А. В. Яковлев

БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ НА КАТЕГОРИЯХ

Известно, какую роль играют в математике билинейные формы, заданные на объектах, имеющих еще какую-то структуру. Один из ярких примеров этого возникает в теории локальных полей, на мультипликативной группе которых, помимо операторов из группы Галуа, определена антисимметричная билинейная форма – символ Гильберта. Именно необходимость более глубокого изучения этой структуры заставила автора в работах [1, 2] построить теорию симплектических пространств с операторами. Аналогичные определения (но не результаты) были почти одновременно даны в [3, 4] (но мотивация у авторов этих работ была совсем другая). В [5] некоторые основные результаты работ [1–4] доказаны в несколько более общей ситуации. С тех пор многие авторы переотрывали эти результаты. Заметим, что в приложениях часто приходится использовать некоторые формальные модификации упомянутых теорем; поэтому естественно было попытаться сформулировать и доказать их в максимальной возможности общности. Это и является целью настоящей работы. В ней мы определяем билинейные формы на аддитивных категориях и для случая, когда кольца эндоморфизмов неразложимых объектов локальны, и потому в категории справедлива теорема Крулля–Шмидта, доказываем теорему о структуре объектов категории с билинейными формами и закон сокращения для гиперболических форм. Отметим, что мы не делаем никаких дополнительных допущений: не предполагаем, что возможно деление на 2 и что формы невырождены, и даже не всегда требуется, чтобы форма была похожа на симметричную или кососимметричную. Значительно более точную информацию можно получить, если морфизмы категории можно однозначно делить на 2, а кольца эндоморфизмов неразложимых объектов удовлетворяют каким-то условиям конечности. Этому, а также некоторым приложениям, будет посвящена следующая статья.

1. Несколько лемм о морфизмах

Все встречающиеся в этой работе катеории аддитивны. Это значит, что для любых объектов A, B множество $\mathrm{Hom}(A, B)$ морфизмов из объекта A в объект B – аддитивно записанная абелева группа, причем это сложение связано с композицией морфизмов левым и правым соотношениями дистрибутивности, и что существуют конечные прямые суммы объектов.

Тождественный морфизм объекта A, его кольцо эндоморфизмов и ридакал (Джекобсона) этого кольца будем обозначать $\mathbf{1}_A$, $E(A)$, $R(A)$, опуская, если это не приведет к недоразумениям, упоминание об A.

Напомним, что подобъектом объекта A называется пара (B, i), состоящая из объекта B и мономорфизма $i : B \to A$. Говорят, что объект A разбит в прямую сумму $B_1 \oplus \dots \oplus B_n$, если заданы морфизмы $i_s : B_s \to A$ (канонические вложения), $p_s : A \to B$ (канонические проекции), такие что $p_s\, i_s$ – тождественный морфизм объекта B_s для любого s, $1 \leqslant s \leqslant n$, $p_s\, i_t = 0$ при $s \neq t$ и $i_1\, p_1 + \dots + i_n\, p_n = \mathbf{1}_A$.

Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$, $i_s : A_s \to A$, $J_t : B_t \to B$, $p + s : A \to A_s$, $q_t : B \to B_t$ – соответствующие канонические вложения и проекции. Морфизму $\alpha : A \to B$ обычным образом ставим в соответствие матрицу (α_{ts}), где $\alpha_{ts} = q_t\, \alpha i_s : A_s \to B_t$. Как хорошо известно, действиям над морфизмами отвечают обычные действия над матрцами.

Лемма 1. *Форфизм $\Phi : A \oplus B \to C$ с матрицей*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \quad \textit{или} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha : A \to C$, $\delta : B \to D$ – изоморфизмы, является изоморфизмом.

Доказательство. Обратными к указанным будут морфизмы с матрицами

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-1}\gamma\delta^{-1} \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ \delta^{-1}\gamma\alpha^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Важную роль в дальнейшем будут играть объекты с локальными кольцами эндоморфизмов. Если A – такой объект, то радикал кольца $E(A)$ состоит из всех необратимых элементов, так что элемент, не принадлежащий радикалу, является автоморфизмом

A. Кроме того, в $E(A)$ лишь 0 и $\mathbf{1}_A$ является идемпотентными эндоморфизмами.

Лемма 2. *Пусть A, B – такие объекты аддитивной категории, что $A \neq 0$, а кольцо эндоморфизмов $E(B)$ локально. Если $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to A$ таковы, что β_α – автоморфизм A, то α б β – изоморфизмы.*

Доказательство. Пусть γ – обратный к β_α автоморфизм A. Тогда $\gamma\beta_\alpha = \mathbf{1}_A$ и $\alpha\gamma\beta = \alpha(\gamma\beta\alpha)\gamma\beta = (\alpha\gamma\beta)^2$ – идемпотентный эндоморфизм B; поскольку $E(B)$ локально, $\alpha\gamma\beta = 0$ или $\alpha\gamma\beta = 0$ или $\alpha\gamma\beta = \mathbf{1}_B$. Но если $\alpha\gamma\beta = 0$, то $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_A = \gamma\beta(\alpha\gamma\beta)\alpha = 0$, т.е. $A = 0$; поэтому $\alpha\gamma\beta = \mathbf{1}_B$, и α и $\gamma\beta$ – взаимно обратные изоморфизмы.

Лемма 3. *Пусть $\Phi : A \oplus B \to C \oplus D$ – морфизм с матрицей*

$$\begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{pmatrix},$$

где $\alpha : B \to C$, $\delta : A \to D$ – изоморфизмы, а $\gamma : A \to C$, $\beta : B \to D$ – не изоморфизмы. Если кольцо эндоморфизмов объекта D локально, то Φ – изоморфизм.

