В. М. Цветков

О НЕКОТОРОМ 2-РАСШИРЕНИИ ПОЛЯ $\mathbb{Q}$ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Целью настоящей работы является изложение следующей теоремы.

Теорема.

1. *У поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел есть и только одно нормальное 2-расширение $\mathbb{Q}_{(2,\infty)}/\mathbb{Q}$, группа которого $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_{(2,\infty)}/\mathbb{Q})$ изоморфна свободному произведению $\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$ про-2-группы $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}/2$, где $\mathbb{Z}_2$ – аддитивная группа целых 2-адических чисел, а $\mathbb{Z}/2$ – циклическая группа порядка два. Поле $\mathbb{Q}_{(2,\infty)}$ совпадает с максимальным 2-расширением поля $\mathbb{Q}$, в котором неразветвлены все нормирования, соответствующие всем нечетным простым числам.*

2. *Если (Ω, P) – упорядоченное поле с конусом положительных элементов P, для которого выполнены условия $i)$ каждый многочлен нечетной степени с коэффициентами из поля Ω имеет корень в Ω, $ii)$ каждый положительный элемент из P является квадратом или удвоенным квадратом элементов из Ω, причем $\sqrt{2} \notin \Omega$, то алгебра $\overline{\Omega} = \Omega \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} Q$ является полем, совпадающим с максимальным алгебраическим расширением поля Ω; в частности $\overline{\Omega}$ – алгебраически замкнутое поле, и $\mathrm{Aut}(\overline{\Omega}/\mathbb{Q}_{(2,\infty)}) \cong \mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$.*

3. *Класс полей Ω из 2 совпадает с максимальными подполями вещественно-замкнутых полей, не содержащих $\sqrt{2}$. Если $\Omega = \overline{\Omega}^{\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2}$ – поле инвариантных элементов относительно точно и непрерывного действия группы $\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$ автоморфизмами в дискретной топологии алгебраически замкнутого поля $\overline{\Omega}$, и $\sqrt{2} \notin \Omega$, то Ω совпадает с одним из максимальных подполей в вещественно-замкнутом поле $\overline{\Omega}^{\mathbb{Z}/2}$, не содержащим $\sqrt{2}$,*

Доказательство. Тот факт, что для указанного нормального над $\mathbb{Q}$ поля $\mathbb{Q}_{(2,\infty)}$, $\mathrm{Aut}(\overline{\Omega}/\Omega) \cong \mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$ был впервые установлен Маркшайтисом $\binom{2}{1}$. Смотри также $(^2)$, $(^3)$, $(^4)$.

