Е. П. Голубева

# ОЦЕНКА КОНСТАНТЫ ЛЕВИ ДЛЯ $\sqrt{p}$ И КРИТЕРИЙ ОДНОКЛАССНОСТИ $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$

**Посвящается**
**90-летию со дня рождения**
**Г. М. Голузина**

**1.** Пусть простое число $p \equiv 3 \pmod 4$ и

$$\sqrt{p} = [\, m, \overline{r_1, \dots, r_n, s, , r_n, \dots, r_1, 2m}\,] \qquad (1)$$

– разложение $\sqrt{p}$ в непрерывную периодическую дробь. Обозначим через $q_i$ знаменатель подходящей дроби из этого разложения с номером $i$. Константа Леви для любого вещественного числа $x$ определяется как предел

$$\beta(x) = \lim_{i\to\infty} \frac{\log q_i}{i}. \qquad (2)$$

Известно (см. [1]), что если $x$ – квадратичная иррациональность, то этот предел существует. Обозначим длину периода разложения (1) через $\ell(\sqrt{p}) = 2n+2$. Константа Леви характеризует соотношение величин $\ell(\sqrt{p})$ и регулятора поля $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$. Для поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ $\ell((1+\sqrt{5})/2) = 1$, $\beta((1+\sqrt{5})/2) = \log((1+\sqrt{5})/2)$. Константа $\log((1+\sqrt{5})/2)$ является точной нижней границей для $\beta(x)$. Соответствующий результат для длин периодов выглядит следующим образом. Пусть $\ell(x)$ – длина периода любой квадратичной иррациональности дискриминанта $D$, тогда

$$\ell(x) < \frac{\sqrt{D}\, L_D(1)}{2h(D)\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

где $L_D(1)$ – значение в единичной точке ряда Дирихле с вещественным характером $\pmod D$, $h(D)$ – число классов бинарных форм дискриминанта $D$. Последняя оценка была получена в работе [2].

В настоящей работе показано, что для $p \equiv 3 \pmod 4$ значение константы Леви $\beta(\sqrt{p}) > \log\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Этот результат, по-видимому, не является неулучшаемым, однако он не может быть улучшен существенно, поскольку $\beta(\sqrt{3}) = \log\sqrt{2+\sqrt{3}}$. (Для сравнения численных значений: $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < 1.62$, $\frac{4\sqrt{2}}{3} > 1.88$, $\sqrt{2+\sqrt{3}} < 1.94$.)

Соответственно, мы получаем новую оценку сверху для $\ell(\sqrt{p})$:

$$\ell(\sqrt{p}) < \frac{\sqrt{p}\, L_{4p}(1)}{h(4p)\log\frac{4\sqrt{2}}{3}} \quad (p > 91).$$

Отсюда и результата работы [3] мы получаем новый критерий одноклассности поля $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$: $h(4p) = 1$ тогда и только тогда, когда

$$\ell(\sqrt{p}) > 0.56\sqrt{p}\, L_{4p}(1).$$

Заметим, что если $h(4p) = 1$, то при некоторых дополнительных предположениях (см. ниже) $\ell(\sqrt{p}) \sim \frac{12\log 2}{\pi^2}\sqrt{p}\, L_{4p}(1)$; $\frac{12\log 2}{\pi^2} > 0.83$. Без этих дополнительных предположений можно утверждать, что отношение $\ell(\sqrt{p})/\sqrt{p}\, L_{4p}(1)$ при больших $p$ не принимает значений на промежутке $[0.56,\ 0.7]$.

Основой для доказательства этих результатов является лемма 1, где показано, грубо говоря, что элементы $r_i$ из разложения (1) удовлетворяют, как минимум, $n/2$ линейным соотношениям и, в частности, не могут быть одновременно равны 1. В свою очередь, лемма 1 основана на теореме 1 работы [4]. В этой теореме показано, что упомянутые соотношения следуют из разрешимости для каждого $p \equiv 3 \pmod 4$ одного из уравнений $x^2 - py^2 = \pm 2$.

