappa_s(\widetilde{G}; q, u)$ имеют место “эргодическая теорема” и “теорема перемешивания” для классов гауссового рода.

Теорема 1 (“эргодическая”). *Пусть $m > 0$ – целое число, g – нечетное число, взаимно простое с m; b_1, b_2. b_3 – целые числа, удовлетворяющие сравнению*

$$f_0(b_1, b_2, b_3) \equiv m \pmod{g}. \tag{18}$$

Пусть Λ_m – ограниченная квадрируемая область на поверхности (1) с фиксированной проекцией $\widetilde{\Lambda}_m = \frac{1}{\sqrt{m}}\Lambda_m$ на нормированный гиперболоид; $\lambda = \lambda(\Lambda_m) > 0$ – ее гиперболическая мера. Пусть q, u – целые числа, для которых выполнено условие (15) и н.о.д. $(q, 2m) = 1$ (при этом q есть квадрат нечетного числа). Рассмотрим часть $\varkappa' \subset \varkappa$ потока $\varkappa = \varkappa_s(\widetilde{G}'q, u)$ из h' цепочек $L_k, L_k^{(1)}, \ldots, L_k^{(s-1)} \in \widetilde{G}$ $(k = 1, \ldots, h')$. Пусть имеет место ключевая лемма $\mathcal{Z}\{\xi, \xi_1, \eta, \alpha, \alpha_1\}$, причем

$$\xi(m),\, \xi_1(m),\, \eta(m) \to \infty,\; \xi(m),\, \xi_1(m),\, \eta(m) = 0\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right). \tag{19}$$

Пусть при $m \to \infty$

$$h' \gg \frac{h(-m)}{t \log^{e} m}, \tag{20}$$

где $e \gg 2$ – заданное число; t – число гауссовых родов;

$$\frac{g^2\log(g+1)}{\lambda} = 0\left(\frac{\eta(m)}{\log\eta(m)}\right); \tag{21}$$

$$s \gg \log m, \tag{22}$$

где постоянные в оценках (20) и (22) зависят только от q, g, $\widetilde{\Lambda}_m$. Тогда цепочки множества $\varkappa_s$ можно разбить на две категории:

а) "плохие", которых мало: Их общее число

$$\ll \frac{1}{\log^e m}\,h'; \tag{23}$$

б) "хорошие", обладающие свойством "эргодичности": если k – индекс, отвечающий хорошей цепочке, то

$$r_k = \#\left\{j \,\middle|\, j = 1,\dots,s,\ T^j L_k \in \Lambda_m,\ T^j L_k \in \widetilde{G},\ T^j L_k \equiv \right.$$
$$\left.\equiv \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix}\right\} = \frac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{1}{\rho(g,m)}s\bigl(1+O(\gamma(m))\bigr), \tag{24}$$

где

$$\gamma(m) = \frac{g\sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\log\eta(m)}{\eta(m)}};$$

$\lambda_0 = \frac{2\pi}{9}$ – гиперболическая мера фундаментальной области приведения положительных бирантных квадратичных форм; $\rho(g,m)$ – число решений (b_1,b_2,b_3) сравнения (18); постоянные, входящие в оценки (23) и (24), зависят только от q, g и $\widetilde{\Lambda}_m$ и постоянных, входящих в ключевую лемму.

Эта теорема, носящая название "эргодической теоремы" доказывается на основе двух "предварительных эргодических теорем" (предложения 5, 6 §3). Если в теореме 1 заменить условие (21) на

$$\frac{g^2\log(g+1)}{\lambda} = o\left(\frac{1}{\widetilde{l}(m)\mid\log\widetilde{l}(m)\mid}\right),$$

то для r_k получим

$$r_k = \frac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{1}{\rho(g,m)}\cdot s\left(1+O\left(\frac{g\sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{\widetilde{l}(m)\mid\log\widetilde{l}(m)\mid}\right)\right),$$

где
$$\widetilde{l}(m)=\max\left\{\frac{1}{\log\log m},\, l(m)\right\}.$$

Используя условные варианты ключевой леммы, из справедливости гипотез $(\mathfrak{N})$ и $(\mathfrak{M})$ мы соответственно получим следующие выражения для функции $\gamma(m)$, входящей в остаточный член асимптотической формулы (24):

$$\gamma(m)=\frac{g\sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{\log\log\log m}{\log\log m}};$$
$$\gamma(m)=\frac{g\sqrt{\log(g+1)}}{\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{1}{(\log m)^{1/4}}.$$

Из "эргодической" теоремы можно вывести следующую "теорему перемешивания" для гауссовых родов.