Доказательство. Если $\beta\alpha^{-1}\gamma\delta^{-1} \notin R(D)$, то это автоморфизм D и по лемме 2 β, вопреки условию, изоморфизм. Поэтому $\beta\alpha^{-1}\gamma\delta^{-1} \in R(D)$, и $\varepsilon = \mathbf{1}_D - \beta\alpha^{-1}\gamma\delta^{-1}$ является автоморфизмом D. Обозначим через $\Phi_1 : B \oplus A \to B \oplus D$, $\Phi_2 : B \oplus D \to C \oplus D$, $\Phi_3 : A \oplus B \to B \oplus A$ морфизмы с матрицами

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_B & \alpha^{-1}\gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_B \\ \mathbf{1}_A & 0 \end{pmatrix};$$

очевидно, Φ_3 – изоморфизм, а Φ_1, Φ_2 – изоморфизмы по лемме 1. Но

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_B & \alpha^{-1}\gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_B \\ \mathbf{1}_A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \delta & \beta \end{pmatrix},$$

и потому $\Phi = \Phi_1\Phi_2\Phi_3$ тоже изоморфизм.

Морфизм $\alpha : A \to B$ будем называть радикальным, если для любого объекта C с локальным кольцом эндоморфизмов $E(C)$ и любых морфизмов $\beta : B \to C$, $\gamma : C \to A$ произведение $\beta_{\alpha\gamma}$ принадлежит $R(C)$. Очевидно, сумма радикальных морфизмов и произведение радикального морфизма слева или справа на любой морфизм – снова радикальный морфизм. С другой стороны, если α –

изоморфизм и A имеет прямое слагаемое C с локальным кольцом эндоморфизмов, то α – не радикальный: если $i : C \to A$, $p : A \to C$ – канонические вложения и проекция, то $(p\alpha^{-1})\alpha i = \mathbf{1}_C \notin R(C)$.

Лемма 4. *Пусть Φ – не радикальный морфизм из $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ в $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$, $i_s : a_s \to A$, $j_t : B_t \to B$, $p_s : A \to A_s$, $q_t : B \to B_t$ – канонические вложения и проекции. Если кольца эндоморфизмов всех слагаемых A_s, B_t локальны, то хотя бы один из морфизмов $q_t \Phi i_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n,\ 1 \leqslant t \leqslant m)$ – изоморфизм.*

Доказательство. Если бы все $q_t \Phi i_s$ были радикальными, то и морфизм

$$\Phi = \left(\sum_{t=1}^{m} j_t\, q_t\right)\Phi\left(\sum_{s=1}^{n} i_s\, p_s\right) = \sum s, t j_t\big(q_t\, \Phi i_s\big)\, p_s$$

был бы радикальным. Следовательно, найдутся s, t, такие что $q_t \Phi i_s$ – не радикальный. Пусть C – такой объект с локальным кольцом эндоморфизмов и $\alpha : C \to A_s$, $\beta : B_t \to C$ – такие морфизмы, что $\beta(q_t \Phi i_s)\alpha : C \to C$ не принадлежит $R(C)$ и потому является автоморфизмом C. Тогда по лемме 2 $\beta(q_t \Phi i_s) : A_s \to C$ – изоморфизм. Если $\gamma : C \to A_s$ – обратный изоморфизм, то $(\gamma\beta)(q_t \Phi i_s)$ – тождественный авторморфизм A_s, и по лемме 2 $q_t \Phi i_s$ изоморфизм.

2. Билинейные формы на категориях с инволюцией

Инволюцией на аддитивной категории $\mathfrak{M}$ называется контрвариантный функтор $F : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, такой что функтор F^2 естественно эквивалентен тождественному функтору. Для объектов A, B и морфизма $\alpha : A \to B$ мы будем писать A^*, B^*, $\alpha^* : B^* \to A^*$ вместо $F(A)$, $F(B)$, $F(\alpha)$. Кроме того, мы будем отождествлять $(A^*)^*$ с A, $(\alpha^*)^*$ с α. Если A, B – такие объекты категории $\mathfrak{M}$, что объект A изоморфен объекту B^* (тогда и объект B изоморфен объекту A^*), то будем говорить, что объекты A, B дуальны друг другу.

Билинейной формой на объекте A аддитивной категории с инволюцией $\mathfrak{M}$ мы будем называть любой морфизм $\Phi : A \to A^*$. Дуальный к нему морфизм Φ^* – тоже является морфизмом из A в A^*, т.е. билинейной формой на A. Пусть теперь B – другой объект категории $\mathfrak{M}$, и $\Psi : B \to B^*$ – билинейная форма на нем;

морфизм $\alpha : A \to B$ называется метрическим изоморфизмом объектов с билинейными формами, если α – изоморфизм категории $\mathfrak{M}$ и $\alpha^*\Psi\alpha = \Phi$. Если такой метрический изоморфизм существует, то мы будем говорить, что объект A с билинейной формой Φ метрически изоморфен объекту B с билинейной формой Ψ или что пара (A, Φ) метрически изоморфна паре (B, Ψ). Две формы Φ, Ψ на одном и том же объекте A называем метрически изоморфными, если пары (A, Φ) и (A, Ψ) метрически изоморфны.

Если (B, i) – подобъект объекта A с билинейной формой Φ, то $\Phi_B = i^*\Phi i$ – морфизм из B^* в B, т.е. билинейная форма на объекте B; мы будем называть ее билинейной формой, индуцированной формой Φ на подобъекте (B, i) объекта A. Предположим теперь, что объект A разложен в прямую сумму объектов (B, i), (C, j); тогда морфизмы $i^* : A^* \to B$, $j^* : A \to B^*$ являются каноническими проекциями на прямые слагаемые, и потому матрица морфизма Φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} i^*\Phi i & i^*\Phi j \\ j^*\Phi i & j^*\Phi j \end{pmatrix}.$$

Диагональные компоненты этой матрицы представляют собой ограничения формы Φ на подобъекты (B, i) и (C, j); если недиагональные элементы матрицы равны 0, то мы говорим, что объект A с билинейной формой Φ является ортогональной (относительно билинейной формой Φ) прямой суммой подобъектов (B, i) и (C, j). Для обозначения ортогональной прямой суммы используется знак $\perp$: $A = B \perp C$.