По поводу средних значений $h(d)$ и $\beta(x)$ в работах [5–7] получены достаточно точные результаты при условии, что упорядочивание соответствующих квадратичных иррациональностей происходит по величине регулятора, а не дискриминанта. К сожалению, при таком упорядочивании наиболее интересная с точки зрения теории чисел информация уходит в остаточных член соответствующих асимптотических формул. Например, в работе [5] показано, что

$$\sum_{\varepsilon(d)\leqslant X} h(d) = \mathrm{li}\,(X^2) + O\left(X^{\frac{3}{2}}\log^2 X\right),$$

а в работе [4], что

$$\sum_{\substack{p\equiv 3 \pmod 4,\\ \varepsilon(p)\leqslant X}} h(p) = O(X).$$

Что касается результата из работы [6], где среднее значение $\beta(x)$ по всем приведенным иррациональностям фиксированного дискриминанта затем усредняется по величине регулятора, то после работ [8, 9] представляется, что второе усреднение является лишним, т.е. реально доказать, что для больших фиксированных $d$ среднее значение $\beta(x)$ по всем приведенным иррациональностям $\sim \frac{\pi^2}{12\log 2}$. В настоящее время этот результат доказан в предположении отсутствия в окрестности 1 нулей $L$-рядов с вещественными характерами (см. [10], а так же [11], где этот же результат получен в других предположениях).

**2.** Прежде чем доказывать основные результаты работы (теоремы 1 и 2) получим несколько лемм.

**Лемма 1.** *В разложении* (1) *множество всех неполных частных* $\{r_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *кроме, может быть, трех элементов можно разбить на непересекающиеся наборы вида* $(r_i, r_j)$, $(r_k, r_m, r_s)$, $(r_t, r_u, r_v, r_w)$ *такие, что* $r_j = 2r_i$ *или* $r_j = 2r_i + 1$ *или* $r_j = 2r_i$; $r_k = 1$, $r_s = 2r_m + 1$ *или же* $r_k = 1$, $r_s = 2r_m + 2$; $r_t = r_u = 1$, $r_w = 2r_v + 2$.

В дальнейшем эта лемма используется в следующей форме.

**Следствие.**

$$\prod_{q=1}^{n} r_q \geqslant 2^{\frac{n-3}{2}}.$$

Действительно, по лемме 1, $r_i r_j \geqslant 2$; $r_k r_m r_s \geqslant 3$, а $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$; наконец, $r_t\, r_u\, r_v\, r_w \geqslant 4$.

**Доказательство леммы 1.** В теореме 1 работы [4] показано, что $R_{n-1} = 2T_{n-1}$ или $R_n + R_{n-1} = 2T_{n-1}$, где рекуррентные последовательности $\{R_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ и $\{T_i, 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$ порождаются наборами чисел $(r_n, \dots, r_1)$ и $(r_{n-1}, \dots, r_1)$ из (1) соответственно.

В лемме той же работы показано, что отсюда следует равенство $r_n = 2r_1$ в первом случае и $r_n = 1$, $r_{n-1} = 2r_1 + 1$ во втором. При этом для рекуррентных последовательностей меньшей длины, порожденных неполными частными, не участвующими в последних соотношениях, возникают новые линейные соотношения четырех различных типов. Эти соотношения порождают новые равенства, из которых на каждом шаге следует, что крайние элементы удовлетворяют одному из следующих соотношений 1)–4):

1) $r_i = 2r_j$; 2) $r_i = r_j = 2$; 3) $r_j = 2r_i + 1$, $r_{i\pm1} = 1$; 4) $r_i = 1$, $r_{i\pm1} = 1$, $r_j = 2r_i + 2$.

Схема возможных переходов от шага к шагу выглядит следующим образом:

.

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть*

$$\varphi(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i=1}^{k} \log(z_i + 2) - \log(z_i + 1).$$

*Тогда при условиях* $z_i \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$

$$\exp \varphi(z_1, \dots, z_k) \geqslant \min \begin{cases} \left(\dfrac{4}{3}\right)^k, \\ \left(\dfrac{A+2}{A+1}\right)^k, \end{cases}$$

*где значение* $A$ *определяется условием*

$$A^k = \prod_{i=1}^{k} z_i. \tag{3}$$

**Доказательство.** Функция $\varphi(z_1, \dots, z_k)$ монотонно убывает по любой из переменных $z_i$. Поэтому мы можем считать, что $\prod_{i=1}^{k} z_i \geqslant 2^k$, т.е. в (3) $A \geqslant 2$. В противном случае мы можем увеличить, например, $z_1$ так чтобы выполнялось последнее неравенство. Найдем наименьшее значение функции $\varphi(z_1, \dots, z_k)$ при условии (3) в области $z_i \geqslant 1$.