Пусть $L/\mathbb{Q}$ – нормальное 2-расширение, и $\mathrm{Aut}(L/\Omega) \cong \mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$. Надо показать, что $L = \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$. У поля $\mathbb{Q}$ есть и только одно нормальное $\mathbb{Z}_2$-расширение $\mathbb{Q}_{(2)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}})$ (следствие из теоремы Кронекера–Вебера, см. ([5]), а также ([6]). Ясно, что $\mathbb{Q}_{(2)} \subset L$. Пусть p – нечетное простое число. $G_p \subset \mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ – группа разложения p в $L/\mathbb{Q}$, определенная с точностью до сопряжения. Тогда G_p – замкнутая подгруппа в $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ и G_p является фактор-группой группы $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_p^{(2)}/\mathbb{Q}_p)$, где $\mathbb{Q}_p^{(2)}/\mathbb{Q}_p$ – максимальное 2-расширение поля $\mathbb{Q}_p$ рациональных p-адических чисел. Если T_p – группа инерции p в $L/\mathbb{Q}$, то T_p изоморфна фактор-группе группы инерции расширения $\mathbb{Q}_p^{(2)}/\mathbb{Q}_p$; в частности – циклична. Локализация L^p поля L в p содержит поле $\mathbb{Q}_{(2)}$; значит ядро естественного эпиморфизма $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_p^{(2)}/\mathbb{Q}_p) \to G_p$ лежит в $T(\mathbb{Q}_p^{(2)}/\mathbb{Q}_p) \cong \mathbb{Z}_2$. Отсюда $G_p \cong \mathbb{Z}_2 \lambda \{\tau\}$, где $\{\tau\}$ – циклическая про-2-группа, совпадающая с группой инерции p в $L/\mathbb{Q}$. По аналогу теоремы Куроша о подгруппах свободного произведения групп (теорема Мельникова, см. ([7])), замкнутая подгруппа в $\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$ изоморфна свободному произведению $F \underset{2}{*} \underbrace{\mathbb{Z}/2 * \ldots * \mathbb{Z}/2}_{I}$, где I – некоторое (возможно, пустое) множество, а F – свободная про-2-группа. Отсюда получаем изоморфизм $\mathbb{Z}_2 \lambda \{\tau\} \cong F \underset{2}{*} \underbrace{\mathbb{Z}/2 * \ldots * \mathbb{Z}/2}_{I}$. Но последнее может быть только лишь для $G_p \cong \mathbb{Z}_2$, и группа инерции числа p в $L/\mathbb{Q}$ равна единичной группе; т.е. p – неразветвлено в $L/\mathbb{Q}$. Отсюда, в силу произвольности p, получаем, что $L \subset \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$. У группы $\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$ нет собственных фактор-групп изоморфных ей самой (хопфовость конечно-порожденных про-конечных групп), а значит $L = \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$, и пункт 1, в теореме доказан. Пусть Ω – поле, удовлетворяющее условиям теоремы. По i) получаем, что у поля Ω нет конечных расширений нечетной степени, и максимальное алгебраическое расширение $\overline{\Omega}/\Omega$ является 2-расширением. Если $\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(\overline{\Omega}/\Omega)$ – группа замыкания поля Ω, то

$$H^1(\mathcal{G}, \mathbb{Z}/2) = \mathrm{Hom}^c(\mathcal{G}, \mathbb{Z}/2) = \mathrm{char}\,\mathcal{G}/(\mathcal{G},\mathcal{G})\mathcal{G}^2 \cong \Omega^*/\Omega^{*2}.$$

Но

$$\Omega = (-P) \amalg \{0\} \amalg P, \quad P = \Omega^{*2} \amalg 2\Omega^{*2},$$

и

$$\Omega^*/\Omega^{*2} = \left\{\{-1\}\mathrm{mod}\,\Omega^{*2}\right\}_2 \times \left\{2\mathrm{mod}\,\Omega^{*2}\right\} \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2.$$

Поле Ω – упорядоченное, и следовательно про-2-группа $\mathcal{G}$ имеет две топологические образующие, причем за одну из этих образующих можно взять инволюцию, отвечающую расширению $\Omega(\sqrt{-1})/\Omega$. Из универсального свойства свободного произведения, получаем, что $\mathcal{G}$ изоморфна фактор-группе группы $\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$. В силу нормальности $\mathbb{Q}_{(2,\infty)}/\mathbb{Q}$, поля Ω и $\mathbb{Q}_{(2,\infty)}$ линейно разделены, т.к. $\mathbb{Q}\ (\sqrt{-1}, \sqrt{2}) \cap \Omega = \mathbb{Q}$. Значит алгебра $\Omega \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$ – поле, и $\Omega \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}_{(2,\infty)}/\Omega$ – алгебраическое расширение полей. Теперь,

$$\mathrm{Aut}\left(\Omega \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}_{(2,\infty)}/\Omega\right) \cong \mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2,$$

и опять таки, хопфовость $\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$ дает нам, что $\Omega \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$ – алгебраическое замыкание поля Ω, и пункт 2 теоремы доказан.

Пусть L – вещественно-замкнутое поле, Ω – его максимальное подполе, не содержащее $\sqrt{2}$. Существование таких полей Ω, легко следует из леммы Цорна.

Тогда ясно, что L/Ω – алгебраическое расширение полей, т.к., если $\sqrt{2} \notin \Omega$, то и $\sqrt{2} \notin \Omega(t)$, где t – трансцендентный элемент над Ω, и $\Omega(t)$ – поле рациональных функций от одной переменной t с полем констант Ω.

