П. А. Терехин

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

1. $T\varphi$-алгебры и нормированные билинейные отображения.

Определение 1. *Тригонометрической алгеброй, T-алгеброй назовем (необязательно ассоциативную) алгебру, векторным пространством которой является n-мерное евклидово пространство E^n со скалярным произведением (x, y), а умножение xy удовлетворяет тождеству*

$$|xy|^2 + (x, y)^2 = |x|^2|y|^2, \tag{1.1}$$

где $|\cdot|$ – норма.

Термин "тригонометрическая" использован здесь в связи с тем видом, который принимает тождество (1.1) при единичных векторах x и y: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (в этом случае $|xy|$ естественно считать синусом угла α между x и y; с произвольными x и y будем иметь тогда $|xy| = |x||y|\sin\alpha$ – все как в случае векторного произведения в E^3).

Основная задача – при каких n в E^n существуют T-алгебры.

Эта задача решается как частный случай более общей задачи: при каких n в E^n существуют нормированные билинейные отображения $\Phi : E^n \times E^n \to E^{n+1}$, сокращенно НБО; нормированность означает выполнение равенства $|\Phi(x, y)| = |x||y|$.

В статье дается описание всех НБО $\Phi : E^n \times E^n \to E^{n+1}$ на основе нормированных алгебр (описание последних дает известная теорема Гурвица, см., например, [1], с. 99, 112).

Это позволяет решить основную задачу для более общих алгебр.

Определение 2. *Пусть $\varphi : E^n \times E^n \to \mathbb{R}$ – билинейная форма. φ-тригонометрической алгеброй, $T\varphi$-алгеброй, назовем алгебру, векторным пространством которой является E^n, а умножение xy удовлетворяет тождеству*

$$|xy|^2 + \varphi^2(x, y) = |x|^2|y|^2. \tag{1.2}$$

При $\varphi = 0$ получаем нормированную алгебру в E^n; в этом случае $n = 1, 2, 4, 8$ (согласно теореме Гурвица). При $\varphi(x, y) = (x, y)$ классическим является упомянутый случай $n = 3$ с классическим векторным произведением.

Теорема.

1. *Если в E^n существует $T\varphi$-алгебра, то $n = 1, 2, 3, 4, 7, 8$.*

2. *При указанных в 1 значениях n в E^n существует T-алгебра, т.е. последняя существует при этих и только этих n.*

2. Доказательство теоремы.

Лемма 1. *Пусть π – гиперплоскость в E^{n+1}, P – ортогональный проектор на π, I – тождественный оператор в E^{n+1}, $\lambda \in [-1, 1]$ и пусть A – ортогональный оператор в E^{n+1}, причем собственный (т.е. имеющий равный единице определитель в некотором, а значит, и в любом базисе).*

Если $P(A - \lambda I)P$ – кососимметричный оператор в E^{n+1}, то:
1) при n четном $A\pi = \pi$;
2) при n нечетном кососимметричен оператор $A - \lambda I$.

Доказательство. (Приводимое доказательство базируется на рекомендациях Б. Б. Лурье и существенно проще первоначального).

Обозначим $B = A - \lambda I$, $C = B + B^*$. Так как A – ортогональный оператор, то его собственные значения (с учетом их кратностей) суть: $\mu_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$; $\nu_j = -1$, $1 \leqslant j \leqslant s$; ξ_k, $\overline{\xi}_k$, $|\xi_k| = 1$, $1 \leqslant k \leqslant t$. Так как $\det A = 1$, то s четно; переобозначив s на $2s$, имеем $1 \leqslant j \leqslant 2s$ и $n + 1 = r + 2s + 2t$. Тогда собственными числами операторов B и C будут соответственно $\mu_i - \lambda = 1 - \lambda$, $\nu_j - \lambda = -1 - \lambda$, $\xi_k - \lambda$, $\overline{\xi}_k - \lambda$, и $2(\mu_i - \lambda) = 2(1 - \lambda)$, $2(\nu_j - \lambda) = -2(1 + \lambda)$, $\xi_k + \overline{\xi}_k - 2\lambda$, $\xi_k + \overline{\xi}_k - 2\lambda$. Пусть $\mathcal{E}$ – ортонормированный базис, составленный из собственных векторов и пар векторов из двумерных минимальных инвариантных подпространств оператора A. Тогда $\mathcal{E}$ – собственный базис оператора C.