В точках условного экстремума имеют место равенства

$$\frac{1}{z_i+2} - \frac{1}{z_i+1} + \frac{\lambda}{z_i} = 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant k),$$

где $\lambda$ – множитель Лагранжа. Отсюда

$$\lambda = \frac{z_i}{(z_i+2)(z_i+1)}. \tag{4}$$

Таким образом, $\lambda$ принимает одно из двух значений: $z_i = x_1$ или $z_i = x_2$, являющихся корнями уравнения $\lambda x^2 + (3\lambda - 1)x + 2\lambda = 0$.

Поскольку в точках экстремума $z_i > 1$ и $x_1 x_2 = 2$, то в силу (3) и (4) либо $z_i = 2$, либо $z_i = A$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. В любом случае в области $z_i > 1$ неравенство леммы выполнено.

Аналогично, при $z_1 = \ldots = z_m = 1$ $(1 \leqslant m \leqslant k)$

$$\exp\varphi\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{m}, z_{m+1}, \dots, z_k\right) \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^m \left(\frac{B+2}{B+1}\right)^{k-m},$$

где $B^{k-m} = A^k$. Следовательно, $B \geqslant A \geqslant 2$.

Покажем, что функция в правой части последнего неравенства растет по переменной $m$. Действительно,

$$\begin{aligned} &\left[m \log\frac{3}{2} + (k-m)\left(\log\left(A^{\frac{k}{k-m}}+2\right) - \log\left(A^{\frac{k}{k-m}}+1\right)\right)\right]'_m = \\ &= \log\frac{3}{2} - \log\left(1 + \frac{1}{A^{\frac{k}{k-m}+1}}\right) - \frac{A^{\frac{k}{k-m}} \log A^{\frac{k}{k-m}}}{\left(A^{\frac{k}{k-m}}+2\right)\left(A^{\frac{k}{k-m}}+1\right)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Два последних слагаемых растут с ростом $m$. Так как $A \geqslant 2$, то при $m = 0$ правая часть последнего равенства не меньше чем

$$\log\frac{3}{2} - \log\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\log 2 > 0.$$

Таким образом, производная по $m$ положительна и наименьшее значение правая часть (5) принимает при $m = 0$.

Следовательно, наименьшее значение $\exp\varphi(z_1, \dots, z_k)$ при наших условиях достигается при $z_1 = \ldots = z_k = A$ и лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть* $\{R_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ *– рекуррентная последовательность, порожденная набором* $\{r_1, \dots, r_n\}$*:* $R_0 = 1$, $R_1 = r_1, \dots, R_i = r_i R_{i-1} + R_{i-2}$ *при* $2 \leqslant i \leqslant n$. *Пусть* $r_i \geqslant 1$ *при* $1 \leqslant i \leqslant n$ *и*

$$\prod_{i=1}^{n} r_i \geqslant 2^{\frac{n-3}{2}}.$$

*Тогда* $R_n \geqslant \frac{1}{6}\left(\sqrt{2}\frac{4}{3}\right)^n$.

**Доказательство.** Получим сначала предварительную оценку снизу для $R_n$. Поскольку, очевидно, $R_{n-2} > r_{n-2}R_{n-3}$, то

$$R_{n-1} = r_{n-1}R_{n-2} + R_{n-3} < \left(r_{n-1} + \frac{1}{r_{n-2}}\right) R_{n-2}.$$

Следовательно,

$$R_n = r_n R_{n-1} + R_{n-2} > \left(r_n + \frac{1}{r_{n-1} + \frac{1}{r_{n-2}}}\right) R_{n-1}.$$

Таким образом,

$$R_n > \prod_{i=3}^{n} \left(r_i + \frac{1}{r_{i-1} + \frac{1}{r_{i-2}}}\right) R_2 =$$

$$= \prod_{i=3}^{n} \frac{r_i r_{i-1} r_{i-2} + r_i + r_{i-2}}{r_{i-1} r_{i-2} + 1} (r_1 r_2 + 1).$$

Возводя обе части этого неравенства в квадрат, получим

$$R_n^2 > \prod_{i=3}^{n} (r_i r_{i-1} r_{i-2} + r_i + r_{i-2})^2 \times$$

$$\times \prod_{i=3}^{n} \frac{1}{(r_{i-1} r_{i-2} + 1)(r_i r_{i-1} + 1)} (r_1 r_2 + 1)(r_n r_{n-1} + 1) =$$

$$= \prod_{i=3}^{n} \frac{(r_i r_{i-1} r_{i-2} + r_i + r_{i-2})^2}{r_{i-1}^2 r_i r_{i-2} + r_{i-1}(r_i + r_{i-2}) + 1} (r_1 r_2 + 1)(r_n r_{n-1} + 1).$$