Теорема 2. *В обозначениях и условиях теоремы 1 пусть $\tau(m)\geqslant 2$ – такая неубывающая функция, что $\tau(m)=o(\gamma(m))$ и $\widetilde{G}'\subset\widetilde{G}$ – множество приведенных собственно примитивных вектор-матриц L нормы m с числом элементов*
$$h'=\#\widetilde{G}'\gg\frac{h(-m)}{t\log^{e} m}. \tag{25}$$
Тогда индексы $j=1,\dots,s$ можно разбить на две категории:

а) *"хорошо перемешивающие" индексы j, для которых*
$$r^{(j)}=r^{(j)}\big(\varkappa',\widetilde{G}',\Lambda_m;g,b_1,b_2,b_3\big)=$$
$$=\#\left\{k\,\Big|\,k=1,\dots,h',\,T^jL_k\in\widetilde{G}',\,T^iL_k\equiv\begin{pmatrix}b_2&-b_1\\b_3&-b_2\end{pmatrix}\pmod g\right\}=$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{1}{\rho(g,m)}\cdot h'\big(1+O(\tau(m)\gamma(m))\big); \tag{26}$$

б) *"плохие" индексы j, общее число которых*
$$\ll\frac{1}{\tau(m)}\cdot s; \tag{27}$$

постоянные, входящие в (26), зависят только от q, e и постоянных, входящих в ключевую лемму $\mathcal{Z}\{\xi,\xi_1,\eta,\alpha,\alpha_1\}$ и в оценки (19)–(23).

Примерим теорему 2 “перемешивания” к потоку $\varkappa'_s$, в котором для каждого $j = 1, \ldots, s$ его “сечение”

$$\mathcal{I}_j = \left\{ T^{j-1} L_k \,\middle|\, k = 1, \ldots, h' \right\}$$

инвариантно относительно операции T, т.е. $\mathcal{I}_j = \mathcal{I}_1$. Тогда, полагая множеством всех приведенных собственно примитивных вектор-матриц, принадлежащих $\widetilde{G}$ и, фиксируя при этом один из “хороших” индексов j при $\tau(m) = 2$, мы придем к асимптотической формуле с остаточным членом для числа $h_G(\Lambda_m; g, b_1, b_2, b_3)$ классов гауссового рода G, для которых представители (x_1, x_2, x_3) удовлетворяют условиям $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_m$, $(x_1, x_2, x_3) \equiv (b_1, b_2, b_3) \pmod g$ (см. [9]). Асимптотическая формула без остаточного члена для $h_G(\Lambda_m; g, b_1, b_2, b_3)$ получена в [8] несколько другим способом.

§4. Доказательство теорем 1, 2

Как и в работе [7], теорему 1 выводим из следующих предложений 5 и 6 (“предварительные эргодические теоремы”).

Предложение 5. *Пусть в обозначениях теоремы* 1 *вектор-матрица* L_0 *такая, что* $N(L_0) \equiv m \pmod g$; Q *– целая примитивная матрица нормы* q; *пусть* $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots j_{s_1} \leqslant s$ *– фиксированное подмножество индексов* $j = 1, \ldots, s$, *причем*

$$q^s \leqslant \frac{h(-m)}{t}, \quad s_1 \gg \frac{\log m}{\delta(m)\tau(m)}, \tag{28}$$

где

$$\delta(m) = \left[\frac{\rho \log \eta(m)}{\log q} \right];$$

ρ *– некоторая абсолютная постоянная;* $\tau(m) \geqslant 2$ *– неубывающая функция;* t *– число гауссовых родов. Пусть*

$$j_{v+1} - j_v \geqslant \delta(m) \quad (v = 1, \ldots, s_1 - 1). \tag{29}$$

Тогда цепочки множества $\varkappa'_s$ *можно разбить на две категории:*

а) *"хорошие" цепочки, для которых*

$$\begin{gathered} r_k(j_1,\ldots,j_{s_1};Q) = r_k(\varkappa_s';j_1,\ldots,j_{s_1};Q;\widetilde{G},\Lambda_m,g,L_0) = \\ = \#\{j=j_v \mid v=1,\ldots,s_1,Q\setminus(u+T^jL_k), \\ T^jL_k\in\widetilde{G},\, T^jL_k\in\Lambda_m,\, T^jL_k\equiv L_0 \pmod g\} = \\ = \frac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{1}{\rho(g,m)}\cdot\frac{1}{\sigma_0(q)}\cdot s_1\big(1+O(\tau(m)\gamma(m))\big); \end{gathered} \tag{30}$$