Форма Φ называется невырожденной, если Φ – изоморфизм. Подобъект (B, i) объекта A называем полным относительно Φ, если ограничение $\Phi_B = i^*\Phi i$ билинейной формы Φ на подобъект (B, i) невырождено, т.е. морфизм $\Phi_B : B \to B^*$ является изоморфизмом. Подобъект (B, i) называем изотропным, если Φ_B – радикальный морфизм, и вполне изотропным, если $\Phi_B = 0$.

Мы будем говорить, что подобъект (C, j) объекта A ортогонален слева относительно формы Φ подобъекту (B, i), если $i^*\Phi_j = 0$. Заметим, что отсюда, вообще говоря, не следует, что $j^*\Phi i = 0$, т.е. что подобъект (B, i) ортогонален слева подобъекту (C, j). Пусть (B, i) – подобъект объекта A с билинейной формой Φ; подобъект (C, j) объекта A называется левым ортогональным дополнением (B, i), если подобъект (C, j) ортогонален слева подобъекту (B,i) и максимален в следующем смысле: если (C',j') – подобъект A, ортогональный слева к (B,i), то существует морфизм $\eta : C' \to C$, такой что $j' = j\eta$. Если (C',j') – другое левое ортогональное дополнение, то существует морфизм $\theta : C \to C'$, такой что $j = j'\theta$; тогда $j' \cdot \mathbf{1}_C = j' = j\eta = j'\theta\eta$ и, поскольку j' – мономорфизм, $\theta\eta = \mathbf{1}_C$. Точно так же проверяется, что $\eta\theta = \mathbf{1}_{C'}$, так что η и θ – взаимно обратные изоморфизмы. Ясно, что каждый из этих изоморфизмов метрический: $\eta^*\Phi_C\eta = \eta^*j^*\Phi j\eta = (j')^*\Phi j' = \Phi_{C'}$. Итак, если левое ортогональное дополнение существует, то оно единственно в естественном смысле: для любых левых ортогональных дополнений (C,j), (C',j') существует метрический изоморфизм $\eta : C' \to C$, такой что $j' = j\eta$. В некоторых случаях мы можем гарантировать и существование левого ортогонального дополнения.

Мы будем называть категорию слабо предабелевой, если для любого объекта A и любого его идемпотентного эндоморфизма e существуют объект B и морфизмы $i : B \to A$, $p : A \to B$, такие что $pi = \mathbf{1}_B$, $ip = e$. Это означает, в частности, что для идемпотентных морфизмов (а не обязательно для всех морфизмов, как в предабелевых категориях) существуют ядра, коядра, образы и кообразы.

Предложение 1. *Пусть Φ – билинейная форма на объекте A слабо предабелевой категории с инволюцией, и пусть (B,i) – полный относительно Φ подобъект A. Тогда существует левое ортогональное дополнение (C,j) подобъекта (B,i); при этом $A = B \oplus C$. Если Φ – невырожденная форма, то (C,j) – полный подобъект A.*

Доказательство. Полнота (B,i) означает, что $i^*\Phi i : B \to B^*$ – изоморфизм; пусть γ – обратный изоморфизм. Положим $p = \gamma i^*\Phi$; тогда $pi = \mathbf{1}_B$ и $e = ip$ – идемпотентный эндоморфизм A. Вместе с ним идемпотентен и эндоморфизм $\mathbf{1}_A - e$. Поскольку категория слабо предабелева, существуют объект C и морфизмы $j : C \to A$, $q : A \to C$, такие что $qj = \mathbf{1}_C$, $jq = 1 - e$. Из самого определения ясно, что $A = B \oplus C$. Далее,

$$i^*\Phi j = i^*\Phi jqj = i^*\Phi(1 - ip)j = i^*\Phi j - (i^*\Phi i)\gamma i^*\Phi j = i^*\Phi j - i^*\Phi j = 0,$$

а это значит, что объект (C,j) ортогонален слева объекту (B,i). Значит, матрица морфизма $\Phi : A = B \oplus C \to B^* \oplus C^* = A^*$ имеет

вид
$$\begin{pmatrix} i^*\Phi i & i^*\Phi j \\ j^*\Phi i & j^*\Phi j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^*\Phi i & 0 \\ j^*\Phi i & j^*\Phi j \end{pmatrix}.$$

Если Φ – изоморфизм, то оба диагональных элемента последней матрицы – изоморфизмы; в частности, $j^*\Phi j : C \to C^*$ – изоморфизм, а это означает, что (C, j) – полный подобъект A.

Очевидно, что подобъект (C, j) – ядро морфизма $i^*\Phi$; поэтому если (C', j') – такой подобъект, что $i^*\Phi j' = 0$, то существует морфизм $\eta : C' \to C$, такой что $j' = j\eta$. Следовательно, подобъект (C, j) – левое ортогональное дополнение подобъекта (B, i).

Предложение 1 полностью доказано.

Будем говорить, что подобъект (C, j) объекта A ортогонален справа относительно формы Φ подобъекту (B, i), если $j^*\Phi i = 0$. Как и выше, определяется правое ортогональное дополнение, доказывается его единственность и существование правого ортогонального дополнения полного подобъекта. В некоторых важных случаях левая ортогональность и правая ортогональность совпадают. Мы называем форму Φ квазисимметричной, если существуют такие эндоморфизмы ε, δ объекта A, перестановочные со всеми идемпотентными эндоморфизмами A, что $\Phi\varepsilon = \Phi^*$, $\Phi^*\delta = \Phi$. В частности, если $\varepsilon = \delta = \mathbf{1}_A$, то квазисимметричная форма называется симметричной, а если $\varepsilon = \delta = -\mathbf{1}_A$ – кососимметричной.

