ПАМЯТИ ГЕННАДИЯ МИХАЙЛОВИЧА ГОЛУЗИНА (1906—1952)

Геннадий Михайлович Голузин родился в 1906 году в старинном русском городе Торжке в семье рабочего. В 1924 году он поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета. В начале 1929 года он защитил свою дипломную работу, которая была в том же году опубликована в журнале "Математический сборник". С этого времени началась его преподавательская деятельность. В 1936 году он блестяще защитил докторскую диссертацию. С 1938 года Г. М. Голузин возглавлял кафедру теории функций комплексного переменного в ЛГУ. С момента основания Ленинградского отделения Математического института АН СССР (теперь Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН) и до конца жизни Геннадий Михайлович одновременно работал и в этом институте.

Начало научной деятельности Г. М. Голузина приходится на 30-е годы. Его первые работы были посвящены задачам математической физики. Здесь уместно указать известное неравенство Карлемана–Голузина–Крылова. Однако уже в середине 30-х годов Геннадий Михайлович обратился к геометрической теории функций (коротко ГТФ). Нужно сказать, что в 20-30 годы эта наука находилась еще в периоде своего становления. Первым элементарным методом ГТФ был метод площадей, основывающийся на принципе неотрицательности площади. В 1916 году Л. Бибербах установил этим методом ряд замечательных свойств функции Кёбе $K_\varepsilon(z) = z(1-\varepsilon z)^{-2}$, $|\varepsilon| = 1$, и высказал гипотезу, что в классе S регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ функций с разложением в окрестности начала координат вида

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots ,$$

справедливо неравенство $|c_n| \leqslant n$ и $|c_n| = n$ только для функции Кёбе. Сам Бибербах доказал неравенство $|c_2| \leqslant 2$.

Первым глубоким методом ГТФ стал параметрический метод Лёвнера, и решающая роль в развитии и распространении этого метода принадлежит Г. М. Голузину. Как известно, целью работы К. Лёвнера 1923 года было доказательство оценки модуля третьего коэффициента в классе S. Уже через несколько лет после появления статьи Лёвнера Г. М. Голузин обратился к параметрическому методу и использовал его для того, чтобы единообразно вывести основные результаты теории однодистных функций. В те годы Геннадий Михайлович получил этим методом новые результаты, к числу которых относится точная форма вращения, т.е. точная оценка $|\arg f'(z)|$ в классе S при $|z| = r$, $0 < r < 1$. К методу Лёвнера Г. М. Голузин неоднократно возвращался и в последующие годы. В настоящее время метод Лёвнера принадлежит к числу основных методов ГТФ.

В 1965 году К. Лёвнер присутствовал на Международной конференции в г. Ереване. В беседе с ленинградскими математиками он сообщил, что всегда удивлялся тому развитию, которое получила его давняя работа.

В конце 20-х – начале 30-х годов Грётш разработал свой метод полос. Этот метод основывается на соотношениях между длиной и площадью, в нем рассматриваются характеристические конформные инварианты двусвязных областей и четырехугольников. При помощи своего метода Грётш получил большое число глубоких результатов как для односвязных, так и для многосвязных областей. Однако работы Грётша длительное время не получали должного признания, возможно, что одной из причин этого была изоляция немецких ученых того времени от остального научного мира. Г. М. Голузин один из первых оценил возможности этого метода: в ряде своих работ 30-х годов он получил различные приложения метода полос. Этим методом Г. М. Голузин впервые доказал теорему о существованиии в образе единичного круга при его отображении функцией класса S n отрезков, выходящих из начала координат под равными углами, сумма длин которых $\geqslant n$. В последствии метод полос Грётша лег в основу метода экстремальной метрики, широко используемого в настоящее время в ГТФ и нашедщего приложения и в других областях математики.