По условию оператор PBP кососимметричен. Поэтому $PCP = 0$. Так как ранг проектора P на гиперплоскость π равен n, то ранг оператора C не превосходит двух. В действительности, $rgC < 2$. Предположим противное, т.е. $rgC = 2$. Тогда существуют в точности два базисных вектора e_1, $e_2 \in \mathcal{E}$, отвечающих ненулевым собственным значениям γ_1 и γ_2 оператора C. Так как все собственные значения, кроме, быть может, первого, дублируются, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Итак $Ce_1 = \gamma e_1$, $Ce_2 = \gamma e_2$. Так как π – гиперплоскость, то существует ненулевая линейная комбинация $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in \pi$. Но тогда, с одной стороны, $Cx = \gamma x \in \pi$, с другой стороны, $PCx = PCPx = 0$, т.е. $\gamma x \in \pi^\perp$. Значит, $x \in \pi \cap \pi^\perp = \{0\}$. Противоречие.

Итак, ранг оператора C равен 0 или 1.

1. Пусть ранг C равен 0. Тогда $C = 0$ и оператор $A - \lambda I$ кососимметричен, таким образом, выполнено второе утверждение леммы; если n четно, то r нечетно, $\lambda = 1$, $s = t = 0$ и, следовательно, $A = I$ – тривиальный случай, при котором выполнено и первое утверждение леммы.

2. Пусть ранг C равен 1. Тогда $Ce \neq 0$ для единственного базисного вектора $e \in \mathcal{E}$. Это возможно лишь, когда $r = 1$. Следовательно, $n+1$ нечетно. Покажем, что $e \in \pi^\perp$.

Для всякого $x \in E^{n+1}$ имеем: $Cx = (x,e)Ce = (x,e)2(1-\lambda)e$. Полагая $x = Pe$, получаем $0 = PCPe = (Pe,e)2(1-\lambda)Pe$, откуда $Pe = 0$ или $(Pe,e) = 0$ (что, впрочем, одно и то же). Следовательно, $e \in \pi^\perp$. Таким образом, $\pi^\perp = \{te \mid t \in \mathbb{R}\}$ инвариантно относительно оператора A. Так как оператор A ортогональный, то $A\pi = \pi$.

Лемма 2. *Пусть π – гиперплоскость в E^{n+1}, P – ортогональный проектор на π, B – оператор в E^{n+1}.*

Оператор PBP кососимметричен тогда и только тогда, когда $(Bx,x) = 0$ для всех $x \in \pi$.

Доказательство следует из равенства

$$(PBPy,y) = (BPy,Py) = (Bx,x), \quad y \in E^{n+1}, \quad x = Py \in \pi,$$

и того факта, что кососимметричность оператора PBP равносильна равенству $(PBPy,y) = 0$ для всех $y \in E^{n+1}$.

Лемма 3. *Пусть $\Phi : E^m \times E^n \to E^{n+1}$ является НБО и n четно.*

Тогда $\operatorname{Im}\Phi = \{\Phi(x,y) | x \in E^m, y \in E^n\}$ – линейное подпространство в E^{n+1} размерности $\dim \operatorname{Im}\Phi = n$.

Доказательство. Для каждого ненулевого вектора $a \in E^m$ определим линейный изометрический оператор $L_a : E^n \to E^{n+1}$ следующим равенством: $L_a x = |a|^{-1}\Phi(a,x)$, $x \in E^n$.

Для любой пары ненулевых векторов a, $b \in E^m$ установим равенство $\operatorname{Im} L_a = \operatorname{Im} L_b$ – из него немедленно получим лемму.

Зададим на гиперплоскости $\operatorname{Im} L_a$ линейный оператор U_{ab} положив $U_{ab}(L_a y) = L_b y$. В силу изометричности L_a и L_b это задание корректно, и оператор U_{ab} изометрический. Его единственное продолжение до собственного ортогонального оператора в E^{n+1} обозначим снова через U_{ab}.