Предложение 2. *Если прямое слагаемое (C, j) обьекта A ортогонально слева прямому слагаемому (B, i) относительно квазисимметричной формы Φ, то (C, j) ортогонально справа (B, i) относительно Φ. В этом случае прямое слагаемое (B, i) ортогонально справа и слева прямому слагаемому (C, j).*

Доказательство. То, что (B, i) – прямое слагаемое A, означает, что существует проекция $p : A \to B$, такая, что $pi = \mathbf{1}_B$. Тогда ip – идемпотентный эндоморфизм A. Если (C, j) ортогональный слева (B, i), то $i^*\Phi j = 0$. Пусть $\Phi = \Phi^*\delta$; тогда $j^*\Phi i = j^*\Phi ipi = j^*\Phi^*\delta(ip)i = j^*\Phi^*(ip)\delta i = (i^*\Phi j)^* p\delta i = 0$, т.е. (C, j) ортогонально справа (B, i).

Если левое ортогональное дополнение одновременно является и правым ортогональным дополнением, то мы называем его ортогональным дополнением. Предложение 1 принимает следующий вид.

Предложение 1$'$. *Пусть Φ – квазисимметричная билинейная форма на объекте A слабо предабелевой категории с инволцией, и пусть (B, i) – полный относительно Φ подобъект A. Тогда существует ортогональное дополнение (C, j) подобъекта (B, i); при этом $A = B \perp C$. Если Φ – невырожденная форма, то (C, j) – полный подобъект A.*

3. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – слабо предабелева категория с инволюцией, в которой каждый объект разложим в прямую сумму конечного числа неразложимых объектов, а кольцо эндоморфизмов любого неразложимого объекта на объекте A категории $\mathfrak{M}$. Тогда A раскладывается в прямую сумму попарно ортогональных относительно Φ изотропного подобъекта D и нескольких полных подобъектов, каждый из которых либо неразложим, либо раскладывается в прямую сумму двух дуальных друг другу неразложимых изотропных объектов. Если форма Φ невырождена, то изотропное слагаемое D отвутствует.*

Доказательство. Напомним прежде всего, что, как хорошо известно, в таких категориях выполняется теорема Крулля–Шмидта. В частности, всякое прямое разложение объекта в прямую сумму неразложимых объектов состоит из одного и того же числа слагаемых, которое будем называть длиной объекта. Будем доказывать теорему индукцией по длине объекта A.

Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где A_i неразложимы, и пусть для объектов меньшей длины все уже доказано (для $n = 0$ утверждение бессодержательно). Обозначим через $i_s : A_s \to A$, $p_s : A \to A_s$ канонические вложения и проекции для данного разложения объекта A; тогда $p_s^* : A_s^* \to A^*$, $i_s^* : A_s^* \to A^*$ будет каноническими вложениями и проекциями для прямого разложения $A^* = A_1^* \oplus \ldots \oplus A_n^*$. Пусть $\Phi : A \to A^*$ квазисимметричная билинейная форма на A.

Лемма 5. *Если в условиях теоремы Φ – не радикальный морфизм, то существует подобъект (X, i), полный относительно формы Φ и либо неразложимый, либо раскладывающийся в прямую сумму изотропного неразложимого объекта Y и изотропного неразложимого объекта Y', изоморфного Y^*.*

Теорема следует из леммы 5 при помощи тривиальной индукции. Если морфизм Φ радикален, то все тривиально, так как уже весь объект A изотропен относительно Φ. Пусть Φ – не радикальный морфизм, и пусть (X, i) – существующий по лемме 5 полный подобъект A, а (Z, j) – его ортогональное дополнение. Морфизм $\Phi_1 = j^*\Phi j : Z \to Z^*$ представляет собой билинейную форму на Z; если Φ невырождена, то и Φ невырождена.

Проверим, что Φ_1 квазисимметрична. Пусть ε, δ – такие эндоморфизмы A, перестановочные со всеми идемпотентными эндоморфизмами, что $\Phi_\varepsilon = \Phi^*$, $\Phi^*\delta = \Phi$, и пусть p, q – канонические проекции для прямого разложения $A = X \oplus Z$. Тогда

$$\Phi_1^* = j^*\Phi^*j = j^*\Phi\varepsilon jqj = j^*\Phi jq\varepsilon j = \Phi_1(q\varepsilon j),$$

$$\Phi_1 = j^*\Phi j = j^*\Phi^*\delta jqj = j^*\Phi^*jq\delta j = \Phi_1^*(q\delta j);$$

очевидно, что $q\varepsilon j$, $q\delta j$ перестановочны с идемпотентными эндоморфизмами Z.

Длина Z равна $n-1$ или $n-2$, и потому к Z и Φ_1 можно применить предположение индукции, что завершает доказательство теоремы.

Доказательство леммы 5. Возможны 2 случая.

Случай 1. Существует s, $1 \leqslant s \leqslant n$, для которого морфизм $i^*\Phi i_s$ – изоморфизм. Тогда $(X, i) = (A_s, i_s)$ – полный относительно Φ неразложимый подобъект A.

Случай 2. Для всех s морфизмы $i_s^*\Phi i_s$ – не изоморфны. По лемме 4 тогда найдутся t, s, такие что $a \leqslant s$, $t \leqslant n$ и морфизм $i_t^*\Phi i_s : A_s \to A_t^*$ – изоморфизм. Пусть γ обратный к нему изоморфизм.

По определению квазисимметричности существует такой эндоморфизм δ объекта A, что $\Phi = \Phi^*\delta$. Поскольку

$$(i_t^*\Phi^*i_s)(p_s\delta i_s\gamma) = i_t^*\Phi^*(i_sp_s)\delta i_s\gamma = i_t^*\Phi^*\delta(i_sp_s)i_s\gamma = (i_t^*\Phi i_s)\gamma$$

– тождественный автоморфизм A_t^*, по лемме 2 морфизм $i_t^*\Phi^*i_s$ тоже является изоморфизмом. Но тогда и $i_s^*\Phi i_t = (i_t^*\Phi^*i_s)^*$ – изоморфизм.