При фиксированных $r_{i-1}$ и $r_i\, r_{i-2}$ функция

$$\frac{(r_i r_{i-1} r_{i-2} + r_i + r_{i-2})^2}{r_{i-1}^2 r_i r_{i-2} + r_{i-1}(r_i + r_{i-2}) + 1}$$

монотонно возрастает по переменной $r_i + r_{i-2}$. Поэтому ее наименьшее значение достигается при $r_i = r_{i-2} = \sqrt{r_i\,r_{i-2}}$. Таким образом,

$$R_n^2 > \prod_{i=3}^{n} \frac{(r_i r_{i-1} r_{i-2} + 2\sqrt{r_i r_{i-2}})^2}{(r_{i-1}\sqrt{r_i r_{i-2}} + 1)^2}(r_1 r_2 + 1)(r_n r_{n-1} + 1).$$

Следовательно,

$$R_n > \prod_{i=3}^{n} \sqrt{r_i r_{i-2}}\frac{r_{i-1}\sqrt{r_i r_{i-2}} + 2}{r_{i-1}\sqrt{r_i r_{i-2}} + 1}\sqrt{(r_1 r_2 + 1)(r_n r_{n-1} + 1)}.$$

Обозначим $z_i = r_{i-1}\sqrt{r_i r_{i-2}}$, $3 \leqslant i \leqslant n$. Имеем

$$\prod_{i=3}^{n} z_i = \prod_{i=3}^{n} r_{i-1}\sqrt{r_i r_{i-2}} = \prod_{i=3}^{n-2} r_i^2 r_2 r_{n-1}\sqrt{r_1 r_2 r_n r_{n-1}}. \tag{6}$$

Положим

$$\prod_{i=3}^{n} z_i = A^{n-2}. \tag{7}$$

Пусть $\varphi(z_3, \ldots, z_n)$ – функция такая же, как и в лемме 2. Тогда, в силу леммы 2,

$$\prod_{i=3}^{n} \frac{r_{i-1}\sqrt{r_i r_{i-2}} + 2}{r_{i-1}\sqrt{r_i r_{i-2}} + 1} = \exp\varphi(z_3, \ldots, z_n) \geqslant \begin{cases} \left(\dfrac{A+2}{A+1}\right)^{n-2}, & \text{если } A \geqslant 2, \\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-2}, & \text{если } A < 2. \end{cases}$$

Правая часть последней оценки монотонно убывает по $A$, поэтому, в силу (6),

$$\exp\varphi(z_3, \ldots, z_n) \geqslant \begin{cases} \left(\dfrac{B+2}{B+1}\right)^{n-2}, & \text{если } A \geqslant 2, \\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-2}, & \text{если } A < 2, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\prod_{i=1}^{n} r_i^2 = B^{n-2} \geqslant 2^{n-3}.$$

Таким образом, из (6) и (8) получаем

$$R_n > \prod_{i=1}^{n} r_i \exp\varphi(z_3,\dots,z_n) \geqslant \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{B}(B+2)}{B+1}\right)^{n-2}, & \text{если } \ A \geqslant 2,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}, & \text{если } \ A < 2. \end{cases}$$

Правая часть последнего неравенства монотонно возрастает по $B$, поэтому

$$R_n > \begin{cases} \left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}, & \text{если } \ A \geqslant 2,\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^{n-2}, & \text{если } \ A < 2. \end{cases}$$

В любом случае $R_n > \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{4\sqrt{2}}{3})^{n-2}$.