Ввиду билинейности и нормированности отображения Φ, с одной стороны,

$$|\Phi(a+b,x)|^2 = |\Phi(a,x)|^2 + 2(\Phi(a,x),\Phi(b,x)) + |\Phi(b,x)|^2 =$$

$$|a|^2|x|^2 + 2(\Phi(a,x),\Phi(b,x)) + |b|^2|x|^2,$$

с другой стороны,

$$|\Phi(a+b,x)|^2 = |a+b|^2|x|^2 = |a|^2|x|^2 + 2(a,b)|x|^2 + |b|^2|x|^2.$$

Сравнивая полученные равенства, находим $(\Phi(a,x),\Phi(b,x)) = (a,b)(x,x)$, или $(L_a x, L_b x) = (a,b)|a|^{-1}|b|^{-1}(x,x)$. Это равносильно следующему равенству $(U_{ab}(L_a x), L_a x) = \lambda(L_a x, L_a x)$, где $\lambda = (a,b)|a|^{-1}|b|^{-1}$. Таким образом, $((U_{ab} - \lambda I)y, y) = 0$ для всех $y \in \operatorname{Im} L_a$. Согласно лемме 2, оператор $P_a(U_{ab} - \lambda I)P_a$ кососимметричный, где P_a – ортогональный проектор на $\operatorname{Im} L_a$.

Из леммы 1, примененной в U_{ab}, следует, что $\operatorname{Im} L_b = U_{ab} \operatorname{Im} L_a = \operatorname{Im} L_a$.

Лемма 4. *Пусть $\Phi : E^m \times E^n \to E^{n+1}$ является НБО, E^n – подпространство в E^{n+1}, n нечетно.*

Тогда Φ может быть продолжено до НБО $\overline{\Phi} : E^m \times E^{n+1} \to E^{n+1}$.

Доказательство. Пусть для каждого ненулевого вектора $a \in E^m$ оператор L_a тот же, что и при доказательстве леммы 3. Пусть, далее, $\overline{L_a}$ – единственное продолжение L_a до собственного ортогонального оператора в E^{n+1}.

Для $a \neq 0$ положим $\overline{\Phi}(a,x) = |a|\overline{L_a}(x)$ и $\overline{\Phi}(0,x) = 0$, $x \in E^{n+1}$.

Ясно, что $\overline{\Phi}$ – нормированное, линейное по второму аргументу отображение, являющееся продолжением Φ.

Покажем, что $\overline{\Phi}$ линейно по первому аргументу.

Заметим, что $L_{\lambda a} = \operatorname{sign}\lambda \cdot L_a$. Тогда $\overline{L_{\lambda a}} = \operatorname{sign}\lambda \cdot \overline{L_a}$; действительно, во-первых, $\operatorname{sign}\lambda \cdot \overline{L_a}$ – ортогональное продолжение оператора $\operatorname{sign}\lambda \cdot L_a = L_{\lambda a}$, во-вторых, $\det(\operatorname{sign}\lambda \cdot \overline{L_a}) = (\operatorname{sign}\lambda)^{n+1} = 1$ ввиду четности $n+1$. В таком случае,

$$\overline{\Phi}(\lambda a, x) = |\lambda a|\overline{L_{\lambda a}}(x) = \lambda|a|\overline{L_a}(x) = \lambda\overline{\Phi}(a, x).$$

Доказана однородность по первому аргументу.

Для доказательства аддитивности $\overline{\Phi}$ (по первому аргументу) введем оператор $U_{ab} = \overline{L_b}(\overline{L_a})^{-1}$ для всякой пары ненулевых векторов $a, b \in E^m$. Ясно, что U_{ab} – собственный ортогональный оператор.

Как и при доказательстве леммы 3 находим, что U_{ab} удовлетворяет всем условиям леммы 1 с $\pi \operatorname{Im} L_a$, $\lambda = (a,b)|a|^{-1}|b|^{-1}$.