Прямая сумма $X = A_s \oplus A_t$, рассматриваемая с морфизмом $i = i_s \oplus i_t : A_s \oplus A_t \to A$ – подобъект A. Матрицей морфизма $i^*\Phi i : A_s \oplus A_t \to A_s^* \oplus A_t^*$ является матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $\alpha = i_s^*\Phi i_s$, $\delta = i_t^*\Phi i_t$ – не изоморфизмы, а $\beta = i_s^*\Phi i_t$, $\gamma = i_s^*\Phi i_s$ – изоморфизмы. По лемме 3 $i^*\Phi i$ – изоморфизм, так что (X, i) – полный подобъект A.

Лемма 5 полностью доказана.

4. Вполне изотропные и гиперболические объекты

Пара (D, Ψ), состоящая из объекта D и билинейной формы Ψ на нем, называется гиперболической, если форма Ψ невырождена, а объект A раскладывается в прямую сумму двух вполне изотропных относительно Ψ слагаемых, дуальных друг к другу. Гиперболические объекты имеют очень простую структуру, которая полностью описывается следующим утверждением.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ – слабо предабелева категория с инволюцией, в которой каждый объект разложим в прямую сумму конечного числа неразложимых объектов, а кольцо эндоморфизмов любого неразложимого объекта локально. Пусть, далее, Ψ – квазисимметричная билинейная форма на объекте D категории $\mathfrak{M}$. Если пара (D, Ψ) гиперболическая, то область D раскладывается в ортогональную относительно формы Ψ прямую сумму гиперболических подобъектов $D_1, \ldots, D_n$, каждый из которых, в свою очередь, раскладывается в прямую сумму двух вполне изотропных относительно формы Ψ неразложимых подобъектов.*

Доказательство. Пусть (D, Ψ) – гиперболическая пара; тогда объект D раскладывается в прямую сумму $E \oplus F$, причем ограничения формы Ψ на оба прямых слагаемых тривиальны. Поэтому матрица морфизма $\Psi : E \oplus F \to E^* \oplus F^*$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Psi_1 \\ \Psi_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Psi_1 : F \to E^*$, $\Psi_2 : E \to F^*$ – изоморфизмы, поскольку билинейная форма Ψ невырождена. Пусть $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ – разложение объекта E в прямую сумму неразложимых объектов; ему отвечает прямое разложение дуального объекта $E^* = E_1^* \oplus \ldots \oplus E_n^*$, которое изоморфизмом Ψ_1^{-1} переносится на объект $F : F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$. Точнее говоря, пусть $i_s : E_s \to E$, $p_s : E \to E_s$ – канонические вложения и проекции для разложения $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$; тогда морфизмы $i'_s = \Phi_1^{-1} p_s^* : E_s^* \to F$, $p'_s = i_s^* \Phi_1 : F \to E_s^*$ являются каноническими вложениями и проекциями для прямого разложения

$F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$, где объекты $F_1, \ldots, F_n$ изоморфны объектам $E_1^*, \ldots, E_n^*$. Легко видеть, что $D = (E_1 \oplus F_1) \perp \cdots \perp (E_n \oplus F_n)$, и что каждое из ортогональных слагаемых $E_s \oplus F_n$ гиперболично.

Следующая лемма дает достаточное условие гиперболичности подобъекта предабелевой категории с инволюцией, в которой кольца эндоморфизмов неразложимых объектов локальны.

Лемма 6. *Пусть (E, i) и $F, j)$ – два неразложимых подобъекта объекта A с квазисимметричной билинейной формой Φ; если $i^*\Phi i = 0$, $j^*\Phi j = 0$, и один из подобъектов (E, i), $F, j)$ является прямым слагаемым A а $i^*\Phi j$ – изоморфизм F на E^*, то существует гиперболическое прямое слагаемое объекта A, раскладывающееся в прямую сумму объектов E, F.*

Доказательство. Отметим сначала, что морфизм $j^*\Phi^* i = (i^*\Phi j)^* : E \to F^*$ является изоморфизмом. Пусть (E, i) – прямое слагаемое A, и пусть $p : A \to E$ – соответствующая проекция; поскольку форма Φ квазисимметрична, существует эндоморфизм δ, перестановочный с идемпотентными эндоморфизмами и такой, что $\Phi^* = \Phi\delta$. Тогда изоморфизм $j^*\Phi^* i$ представим в виде $j^*\Phi\delta i p i = j^*\Phi i p \delta i$ и потому морфизм $j^*\Phi i : E \to F^*$ обратим справа; следовательно, этот морфизм не радикален, и, поскольку объекты E, F^* изоморфны, он является изоморфизмом.

Обозначим через k морфизм $i \oplus j : E \oplus F \to A$; тогда матрицей морфизма $k^*\Phi k : E \oplus F \to E^* \oplus F^*$ будет матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & i^*\Phi j \\ j^*\Phi i & 0 \end{pmatrix}$$

и, поскольку оба недиагональных элемента этой матрицы – изоморфизмы, морфизм $K^*\Phi k$ является изоморфизмом. Отсюда следует, во-первых: что k – мономорфизм, и потому $(E \oplus F, k)$ – подобъект A, и, во-вторых, что ограничение формы Φ на этот подобъект невырождено, т.е. он является полным подобъектом объекта A.

Докажем еще одну лемму о вполне изотропных прямых слагаемых, которая понадобится нам в следующем параграфе.