б) *"плохие" цепочки, общее число которых*

$$\ll \frac{1}{\log^e m}h', \tag{31}$$

где $\sigma_0(q) = q\prod\limits_{p|q}(1+\frac{1}{p})$ *– число неассоциированных справа целых примитивных матриц нормы* q*; постоянные, входящие в* (30) *и* (31) *зависят только от* q, e *и постоянных, входящих в ключевую лемму* $\mathcal{Z}\{\xi,\xi_1,\eta,\alpha,\alpha_1\}$ *и в оценки* (28), (19)–(22)

Доказательство. Как и в [7] рассматриваем матричные равенства

$$l+L_k = B_kU_k, \quad B_k = Q_{k1}\cdot\ldots\cdot Q_{ks}, \tag{32}$$

где $N(Q_{kj}) = q$, $l\equiv u \pmod q$, а Q_{kj} выбраны так, что вектор-матрицы $T^jL_k = (Q_{k1}\cdot\ldots\cdot Q_{ks})\in\widetilde{G}$ и приведены.

Пусть ζ_{L_k} – совокупность вещественных матриц X второго порядка с условием $X^{-1}L_kX\in\Lambda_m$ $(k=1,\ldots,n)$. Пусть $\gamma_{L_k}^{(j)}$ – совокупность классов целых матриц $S \pmod g$, для которых

$$L_kS\equiv SL_0,\ N(S)\equiv q^j \pmod g.$$

Тогда в силу условий, накладываемых на L_k имеем

$$Q_{k1}\cdot\ldots\cdot Q_{ks}\in\gamma_{L_k}\cap\gamma_{L_k}^{(j)}, \quad Q\setminus Q_{k,j+1}. \tag{33}$$

Поэтому, если обозначить черезъ $\nu_k = \nu_k(\widetilde{G},\Lambda_m;g,L_0,Q)$ число индексов $j=j_1,\ldots,j_{s_1}$ с условиями (33), то (30) примет вид

$$\nu_k = \beta s_1\cdot\big(1+O\big(\sqrt{\tau(m)}\gamma(m)\big)\big), \quad \beta = \frac{\lambda}{\lambda_o}\cdot\frac{1}{\rho(g,m)}\cdot\frac{1}{\sigma_0(g)}.$$

Если Предложение 5 неверно, то среди h' индексов k найдутся

$$h'' \gg h' > \frac{c_0}{\log^e m} \cdot \frac{h(-m)}{t} \tag{34}$$

индексов и бесконечно возрастающая последовательность чисел m, удовлетворяющих условиям данного предложения, для которых

$$\nu_k > \left(1 + c_0\sqrt{\tau(m)} \cdot \gamma(m)\right)\beta s_1 \tag{35}$$

(противоположное неравенство рассматривается аналогично). Следуя [7] найдутся ограниченная область Γ (см. [3], теорема 3) на поверхности (1) с угловым диметром $= ep_1 = \sqrt{\lambda} \cdot \gamma(m) > 0$ и определенный вычет $L_0 \pmod g$, так что среди h'' индексов k с условием (35) имеется

$$h''' \gg \frac{\varepsilon_1^2}{\rho(g.m)} \tag{36}$$

индексов k, для которых $L_k \in \Gamma$, $L_k \in \widetilde{G}$, $L_k \equiv \pmod g$. Пусть $k = 1, \ldots, h'''$ и $\widetilde{\nu}_k$ – число индексов $j = j_1, \ldots, j_{s_1}$ с условиями

$$Q_{k1} \cdot \ldots \cdot Q_{k,j-1} \in \widetilde{\gamma} \cap \gamma_{L_0}^{(j-1)}, \quad Q \setminus Q_{k,j}, \quad \widetilde{\gamma} = \bigcup_{L_k \in \Gamma} \zeta_{L_k}.$$

Тогда в силу (35) для достаточно большого значения $c_0 > 0$

$$\widetilde{\nu}_k \geqslant \nu_k > \left(1 + c_0\sqrt{\tau(m)} \cdot \gamma(m)\right)\beta s_1 > \left(1 + \frac{c_0}{2}\sqrt{\tau(m)}\gamma(m)\right)\widetilde{\beta} s_1, \tag{37}$$

где

$$\widetilde{\beta} = \frac{\widetilde{\lambda}}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(d,m)} \cdot \frac{1}{\sigma_0(q)}, \quad \widetilde{\lambda} = \lambda \cdot \left(1 + O(\gamma(m))\right).$$