Согласно лемме 1, оператор $U_{ab} - \lambda I$ кососимметричный, т.е. для всех $x \in E^{n+1}$ выполняется равенство $(U_{ab}x, x) = \lambda(x, x)$. Положим здесь $x = \overline{L_a}y$; получим $(\overline{L_a}y, \overline{L_b}y) = \lambda(\overline{L_a}y, \overline{L_a}y) = \lambda(y, y)$. Ввиду определения $\overline{\Phi}$ и значения λ, последнее равенство равносильно следующему: $(\overline{\Phi}(a, y), \overline{\Phi}(b, y)) = (a, b)(y, y)$. Очевидно, равенство верно и для нулевых векторов a и b и, следовательно, для всех a, $b \in E^m$. Используя его с $c = a + b$, находим:

$$| \, \overline{\Phi}(c, y) - \overline{\Phi}(a, b) - \overline{\Phi}(b, y) \, |^2 = |y|^2\big(|c|^2 + |a|^2 + |b|^2 -$$

$$-2(a, c) - 2(b, c) + 2(a, b)\big) = |y|^2|c - a - b|^2 = 0.$$

Отсюда вытекает аддитивность $\overline{\Phi}$ по первому аргументу.

Следствие. *(описано НБО $\Phi : E^n \times E^n \to E^{n+1}$). Пусть n таково, что существует НБО $\Phi : E^n \times E^n \to E^{n+1}$. Тогда, если n четно, то:*

1) *множество значений $\operatorname{Im}\Phi = \{\Phi(x, y) \mid x, y \in E^n\}$ является линейным подпространством в E^{n+1} размерности $\dim \operatorname{Im}\Phi = n$;*

2) *для всякого линейного изометрического отображения $V : E^n \to \operatorname{Im}\Phi$ существует нормированная алгебра в E^n, такая, что*

$$\Phi(x, y) = V(xy). \tag{2.1}$$

Если n нечетно, то для всякого линейного изометрического отображения $V : E^n \to E^{n+1}$ существует нормированная алгебра в E^{n+1} такая, что

$$\Phi(x, y) = (Vx)(Vy). \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть n четно. Согласно лемме 3, $\operatorname{Im}\Phi$ является линейным подпространством в E^{n+1} и $\dim \operatorname{Im}\Phi = n$. Тогда для произвольного линейного изометрического отображения $V : E^n \to \operatorname{Im}\Phi$ существует обратное к нему $V^{-1} : \operatorname{Im}\Phi \to E^n$, которое также изометрическое. Очевидно, что умножение $xy = V^{-1}(\Phi(x,y))$ определяет нормированную алгебру в E^n. Равенство (2.1) также очевидно.

Пусть n нечетно, $V : E^n \to E^{n+1}$ – изометрический оператор. Определим НБО $\Phi_1 : \operatorname{Im} V \times \operatorname{Im} V \to E^{n+1}$ равенством $\Phi_1(Vx, Vy) = \Phi(x,y)$. Применим лемму 4 к Φ_1 с $E^m = \operatorname{Im} V \subset E^{n+1}$. Получим продолжение $\overline{\Phi}_1 : \operatorname{Im} V \times E^{n+1} \to E^{n+1}$.

Определим НБО $\Phi_2 : E^{n+1} \times \operatorname{Im} V \to E^{n+1}$ равенством $\Phi_2(x,y) = \overline{\Phi}_1(y,x)$. Снова применив лемму 4, но к Φ_2 с $E^m = E^{n+1}$, $\operatorname{Im} V \subset E^{n+1}$, получим продолжение $\overline{\Phi}_2 : E^{n+1} \times E^{n+1} \to E^{n+1}$. Тогда умножение $xy = \overline{\Phi}_2(y,x)$ определит нормированную алгебру в E^{n+1}. Проверяем равенство (2.2):

$$(Vx)(Vy) = \overline{\Phi}_2(Vy, Vx) = \Phi_2(Vy, Vx) =$$
$$= \overline{\Phi}_1(Vx, Vy) = \Phi_1(Vx, Vy) = \Phi(x,y).$$

Лемма 5. *Пусть E^n – подпространство в E^{n+1}, e – единичный вектор (один из двух) из ортогонального дополнения $(E^n)^\perp$.*

Если xy – умножение в $T\varphi$-алгебре в E^n, то отображение $\Phi : E^n \times E^n \to E^{n+1}$, определяемое формулой

$$\Phi(x,y) = xy + \varphi(x,y)e, \tag{2.3}$$

является НБО.