**3.** Теперь мы можем доказать основной результат настоящей работы.

**Теорема 1.** *Для* $p \equiv 3 \pmod 4$, $p \geqslant 91$ *имеем оценку*

$$\ell(p) < \frac{\sqrt{p}L_p(1)}{h(4p)\log\frac{4\sqrt{2}}{3}}.$$

**Доказательство.** В лемме работы [12] показано, в частности, что $\varepsilon(p)$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon(p) > R_n^2 p$, где $\{R_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ – рекуррентная последовательность, порожденная набором неполных частных $\{r_n,\dots,r_1\}$ из разложения (1). При $p > 91$ в силу лемм 1 и 3 имеем

$$\varepsilon(p) > \frac{p}{2}\left(\frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^6 \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^{2n+2} > \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^{2n+2}. \tag{9}$$

Из формулы Дирихле для числа классов получаем

$$\log\varepsilon(p) = \frac{\sqrt{p}L_p(1)}{h(4p)}.$$

Отсюда

$$\ell(p) = 2n+2 < \frac{\sqrt{p}L_p(1)}{h(4p)\log\frac{4\sqrt{2}}{3}}.$$

Теорема доказана.

Альтернативной формой теоремы 1 является нижеследующая теорема.

**Теорема 2.** *В условиях теоремы* 1 *константа Леви иррациональности* $\sqrt{p}$ *не меньше, чем* $\log \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

**Доказательство.** В работе [1] показано, что для любой квадратичной иррациональности константа Леви существует. Утверждение нашей теоремы немедленно следует из этого факта и доказательства теоремы 1, поскольку разложение квадратичной иррациональности в непрерывную дробь периодично.

**Следствие 1.** *В условиях теоремы* 1 *при* $h(4p) \neq 1$ *имеем неравенство*

$$\ell(p) < 0.554\sqrt{p}\, L_p(1).$$

**Доказательство.** Неравенство сразу следует из теоремы 1, поскольку в этом случае $h(4p) \geqslant 3$.

**Следствие 2.** *При достаточно больших* $p \equiv 3 \pmod 4$ $h(4p) = 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$\ell(p) > 0.554\sqrt{p}\, L_p(1) + O\left(p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{224}}\right).$$

*Постоянная, входящая в символ* $O$, *эффективная.*

**Доказательство.** Если $h(4p) = 1$, то, как показано в работе [3],

$$\ell(p) > \frac{7}{\pi^2}\sqrt{p}\, L_p(1) + O\left(p^{\frac{1}{2}-\frac{1}{224}}\right).$$

Поскольку $7/\pi^2 > 0.7$, то следствие доказано.

**Следствие 3.** *Для* $p \equiv 3 \pmod 4$ *и* $p > p_0$ *с эффективно вычислимым* $p_0$ *имеем*

$$\ell(p) < 0.34\sqrt{p}\log p.$$

**Доказательство.** Неравенство следует из теоремы 1 и эффективной оценки сверху для $L_p(1)$ из работы [13].

## Литература

1. H. Jager et P. Liardet, *Distributions arithmétiques des dénominateurs des convergents de fraction continues,* Indag. Math. **50** (1988), 181–197.
2. А. С. Пен, Б. Ф. Скубенко, *Оценка сверху периода квадратичной иррациональности,* Мат. заметки **5**, No. 4 (1969), 413–417.
3. Е. П. Голубева, *О длине периода квадратичной иррациональности,* Мат. сб. **123**, No. 1 (1984), 120–129.
4. Е. П. Голубева, *О числах классов вещественных квадратичных полей дискриминанта* $4p$, Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 11–36.
5. P. C. Sarnak, *Class number of indefinite binary quadratic forms. I, II,* J. Number Theory **15**, No. 2 (1982), 229–247; **21**, No. 3 (1985), 333–346.
6. C. Faivre, *Distributions of Lévy constsnts for quadratic numbers,* Acta Arithm. **61**, No. 1 (1992), 13–34.
7. M. Pollicott, *Distribution of closed geodesics on the modular surface and quadratic irrationals,* Bull. Soc. Math. France **114**, No. 4 (1986), 431–446.
8. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight,* Invent. math. **82**, No. 2 (1987), 385–401.
9. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral Maass forms,* Invent. math. **92**, No. 1 (1988), 73–90.
10. Е. П. Голубева, *Представление больших чисел тернарными квадратичными формами,* Мат. сб. **129**, No. 1 (1986), 40–54.
11. Л. А. Тахтаджян, *Асимптотическая формула для суммы длин периодов квадратичных иррациональностей дискриминанта* $D$, Зап. научн. семин. ПОМИ **91** (1979), 134–144.
12. Е. П. Голубева, *Квадратичные иррациональности с фиксированной длиной периода разложения в непрерывную дробь,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 5–30.
13. P. J. Stephens, *Optimizing the size of* $L(1,\chi)$, Proc. London Math. Soc. (3) **24** (1972), 1–14.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 9 декабря 1996 г.