Далее, ясно, что у поля Ω нет конечных расширений нечетной степени, значит, $\mathrm{Aut}(L(\sqrt{-1})/\Omega)$ – про-2-группа, и $L(\sqrt{-1})/\Omega$ – нормальное 2-расширение.

Если теперь предположить, что максимальное расширение периода два поля Ω больше, чем поле $\Omega(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$, то получим что подполе Ω в L – не максимальное подполе, не содержащее $\sqrt{2}$, и, если $d \in \Omega^*/\Omega^{*2}$, $d \neq -1, -2, 2\mathrm{mod}\,\Omega^{*2}$, то $\Omega(\sqrt{d})$ также не будет содержать $\sqrt{2}$.

Итак,

$$\Omega^*/\Omega^{*2} \cong= \left\{\{-1\}\mathrm{mod}\,\Omega^{*2}\right\}_2 \times \left\{2\mathrm{mod}\,\Omega^{*2}\right\}_2 \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2.$$

Из упорядоченности поля Ω получаем, что одну из двух образующих $\mathrm{Aut}(L(\sqrt{-1})/\Omega)$ можно взять инволюцией. Дальнейшее повторяет рассуждения для доказательства пункта 2 теоремы.

Обратно, если $\Omega = \overline{\Omega}^{\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}/2}$, и $\sqrt{2} \notin \Omega$, где $\overline{\Omega}$ – алгебраически замкнутое поле, то

$$\Omega^*/\Omega^{*2} \cong= \left\{\{-1\} \mathrm{mod}\, \Omega^{*2}\right\}_2 \times \left\{2 \mathrm{mod}\, \Omega^{*2}\right\}_2,$$

и для поля Ω выполнены условия i) и ii) теоремы, что и доказывает последнее.

В заключение, приведем без доказательства некоторые свойства подполей $kl \subset \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$.

Предложение. *Если $k \subset \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$ – подполе конечной степени в $\mathbb{Q}_{(2,\infty)}$, то*

1. *Число классов идеалов h_k – нечетно.*

2. *В поле k есть единицы всех вещественных знаков.*

3. *Поле k имеет только одно нормирование, лежащее над простым числом 2.*

4. *Если E и E_Y – группы единиц полей k и k^Y, соответственно, где k^Y – локализация поля k в $/mid2$, то естественный гомоморфизм $E/E^2 \to E_Y/E_Y^2$ является мономорфизмом.*

5. *Поле $\mathbb{Q}(\sqrt[2^\infty]{2}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\sqrt[2^n]{2})$ имеет только одно упорядочение и каждый положительный элемент в нем является суммой двух квадратов.*

Литература

1. Г. Н. Маркшайтис, *О p-расширениях с одним критическим простым числом.* — Изв. АН СССР, серия матем. **27, No. 2** (1963), 463–466.
2. И. Р. Шафаревич, *Расширения с заданными точками ветвления.* — IHES **No. 18** (1964), 295–319.
3. Х. Кох, *Теория Галуа p-расширений.* М., 1973, 199 с.
4. Л. В. Кузьмин, *Гомологии проконечных групп, мультипликатор Шура и теория полей классов.* — Изв. АН СССР, серия матем. **33, No. 6** (1969), 1220–1254.
5. В. М. Цветков, *Г-расширения и гомомрфизм коограничения.* — Зам. научн. семин. ЛОМИ **198** (1991), 103–108.
6. В. М. Цветков, *О группе Галуа максимального l-расширения с фиксированным ветвлением поля рациональных чисел.* — Зам. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 169–170.
7. О. В. Мельников, *Подгруппы и гомологии свободных произведений проконечных групп.* — Изв. АН СССР, серия матем. **63, No. 1** (1989), 97–120.

Tsvetkov V. M. On some 2-extension of the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers.

It is proved that the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers has one and only one normal 2-extension $\mathbb{Q}_{(2,\infty)}/\mathbb{Q}$ with the groupe isomorphic to $\mathbb{Z}_2 \underset{2}{*} \mathbb{Z}/2$. If Ω the maximal subfield of a real-closed field not contain in $\sqrt{2}$, then the algebraic closure $\overline{\Omega}$ is isomorphic to the field $\Omega \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}_{(2,\infty)}$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 мая 1997 г.