Вариационное исчисление для однолистных функций значительно отличается от классического вариационного исчисления, поскольку классы однолистных функций являются в высокой степени нелинейными. В 1938 году Шиффер создал метод граничных вариаций, а в 1943 году – метод внутренних вариаций. Первые приложения, полученные Шиффером, носили в основном характер качественных результатов для экстремальных функций в задаче о максимуме модуля коэффициентов класса S. В серии своих работ 1946–1951 годов Г. М. Голузин разработал свой вариант метода внутренних вариаций. Доказательство Г. М. Голузина в основном элементарно и основывается на свойствах мажорантных степенных рядов. Г. М. Голузин применил свой метод вариаций к различным задачам теории однолистных функций. Результаты, полученные вариационными методами Шиффера и Голузина, обнаруживают существенную роль квадратичных дифференциалов при решении экстремальных задач. В ряде случаев доказательства, полученные вариационным методом Голузина, оказываются значительно проще доказательств при помощи метода Шиффера. Геннадий Михайлович получил своим методом результаты в проблеме Чеботарева и в задаче о максимуме n-го диаметра (эти вопросы играют большую роль в теории емкости плоских множеств), в задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей, различные теоремы искажения. К их числу относится известное неравенство для значений функции $f(z) \in \Sigma$ в ряде точек из области $|z| > 1$ (Σ – класс функций $f(z)$, мероморфных и однолистных в области $|z| > 1$ и имеющих в окрестности $z = \infty$ лорановское разложение вида $f(z) = z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots$):

$$\left| \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_\mu \gamma_\nu \log \frac{f(z_\mu) - f(z_\nu)}{z_\mu - z_\nu} \right| \leqslant \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \gamma_\mu \overline{\gamma}_\nu \log(1 - z_\mu^{-1} \overline{z}_\nu^{\,-1}).$$

Научное наследие Г. М. Голузина весьма разнообразно и далеко не исчерпывается упомянутыми результатами. В качестве лишь некоторых примеров укажем его работу по p-листным функциям, обширное исследование внутренних свойств функций классов Харди, результаты для однолистных функций в многосвязных областях. Результаты Г. М. Голузина послужили началом различных направлений исследований в ГТФ и оказали большое влияние на современную проблематику этой теории.

Геннадий Михайлович уделял большое внимание распространению идей и результатов ГТФ. Блестящая эрудиция и мастерство изложения позволили ему написать яркие обзоры по ГТФ. К ним относится обширная обзорная статья “Внутренние задачи теории однолистных функций”, опубликованная в 1939 году в журнале “Успехи математических наук”. Эта статья является одним из первых обзоров, посвященных геометрической теории функций, в мировой литературе. Продолжение этого обзора было опубликовано в 1949 году в отдельном томе “Трудов МИАН”.

Несколько поколений математиков училось по монографии

Г. М. Голузина "Геометрическая теория функций комплексного переменного". Первое издание этой книги вышло в 1952 году, второе дополненное издание – в 1966 году, эта книга была переведена на немецкий и английский языки. Монография Г. М. Голузина энциклопедична по своему содержанию: наряду с методами ГТФ (параметрический метод Лёвнера, метод вариаций, метод полос Грётша и другие методы) в ней излагаются общие вопросы теории конформного отображения односвязных и многосвязных областей, метрические свойства замкнутых множеств, различные принципы мажорации, граничные свойства аналитических функций. Эта монография является настольной книгой современных аналитиков.

Многие математики, в том числе один из редакторов данного сборника, впервые познакомились с Г. М. Голузиным как редактором превосходного перевода двухтомного труда Е. Т. Уиттекера и Г. Н. Ватсона "Курс современного анализа", опубликованного ГТТИ в 1934 году.

Г. М. Голузин уделял большое внимание педагогической деятельности. Помимо курса лекций по теории функций комплексного переменного на математико-механическом факультете ЛГУ, Геннадий Михайлович читал различные спецкурсы и руководил семинарами по ГТФ: студенческим семинаром и семинаром для более подготовленных слушателей. Автор этой заметки был одним из последней группы студентов математико-механического факультета ЛГУ, специализирующихся по ГТФ под руководством Г. М. Голузина. Помню, как Геннадий Михайлович поручил мне рассказать на студенческом семинаре доказательство теоремы Лаврентьева–Шепелева–Ренгеля о $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ методом полос, приведенное в его обзорное статье 1939 года (позднее Геннадий Михайлович включил это доказательство в свою монографию). Некоторые моменты доказательства сначала не были мне понятны. Геннадий Михайлович сразу понял показанный ему рисунок. "У Вас очень сложно, – сказал он мне. Эти куски просто не нужно рассматривать". (Речь шла о частях области, отсекаемых прямолинейными отрезками.) Геометрическое доказательство теоремы о $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$, предложенное Г. М. Голузиным, прекрасно иллюстрирует основные идеи метода полос Грётша. В последствии оно служило мне примером, помогающим понимать геометрический смысл ряда доказательств методом экстремальной метрики.