Обратно, всякое НБО $\Phi : E^n \times E^n \to E^{n+1}$ своим разложением в прямую сумму (2.3) с $xy \in E^n$ и $\varphi(x,y) \in \mathbb{R}$ определяет в E^n $T\varphi$-алгебру с умножением xy и билинейной формой φ.

Доказательство. Для отображения (2.3), в силу ортогональности слагаемых, имеем $|\Phi(x,y)|^2 = |xy|^2 + \varphi^2(x,y)$, откуда и из тождества (1.2) получаем нормированность отображения Φ. Билинейность его очевидна. Таким образом, Φ является НБО.

Пусть, обратно, Φ – произвольное НБО и (2.3) – его разложение в прямую сумму. Билинейность xy и $\varphi(x,y)$ следует из билинейности Φ и единственности разложения. Кроме того, $|xy|^2 + \varphi^2(x,y) = |\Phi(x,y)|^2 = |x|^2|y|^2$ – последнее в силу нормированности Φ. Таким образом, xy и φ образуют $T\varphi$-алгебру.

Лемма 6. *Пусть $x \circ y$ – умножение в нормированной алгебре в E^{n+1} с единицей e, $E^n = (e)^\perp$. Тогда умножение*

$$xy = P(x \circ y), \tag{2.4}$$

где $x, y \in E^n$, P – ортогональный проектор на E^n, определяет T-алгебру в E^n, в которой произведение ортогонально сомножителям:

$$(xy, x) = (xy, y) = 0. \tag{2.5}$$

Каждая T-алгебра в E^n, удовлетворяющая равенствам (2.5), может быть получена по формуле (2.4) из нормированной алгебры в E^{n+1} с единицей e.

Доказательство. В любой нормированной алгебре справедливо тождество

$$(a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2) + (a_1 \circ b_2, a_2 \circ b_1) = 2(a_1, a_2)(b_1, b_2) \tag{2.6}$$

(см. [1], с. 102(4)).

Пусть $x, y \in E^n$. Положим в (2.6) $a_1 = x$, $b_1 = y$, $a_2 = b_2 = e$; получим

$$(x \circ y, e) + (x, y) = 2(x, e)(y, e) = 0. \tag{2.7}$$

Для умножения xy проверяем тождество (1.1):

$$|xy|^2 = |P(x \circ y)|^2 = |x \circ y - (x \circ y, e)e|^2 =$$

$$= |x \circ y|^2 - (x \circ y, e)^2 = |x|^2|y|^2 - (x, y)^2,$$

в последнем равенстве использовано (2.7).

Билинейность умножения xy очевидна. Проверим равенства (2.5).

Положим в (2.6) $a_1 = a_2 = x$, $b_1 = y$, $b_2 = e$; получим $(x \circ y, x) = |x|^2(y, e) = 0$. Отсюда

$$(xy, x) = (P(x \circ y), x) = (x \circ y, Px) = (x \circ y, x) = 0.$$

Аналогично получаем и второе равенство (2.5).

Таким образом, умножение xy, заданное формулой (2.4), действительно определяет T-алгебру в E^n, удовлетворяющую равенствам (2.5). Первая часть леммы доказана. Докажем вторую часть.

