**А. И. Скопин, Ю. Г. Тетерин**

# О КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ ДЛЯ ТРАНСМЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП ЭКСПОНЕНТЫ 16, 25 И 27

В течение более двух десятилетий первый (в алфавитном порядке) автор данной заметки и в одиночестве, и в соавторстве с коллегами (основными из которых были Н. Н. Ляшенко [1], Ф. А. Иванов [2, 3] и др.) обращался к изучению 2-порожденных групп различных примарных экспонент (т.е. к ограниченной проблеме Бернсайда экспоненты $p^k$, $p$ – простое, $k$ – натуральное). И, хотя профессор М. Ньюмен (Канберра) при личном контакте любезно указал на довольно значительное численное расхождение в результатах, полученных разными методами, все же принципиальных дефектов в применяемых нами способах не отмечалось.

Такие подступы к эффективному решению случаев ограниченной проблемы Бернсайда (даже с использованием мощной вычислительной техники), конечно, нуждаются в сильных ограничениях, накладываемых на рассматриваемые группы. Поэтому вслед за рассмотрением в конце 60-х годов (см., например, [4]) *метабелевых* групп данной примарной экспоненты, в дальнейшем удается продвинуться на так называемые *трансметабелевы* группы и найти для них некоторые ограничения. В частности, первый из авторов совместно с Ф. А. Ивановым проделал это для трансметабелевых групп экспоненты 8 и 9 [1–3, 7]. Предложенная при этом методика опирается на интенсивные символьные вычисления, реализованные и проведенные при помощи ЭВМ.

Поскольку указанные исследования начинались в те годы, когда персональные компьютеры только начали появляться на рабочих местах, программная реализация предложенных алгоритмов была привязана к весьма ограниченным возможностям тех машин. В частности, все программы были написаны на языке Turbo-Pascal 3.0, со всеми свойственными ему ограничениями и достаточно бедными языковыми средствами. Все это приводило к тому, что наработанные на этом этапе программные средства оказалось невозможным использовать для изучения групп экспонент выше 9.

Около двух лет назад авторы этой заметки начали второй этап исследований по одной из ограниченных проблем Бернсайда, конечной целью которого является изучение трансметабелевых групп экспонент 16, 25 и 27. В качестве первого шага был предложен [5] улучшенный алгоритм построения при помощи компьютеров собирательной формулы Ф. Холла – основного соотношения, дающего старт алгоритму исследования группы примарной экспоненты. Предложенная вторым из авторов программная реализация этого алгоритма позволила быстро получить собирательную формулу достаточной глубины для трансметабелевых групп первого рода экспонент 16, 25 и 27.

В настоящее время завершаются работы по программной реализации алгоритмов, изложенных в [7], что позволит провести полное исследование трансметабелевых групп первого типа экспонент 16, 25 и 27, включая явные нахождения соотношений в этих группах и оценку порядков этих групп и факторов их нижнего центрального ряда. Программы пишутся для компилятора Turbo-Pascal 6.0 и должны быть совместимы также с компиляторами Turbo-Pascal версий от 4.0 до 7.0, а также с компилятором Borland Pascal. Для групп экспонент 16, 25 и 27 они успешно работают в стандартном режиме, а после переключения их на работу в защищенном или Windows-режиме есть обоснованные надежды и на использование этих программ для изучения трансметабелевых групп экспоненты 64, 81, 125 и 128.

Главным отличием новой программной реализации от предшествующих реализаций является новый вариант машинного представления элементов группы (соотношений группы). Как и в "символьной форме" (см. [7]), мы храним теперь не все координаты разложения элемента группы по базисным полиномам, а только ненулевые координаты вместе с номером соответствующего базового полинома, но в отличие от "символьной формы" делаем это в максимально удобной для машинного использования форме, т.е. в виде массива пар вида

(номер базисного полинома, коэффициент).

Использование новой формы внутреннего представления данных заставило нас полностью переписать "с нуля" все тексты программ, основываясь только на изложенных в опубликованных работах первого автора алгоритмах, но зато позволило обойти казавшиеся ранее непреодолимыми ограничения по объемам используемой памяти, а также увеличить среднюю скорость вычислений от 200 до 1000 раз.

Кроме того, это явилось (и будет являться в дальнейшем) хорошей проверкой корректности предыдущей программной реализации изложенных алгоритмов и всех вычислений, проведенных для случаев групп экспонент 8 и 9. Пока что была проведена интенсивная проверка совпадения результатов работы подпрограмм нижнего уровня ("сложение" и "умножение" элементов группы), и результаты вычислений на этом этапе полностью совпали.

В настоящее время заканчивается реализация остальных частей алгоритма, и в 1998 году авторы планируют приступить уже непосредственно к исследованию соотношений в группах экспонент 16, 25 и 27.

Все материалы, относящиеся к этой тематике (исходные тексты программ, результаты вычислений, более подробное изложение алгоритмов) можно найти на *www*-странице:

$$http://www.pdmi.ras.ru/\sim yuri/transmet$$

или

$$http://www.pdmi.ras.ru/\sim skopin/transmet$$

## Литература

1. Н. Н. Ляшенко, А. И. Скопин, *Графическое нахождение на ЭВМ собирательной формулы Холла для некоторых 2-порожденных групп.* Доклад на XIX Всесоюзной алгебраической конференции во Львове. 1987. Львов. Тезисы докладов. С. 168.
2. Ф. А. Иванов, А. И. Скопин, *Максимальная 2-порожденная трансметабелева группа первого типа экспоненты 9.* Алгебра и анализ **2**, Вып. 6 (1990), 150–160.
3. Ф. А. Иванов, А. И. Скопин, *Трансметабелева группа экспоненты 9.* Доклад на международной конференции в Барнауле. 1991. Барнаул. Тезисы докладов. С. 48.
4. S. Bachmuth, H. Heibroun, and H. Y. Mochisuki, *Metabelian Bernside groups.* Proc. Roy. Soc. London Ser. A **307** (1968), 235–250.
5. А. И. Скопин, Ю. Г. Тетерин, *Ускорение алгорифма построения сибирательной формулы Ф. Холла в Бернсайдовых группах.* Зап. научн. семин. ПОМИ **227** (1995), 106–112.

6. Akos Seress, *An introduction to Computational Group Theory*. The Ohio State University Columbis. 1977. P. 5.
7. А. И. Скопин, *Нижний центральный ряд максимальной 2-порожденной трансметабелевой группы I типа экспоненты 8*. Алгебра и анализ **2**, Вып. 2 (1990), 198–220.

Skopin A. I., Teterin Yu. G. On computer-based calculations for transmetabelian groups of exponent 16, 25 and 27.

A new step of investigation for 2-generated transmetabelian groups of primary exponent is announced, which should allow to investigate groups of exponent 16, 25 and 27. More complete data describing current state of investifations are available via Internet at $http://www.pdmi.ras.ru/\sim yuri/transmet$.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 декабря 1997 г.