Лемма 7. *Пусть $B = (B, i)$, $C = (C, j)$, $C' = (C', j')$ – подобъекты объекта A с формой Φ, причем сам объект A раскладывается в прямую сумму подобъектов B, C и еще какого-то подобъекта, а* *также в прямую сумму B, C' и еще какого-то подобъекта. Пусть далее, подобъект B вполне изотропичный, а прямые суммы $B \oplus C$ и $B \oplus C'$ являются его левыми ортогональными дополнениями, причем $B \oplus C = B \perp C$. Тогда ограничения формы Φ на подобъекты C, C' метрически изоморфны.*

Доказательство. Пусть $k : B \oplus C \to A$, $k' : B \oplus C' \to A$ – вложения подобъектов в A, такие что композиции канонических вложений $B, C \to B \oplus C$, $B, C' \to B \oplus C'$ с k, k' равны соответственно i, j и i, j'. Поскольку левое ортогональное дополнение единственно, существует изоморфизм $\phi : B \oplus C' \to B \oplus C$, такой что $k' = k\phi$. Пусть теперь $r : A \to B \oplus C$ – какой-нибудь морфизм, расщепляющий вложение k прямого слагаемого $B \oplus C$ в A, т.е. такой морфизм что $rk = \mathbf{1}_{B\oplus C}$. Обозначим через $p : A \to B$, $q : A \to C$ композиции r с каноническими проекциями на прямые слагаемые $B \oplus C \to B, C$, а через $p' : A \to B$, $q' : A \to C'$ – композиции ϕ^{-1} с каноническими проекциями на прямые слагаемые $B \oplus C' \to B, C'$. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$pi = \mathbf{1}_B, \quad qj = \mathbf{1}_C, \quad p'i = \mathbf{1}_B, \quad q'j' = \mathbf{1}_{C'},$$

$$pj = 0, \quad qi = 0, \quad p'j' = 0, \quad ip + jq = kr = k'\phi^{-1}r = ip' + j'q'.$$

Используя соотношения, полчаем:

$$qj'\,q'j = q(ip' + j'q')j = q(ip + jp"j = qjqj = \mathbf{1}_C$$

и аналогично находим, что $q'j\,qj' = \mathbf{1}_{C'}$. Следовательно, $q'j : C \to C'$, $qj' : C' \to C$ – взаимно обратные изоморфизмы.

Для доказательства леммы остается показать, что изоморфизм qj' – метрический. Сначала отметим несколько тождеств. Поскольку ограничение $i^*\Phi i$ формы Φ на подобъект $(B.i)$ нулевое, а подобъекты (B, i) и $C, j)$ ортогональны друг к другу слева и справа, и потому $i^*\Phi j = 0$, $j^*\Phi i = 0$, получаем:

$$(kr)^*\Phi i = (ip + jp)^*\Phi i = p^*i^*\Phi i + q^*j^*\Phi i = 0,$$

$$i^*\Phi kr = i^*\Phi(ip + jp) = i^*\Phi ip + i^*\Phi jq = 0.$$

Далее,

$$krj' = (ip' + j'q')j' = j'q'j' = j'.$$

Теперь мы видим, что

$$(qj')^*\Phi_C qj' = (j')^*q^*j^*\Phi jqj' = (j')^*(kr - ip)^*\Phi(kr - ip)j' =$$

$$(j')^*(kr)^*\Phi krj' - (j')^*p^*i^*\Phi(kr)j' - (j')^*(kr)^*\Phi ipj' + (j')^*p^*i^*\Phi ipj' =$$
$$= (j')^*\Phi j' = \Phi_C,$$

а это и означает, что изоморфизм qj' – метрический.

5. Закон сокращения

Пусть $\mathfrak{M}$ – категория с инволюцией, и пусть на объекте B категории $\mathfrak{M}$ задана билинейная форма Ψ. Будем говорить, что для пары (D, Ψ) выполняется закон сокращения, если справедливо следующее утверждение:

Пусть A – объект категории $\mathfrak{M}$, разложенный в прямую сумму подобъектов (B, i) и $C, j)$, и пусть Φ_1, $\Phi_2 : A \to A^*$ – две билинейные формы на A. Если

(1) *подобъекты (B, i) и $C, j)$ ортогональны друг другу относительно обеих форм Φ_1, Φ;*
(2) *ограничения $i^*\Phi_1$, $i^*\Phi_2 i : B \to B^*$ форм Φ_1, Φ_2 на подобъект (B, i) совпадают с Ψ;*
(3) *формы Φ_1, Φ_2 метрически изоморфны,*

то и ограничения $j^*\Phi_1 j$, $j^*\Phi_2 j : C \to C^*$ форм Φ_1, Φ_2 на подобъект (C, j) метрически изоморфны.

Замечание. Не требуется, чтобы формы Φ_1, Φ_2 были квазисимметричными.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – слабо предабелева категория с инволюцией, в которой каждый объект разложим в прямую сумму конечного числа неразложимых объектов, а кольцо эндоморфизмов любого неразложимого объекта локально. Пусть, далее, Ψ – квазисимметричная билинейная форма на объекте B категории $\mathfrak{M}$. В каждом из следующих случаев для пары (B, Ψ) выполняется закон сокращения:*

(1) *подобъект B вполне изотропен;*
(2) *пара (B, Ψ) гиперболическая;*
(3) *морфизм $\Psi : B \to B^*$ – изоморфизм, и в кольце эндоморфизмов объекта B возможно и однозначно деление на 2.*

Доказательство. Утверждение теоремы в случае (1) является специальным случаем леммы 7. Покажем, что закон сокращения в случае (3) следует из его справедливости в случае (2). Пусть B_1 – другой экземпляр объекта B; зададим на нем билинейную форму $\Psi_1 = -\Psi$. Пусть, далее $D = B_1 \perp B$ и пусть $i_1 : B_1 \to D$, $i_2 : B_1 \to D$, – канонические вложения первого и второго слагаемых в прямую сумму. Тогда подобъекты $B' = (B, i_1+i_2)$, $B'' = (B, i_1-i_2)$ объекта D вполне изотропны, и $D = B' \oplus B''$. Следовательно, пара $(D, \Psi_1 \oplus \Psi)$ гиперболическая. Если теперь Φ_1, Φ_2 – метрически изоморфные формы на $A = B \oplus C$, то $\Psi_1 \oplus \Phi_1$, $\Psi_1\Phi_2$ метрически изоморфные формы на $B_1 \oplus A = (B_1 \oplus B) \oplus C$, и их ограничение на $B_1 \oplus B$ – гиперболическая форма $\Psi_1 \oplus \Psi$; по закону сокращения для гиперболических форм, ограничения всех форм на C метрически изоморфны.