Г. М. Голузин очень внимательно относился к своим ученикам. Хорошо помню, как в начале лета 1951 года, перед студенческими каникулами, Геннадий Михайлович, будучи уже тяжело больным, пригласил нас к себе домой, чтобы заранее дать нам темы дипломных работ. "Вы ведь будете работать летом, правда?" – сказал нам на прощание Геннадий Михайлович, явно с надеждой на положительный ответ.

На семинаре по ГТФ, руководимым Г. М. Голузиным, вырос ряд известных математиков. К числу прямых учеников Геннадия Михайловича относятся Ю. Е. Аленицын, С. А. Гельфер, Л. И. Колбина, Н. А. Лебедев, Ю. Д. Максимов, И. М. Милин, Л. Н. Слободецкий. В работах Н. А. Лебедева и И. М. Милина – как и для Г. М. Голузина, геометрическая теория функций стала главным делом их жизни – нашли прямое продолжение многие исследования Г. М. Голузина.

После Г. М. Голузина руководство семинаром по ГТФ в течение 30 лет (1952–1982) продолжал Н. А. Лебедев. В своей работе семинар следовал традициям, заложенным Г. М. Голузиным. В те годы Ленинградский семинар имел многочисленную аудиторию, на нем выступали с докладами многие математики из других городов.

Семинар продолжает работать и в настоящее время. В 1984 году Ленинградский семинар по ГТФ слушал доклады Луи де Бранжа, посвященные его доказательству гипотезы Бибербаха. Примечательно, что существенная роль в этом доказательстве принадлежит методу Лёвнера и в нем используется коэффициентное неравенство, полученное Н. А. Лебедевым и И. М. Милиным.

В повседневной жизни Геннадий Михайлович был весьма скромным, добрым и непритязательным человеком. Работая в ЛОМИ, он с большой ответственностью относился к своим обязанностям. Даже будучи лауреатом Государственной премии 1947 года, а также премии Ленинградского университета за 1946 год, он весьма озабоченно относился к годовым научным отчетам, которые он должен был представлять как сотрудник ЛОМИ.

Г. М. Голузину пришлось жить и работать в трудных условиях. Вместе со своей семьей он пережил в Ленинграде тяжелую блокадную зиму. Существенную, а возможно, и решающую помощь семье в этой время оказал продуктовый паек, выделенный Правительством ученым Ленинградского университета. После возвращения в 1944 году из Казани, куда в годы войны был эвакуирован МИАН, Г. М. Голузин продолжал жить вместе со своей женой А. М. Чуфистовой и тремя дочерьми – Леной, Аней и Машей – в одной комнате большой коммунальной квартиры на предпоследнем пятом этаже старого ленинградского дома (на углу Литейного проспекта и улицы Некрасова). В студенческие годы мне часто приходилось видеть Геннадия Михайловича, прогуливающегося со своими детьми. Как вспоминают его дочери, он учил их играть в шахматы и придуманные им различные игры, приводил их в известный в те годы магазин в начале Невского проспекта, в котором имелся большой выбор географических карт, глобусов и других наглядных пособий по географии. Любимым отдыхом Геннадия Михайловича в немногие часы досуга было занятие любительской фотографией. Его неосуществленной мечтой было отправиться в большое путешествие. Все три дочери Геннадия Михайловича стали математиками.

Преданность науке Г. М. Голузина была исключительной. Он продолжал работать с большим увлечением казалось бы в невозможных условиях. Как часто вспоминал И. М. Милин, посетивший Г. М. Голузина в последние дни его жизни, Геннадий Михайлович встретил его вопросом: "Получили что-нибудь интересное?"

Роль Г. М. Голузина в развитии геометрической теории функций в нашей стране трудно переоценить. Его вклад в теорию функций высоко оценен международной математической общественностью. В монографиях наших и зарубежных ученых, посвященных геометрической теории функций, приводятся многочисленные ссылки на работы Г. М. Голузина.

Настоящий сборник и следующий выпуск данной серии "Записок научных семинаров ПОМИ" посвящается памяти Геннадия Михайловича Голузина.

Г. В. Кузьмина