Рассмотрим матричные равенства (32) в количестве h''' и, для которых выполнены (37). Тогда как и в [7] число w' неассоциированных справа матриц $B_k = Q_{k1}, \cdot \ldots \cdot Q_{ks}$ $(k = 1, \ldots, h''')$ с условиями (37) оценивается в силу предложения 4.2 [6] как

$$w' \ll q^s m^{-\frac{c_0'}{\eta(m)}}, \tag{38}$$

где $c_0' = c_0'(c_0)$ – постоянная, зависящая только от c_0 и неограниченно растущая вместе с c_0. С другой стороны, в силу теоремы Гпусса о родах (см. [2], гл. 4, теорема 16) и наиболее точной оценки сверъу для числа делителей (см. [10]) из (19)–(22), (34), (36) следует, что выполнена ключевая лемма $\mathcal{Z}\{\xi,\xi_1,\eta,\alpha,\alpha_1\}$, применение которой дает следующую оценку снизу для числа w неассоциированных справа матриц нормы q^s в равенствах (32)

$$w \gg q^s \cdot m^{-\frac{1}{\eta(m)}}. \tag{39}$$

С учетом $w \leqslant w'$ для достаточно больших $c_0' > 0$ оценка (38) противоречит оценке снизу (39) в ключевой лемме. Предложение 5 доказано.

Предложение 6. *Пусть в обозначениях и условиях теоремы* 1 *имеют место* (28) *и* (29). *Тогда цепочки множества* $\varkappa_s'$ *можно разбить на две категории:*

а) *"хорошие", для которых*

$$r_k(j_1,\dots,j_{s_1}) = r_k(\varkappa_s'; j_1,\dots,j_{s_1}; \widetilde{G}, \Lambda_m; g, b_1, b_2, b_3) =$$

$$= \#\Big\{ j = j_v \,\Big|\, v = 1,\dots,s_1,\ T^j L_k \in \widetilde{G}',\ T^j L_k \in \Lambda_m,\ T^j L_k \equiv \tag{40}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 \end{pmatrix} \pmod g \Big\} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \cdot \frac{1}{\rho(g,m)} \cdot s_1\big(1 + O\big(\sqrt{\tau(m)}\gamma(m)\big)\big);$$

б) *"плохие", общее число которых оценивается* (31); *постоянные, входящие в* (40) *и* (31), *зависят только от* q, e *и постоянных, входящих в ключевую лемму* $\mathcal{Z}\{\xi,\xi_1,\eta,\alpha,\alpha_1\}$ *и в оценки* (19)–(22), (28)

Доказательство этого предложения получается на основе предложения 5 (см. [9]).

Теорема 1 выводится из предложения 6 с помощью рассуждений [5, 7, 9]. Доказательство теоремы 2 ("теоремы перемешивания") для гауссовых родов проводится на основе эргодической теоремы 1 аналогично случаю "теоремы перемешивания" для всех классов бинарных квадратичных форм (см. [5–7]). Частным случаем теоремы 2 является теорема о равномерном распределении гауссовых родов. Подробное изложение всех этих результатов дается в [9].

Литература

1. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*. М., 1972 495 с.

2. Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел.* ОНТИ, М.–Л., 1937 219 с.
3. Ю. В. Линник, *Асимптотическая геометрия гауссовых родов; аналог эргодической теоремы.* — ДАН СССР **108, No. 6** (1956), 1018–1021.
4. Ю. В. Линник, *Избранные труды. Теория чисел. Эргодический метод и ?-функции.* Л., 1979 432 с.
5. А. В. Малышев, *О применении дискретного эргодического метода в аналитической арифметике неопределенных тернарных квадратичных форм.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **93** (1980), 5–24.
6. А. В. Малышев, *Об арифметике матриц второго порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **93** (1980), 41-86.
7. А. В. Малышев, У. М. Пачев, *Эргодические свойства целых точек на некоторых двуполостных гиперболоидах.* Деп. ВИНИТИ No. 6127, Нальчик, 1984 43 с.
8. У. М. Пачев, *Асимптотические распределения гауссовых родов. Автоморфные функции и теория чисел.* Сб. науч. тр., Ижевск, 1987 с.32–40.
9. У. М. Пачев, *Об остаточных членах и эргодических теоремах для потоков в гауссовых родах.* Деп. ВИНИТИ No. 3246, Нальчик, 1992 29 с.
10. К. Прахар, *Распределение простых чисел.* М., 1967 512 с.
11. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of halfintergal weight.* — Invent. math. **87** (1987), 385–401.
12. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-intergal weight Maass forms.* — Invent. math. **92** (1988), 73–90.

Pachev U. M. Ergodic properties of flows for classes of positive binary quadratic forms in Gauss genera.

Further development and refinement of previous results of A. V. Malyshev and the author concerning so-called discrete ergodic method of Yu. V. Linnik. An "ergodic theorem" and "mixing theorem" for flows of positive binary quadratic forms is proven, those describe the asymptotic distribution of the coefficients of these forms on residue classes and on the corresponding surface.

Поступило 21 ноября 1996 г.