Таким образом, нам остается доказать утверждение теоремы в случае, когда пара (B, Ψ) гиперболическая. По предложению 3, существует ортогональное относительно формы Ψ прямое разложение $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$, каждое из слагаемых которого раскладывается в прямую сумму двух вполне изотропных относительно Ψ неразложимых подобъектов. Ясно, что если теорема доказана для случая $n = 1$, то общий случай легко получается индукцией; поэтому до конца доказательства мы предполагаем, что $B = E \oplus F$, где подобъекты E и F неразложимы и вполне изотропны.

Итак, пусть $A = B \oplus C$, и пусть Φ, $\Phi_1 : A = B \oplus B \to B^* \oplus C^* = A^*$ – две билинейные формы на A, ограничения которых на B совпадают с Ψ и относительно каждой из которых подобъекты B и C ортогональны друг другу. Тогда матрицы морфизмов Φ, Φ_1 имеют вид

$$\begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Theta_1 \end{pmatrix}$$

Далее, пусть Δ – автоморфизм объекта $A = B \oplus C$, осуществляющий метрический изоморфизм форм Φ, Φ_1, т.е. такой автоморфизм, что $\Phi_1 = \Delta^\Phi \Delta$, и пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

– матрица морфизма Δ. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая.

Случай 1. Эндоморфизм $\mathbf{1}_B - \alpha$ объекта B обратим. В этом случае нам даже не понадобится, что (B, Ψ) – гиперболическая пара: важно будет лишь, что морфизм Ψ является изоморфизмом.

Условие $\Phi_1 = \Delta^*\Phi\Delta$ в матричной форме приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Theta_1 \end{pmatrix},$$

а это матричное равенство равносильно системе равенств

$$\alpha^*\Psi\alpha + \beta^*\Theta\beta = \Psi,$$

$$\alpha^*\Psi\gamma + \beta^*\Theta\delta = 0,$$

$$\gamma^*\Psi\alpha + \beta^*\Theta\beta = 0,$$

$$\gamma^*\Psi\gamma + \delta^*\Theta\delta = \Theta_1.$$

Для сокращения последующих вычислений обозначим морфизм $(\mathbf{1}_B - \alpha)^{-1}$ через ξ; отметим, что $\mathbf{1}_B + \alpha\xi = \mathbf{1}_B + \xi\alpha = \xi$. Обозначим через ε эндоморфизм $\delta + \beta\xi\gamma$ объекта C. Используя все приведенные выше соотношения, непосредственной выкладкой получаем:

$$\varepsilon^*\Theta\varepsilon = (\delta+\beta\xi\gamma)^*\Theta(\delta+\beta\xi\gamma) = \delta^*\Theta\delta + \gamma^*\xi^*\beta^*\Theta\delta + \delta^*\Theta\beta\xi\gamma + \gamma^*\xi^*\beta^*\Theta\beta\xi\gamma =$$

$$\delta^*\Theta\delta - \gamma^*\xi^*\alpha^*\Psi\gamma - \gamma^*\Psi\alpha\xi\gamma + \gamma^*\xi^*(\Psi - \alpha^*\Psi\alpha)\xi\gamma =$$

$$= \delta^*\Theta\delta + \gamma^*\Psi\gamma + \gamma^*(\xi^*\Psi\xi - (\mathbf{1}_B + \alpha\xi)^*\Psi(\mathbf{1}_B + \alpha\xi))\gamma = \delta^*\Theta\delta + \gamma^*\Psi\gamma = \Theta_1.$$

Покажем, что эндоморфизм ε объекта C обратим, т.е. является автоморфизмом C. Пусть

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ \beta' & \delta' \end{pmatrix}$$

– матрица морфизма Δ^{-1}, обратного к автоморфизму Δ. Ясно, что выполняются соотношения

$$\alpha\alpha' + \gamma\beta' = \mathbf{1}_B; \quad \alpha\gamma' + \gamma\delta' = 0; \quad \beta\alpha' + \delta\beta' = 0; \quad \beta\gamma' + \delta\delta' = \mathbf{1}_C.$$

Верхние элементы α', γ' обратной матрицы Δ^{-1} представляют собой единственное решение системы уравнений

$$\alpha\alpha' + \gamma'\beta = \mathbf{1}_B,$$

$$\alpha'\gamma + \gamma'\delta = 0.$$

Но мы видели, что

$$\alpha^*\Psi\alpha + \beta^*\Theta\beta = \Psi,$$

$$\alpha^*\Psi\gamma + \beta^*\Theta\delta = 0,$$

поэтому $\alpha' = \Psi^{-1}\alpha^*\Psi$, $\gamma' = \Psi^{-1}\beta^*\Theta$ (напомним, что пара (B, Ψ) гиперболическая, и поэтому морфизм Ψ обратим). В частности, морфизм $\mathbf{1}_B - \alpha' = \Psi^{-1}(\mathbf{1}_B - \alpha)\Psi$ обратим; обозначим обратный к нему морфизм через ξ'. Для него выполняются тождества, аналогичные тождествам для ξ : $\mathbf{1}_B + \alpha'\xi' = \mathbf{1}_B + \xi'\alpha' = \xi'$. Теперь мы можем указать морфизм, обратный к ε: это морфизм $\varepsilon' = \delta + \beta'\xi'\gamma'$. Действительно,

$$\varepsilon\varepsilon' = (\delta + \beta\xi\gamma)(\delta' + \beta'\xi'\gamma') = \delta\delta' + \delta\beta'\xi' ga' + \beta\xi\gamma\delta' + \beta\xi\gamma\beta'\xi'\gamma' =$$

$$\delta\delta' - \beta\alpha'\xi'\gamma' - \beta\xi\alpha\gamma' + \beta\xi(\mathbf{1}_B - \alpha\alpha')\xi'\gamma' =$$

$$\delta\delta' + \beta(-\alpha'\xi' - \xi\alpha - \xi\alpha\alpha'\xi' + \xi\xi')\gamma' =$$

$$= \delta\delta' + \beta(\mathbf{1}_B - \xi' + \mathbf{1}_B\alpha - \xi - (\mathbf{1}_B - \xi)(\mathbf{1}_B - \xi') + \xi\xi')\gamma' = \delta\delta' + \beta\gamma' = \mathbf{1}_C,$$

и аналогично проверяется соотношение $\varepsilon'\varepsilon = \mathbf{1}_C$.