Пусть дана произвольная T-алгебра в E^n с умножением xy и удовлетворяющая равенствам (2.5). Определим умножение в E^{n+1} следующим образом:

$$(x+\alpha e)\circ(y+\beta e) = xy+\alpha y+\beta x+(\alpha\beta-(x,y))e, \quad \text{где}$$

$$x,y\in E^n, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \quad e\in(E^n)^\perp, \quad |e|=1.$$

Очевидно, что определенное умножение билинейно и e – единица. Далее,

$$|(x+\alpha e)\circ(y+\beta e)|^2 = |xy|^2+\alpha^2|y|^2+\beta^2|x|^2+\alpha^2\beta^2-$$

$$-2\alpha\beta(x,y)+(x,y)^2+2\alpha\beta(x,y) = |x+\alpha e|^2|y+\beta e|^2.$$

Таким образом получили нормированную алгебру в E^{n+1} с единицей e, при этом формула (2.4) возвращает нас к исходной T-алгебре в E^n.

Доказательство теоремы.

1. Пусть в E^n существует $T\varphi$-алгебра. Без ограничения общности будем считать E^n подпространством в E^{n+1}. Согласно лемме 5 существует НБО $\Phi : E^n\times E^n \to E^{n+1}$. Далее, применяя следствие, получаем нормированную алгебру – при четном n в E^n, при нечетном n в E^{n+1}. По теореме Гурвица в первом случае $n = 2,4,8$, во втором – $n = 1,3,7$. Во всяком случае $n = 1,2,3,4,7,8$. Утверждение 1 теоремы доказано.

2. Построим примеры T-алгебры рангов $n = 1,2,3,4,7,8$.

Из леммы 6 следует существование T-алгебры рангов $n = 1,3,7$. Заметим, что определенная в лемме 6 равенством (2.4) T-алгебра в случае $n=1$ является алгеброй с нулевым умножением, в случае $n=3$ – это векторное произведение в E^3, в случае $n=7$ – аналогичное "векторное" произведение.

Пусть теперь $n = 2,4,8$. Пусть $x\circ y$ – умножение в нормированной алгебре в E^n с единицей e. Положим $xy = P(x\circ\overline{y})$, где P – ортогональный проектор на $(e)^\perp$, $\overline{y} = (y,e)e-P(y)$ – сопряженный к y вектор.

Билинейность умножения xy очевидна. Кроме того,

$$|xy|^2 = |P(x\circ\overline{y})|^2 = |x\circ\overline{y}-(x\circ\overline{y},e)|e|^2 =$$

$$= |x\circ\overline{y}|^2-2(x\circ\overline{y},(x\circ\overline{y},e)e)+(x\circ\overline{y},e)^2 =$$

$$= |x \circ \overline{y}|^2 - (x \circ \overline{y}, e)^2 = |x|^2 |y|^2 - (x, y)^2.$$

На последнем шаге учли равенство $|\overline{y}| = |y|$ и $(x \circ \overline{y}, e) = (x, y)$. Последнее равенство проверим.

Используя первое равенство из (2.7), верное для всех $x, y \in E^n$, имеем $(x \circ \overline{y}, e) + (x, \overline{y}) = 2(x, e)(\overline{y}, e) = 2(x, e)(y, e)$.

С другой стороны,

$$(x, y) + (x, \overline{y}) = (x, y + \overline{y}) = (x, 2(y, e)e) = 2(x, e)(y, e).$$

Сравнивая два последних равенства, получаем проверяемое равенство.

Итак, умножение xy определяет T-алгебру в E^n при $n = 2, 4, 8$. Утверждение 2 теоремы, а вместе с ним и сама теорема, доказаны.

Заметим, что примеры тригонометрических алгебр можно усмотреть в кватернионах и октавах. Конечно же, основным в работе является доказательство невозможности тригонометрических, и даже φ-тригонометрических, алгебр рангов, отличных от вышеназванных.

Выражаю глубокую благодарность Б. Б. Лурье за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания, направленные на улучшение изложения.

Литература

1. И. Л. Кантор, А. С. Солодовников, *Гиперкомплексные числа*. Наука, Москва, 1973.

Terekhin P. A. Trigonometrical algebras.

Euclidean n-dimensional spaces that have an analog of a vector product, i.e., a bilinear binary operation satisfying the identity $|x \cdot y|^2 + (x, y)^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$ ($(\cdot, \cdot)$) is a scalar product). It is clarified for which n such a product exists.

Саратовский гос. университет
механико-математический факультет

Поступило 21 ноября 1996 г.