Итак, существует автоморфизм ε подобъекта C объекта A, такой что $\varepsilon^*\Theta\varepsilon = \Theta_1$; это и означает, что ограничения Θ, Θ_1 форм Φ, Φ_1 на подобъект C метрически изоморфен.

Случай 2. Напомним, что $B = E \oplus F$, где объекты E, F неразложимы. Таким образом, $A = E \oplus F \oplus C$; обозначим через $i : E \to A$, $j : F \to A$, $k : C \to A$ канонические вложения прямых слагаемых, а через $p : A \to E$, $q : A \to F$, $r : A \to C$ – канонические проекции. Матрица морфизма Δ приобретает для этого разложения вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \gamma_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \delta \end{pmatrix};$$

при этом матрицей морфизма $\alpha : B = E \oplus F \to E \oplus F = B$ будет матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Если бы все морфизмы $\alpha_1 : E \to E$, $\alpha_2 : F \to E$, $\alpha_3 : E \to F$, $\alpha_4 : F \to F$ были радикальными, то был бы радикален и морфизм α, а тогда морфизм $\mathbf{1}_B - \alpha$ был иы обратим; следовательно, хотя бы один из этих морфизмов не радикален и, поскольку оба объекта E и F неразложимы, является изоморфизмом. Пусть, для определенности, это будет морфизм $\alpha_2 : F \to E$ (такое возможно только если $E \sim F$, но мы не должны пропустить и этот случай).

В следующих ниже рассуждениях мы обозначаем для краткости подобъекты (E, i), (F, j), (C, k) объекта A через E, F, C. Рассмотрим еще подобъекты $E' = (E, \Delta_i)$, $F' = (F, \Delta j)$, $C' = (C, \Delta k)$; ясно, что $A = E' \oplus F' \oplus C'$. Все компоненты матрицы морфизма $\Phi : A \to A^*$ для этого прямого разложения совпадают с соответствующими компонентами матрицы морфизма $\Phi_1 : A \to A^*$ для исходного разложения $A = E \oplus F \oplus C$; например,

$$(\Delta j)^* \Phi(\Delta i) = j^* \Delta^* \Phi \Delta i - j^* \Phi_1 i = 0.$$

Поэтому подобъекты E', F', C' ведут себя относительно формы Φ так же, как объекты E, F, C ведут себя относительно формы Φ_1; в частности, относительно формы Φ подобъекты E' и F' вполне изотропны, их прямая сумма $E' \oplus F'$ – гиперболическое прямое слагаемое A, а C' – его ортогональное дополнение. Кроме того, морфизм $i^* \Phi \Delta j$ является изоморфизмом. Действительно, пусть $\psi_1 = i^* \Phi j$, $\psi_2 = j^* \Phi i$; тогда матрица морфизма Φ равна

$$\begin{pmatrix} 0 & \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta \end{pmatrix},$$

а матрица морфизма $i^* \Phi \Delta j$ равна

$$(1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 & \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \gamma \\ \alpha_3 & \alpha_4 \gamma_2 & \\ \beta_1 & \beta_2 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_1 \alpha_2$$

Но $\begin{pmatrix} o & \psi_1 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}$ – не что иное, как матрица изоморфизма

$$\Psi : E \oplus F \to E^* \oplus F^*;$$

отсюда следует, в частности, что морфизм ψ_1, а с ним и морфизм $i^* \Phi \Delta j$, являются изоморфизмами.

Прменив лемму 6, мы видим теперь, что $E \oplus F'$ – гиперболическое прямое слагаемое объекта с формой (A, Φ); пусть C'' – его левое ортогональное дополнение (относительно формы Φ). Тогда, очевидно, $E \oplus C''$ – левое ортогональное дополнение подобъекта E, а $F' \oplus C''$ – левое ортогональное дополнение подобъекта F'. С другой стороны, $A = (E \oplus F) \perp C = (E' \oplus F') \perp C'$, и потому $E \perp C$ – тоже левое ортогональное дополнение подобъекта F, а $F' \perp C'$ – левое ортогональное дополнение подобъекта F'. Согласно лемме 7, ограничения формы Φ на подобъекты C и C'' метрически изоморфны и ее ограничения на подобъекты C' и C'' метрически изоморфны; поэтому метрически изоморфны и ограничения формы Φ на подобъекты $C = (C, k)$ и $C' = (C, \Delta k)$, т.к. существует автоморфизм ε объекта C, такой что $\varepsilon^*\Phi_C\varepsilon = \Phi_{C'} = k^*\Delta^*\Phi\Delta k = k^*\Phi_1 k = (\Phi_1)_C$.

Теоремы 1 и 2 являются, пожалуй, единственными результатами, справедливыми без всяких дополнительных ограничений.

Эта работа была частично поддержана РФФИ, грант 96-01-01834.

Литература

1. А. В. Яковлев, *Симплектические пространства с операторами.* — Вестник Ленингр. ун-та **No. 19** (1969), 150–158.
2. А. В. Яковлев, *Структуры симплектического пространства на модулях.* — Вестник Ленингр. ун-та **No. 1** (1970), 132–137.
3. A. Fröhlich, A. M. McEvett, *Forms over rings with involution.* — J. Algebra **12, No. 1** (1969), 79–104.
4. A. M. McEvett, *Forms over semisimple algebras with involution.* — J. Algebra **12, No. 1** (1969), 105–113.
5. З. И. Боревич, Г. И. Девятко, *Инвариантные формы на модулях с операторами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 30–48.

Yakovlev A. V. Bilinear forms on categories.

Bilinear forms on categories are defined and Theorems concerning the structure of objects with forms and cancellation law are proved. These results are the strongest generalisations of earlier author's results.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 27 февраля 1997 г.