Е. П. Голубева

О КВАДРАТИЧНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЯХ С КОРОТКИМИ ПЕРИОДАМИ РАЗЛОЖЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНУЮ ДРОБЬ

1. Под коротким периодом разложения в настоящей работе понимается следующее.

Пусть $d \equiv 2, 3 \pmod 4$. Разложим $\sqrt{d}$ в обыкновенную непрерывную дробь,

$$\sqrt{d} = [\, m, \overline{r_1, \ldots, r_L, m_1, r_L, \ldots, r_1, 2m}\,]. \tag{1}$$

С этим разложением ассоциируется последовательность $d(\gamma)$ вида $d(\gamma) = (A\gamma + B)^2 + (C\gamma + F)$, где коэффициенты A, B, C, $F \in \mathbb{Z}$ фиксированы и определяются набором $(r_1, \ldots, r_L, m_1)$, а $\gamma \in \mathbb{Z}$ – свободная переменная, ограниченная естественными условиями на величину: $A\gamma + B > 0$, $C\gamma + F < 2(A\gamma + B)$ (см. [1]). При этом $m(\gamma) = [\sqrt{d(\gamma)}] = A\gamma + B$ и

$$\sqrt{d(\gamma)} = [\, m(\gamma), \overline{r_1, \ldots, r_L, m_1, r_L, \ldots, r_1, 2m(\gamma)}\,]. \tag{2}$$

Пусть d_0 – наименьшее число из этой последовательности, тогда для всех остальных $d = d(\gamma)$ разложение (1) называется коротким.

Это название оправдывается тем, что в этом случае величина $\ell(\sqrt{d}) = 2L + 2$ – длина разложения (1) – фиксирована для всех γ и для $d \neq d_0$ допускает оценку $\ell(\sqrt{d}) \leqslant C_0 \log d$ с абсолютной константой C_0. Поскольку длины периодов для квадратичных иррациональностей одного дискриминанта не могут сильно отличаться друг от друга (см. [2, 3]), то все они так же будут логарифмического порядка.

Для d с короткими разложениями $\varepsilon(d)$ – основные единицы соответствующих порядков в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ – ведут себя как арифметическая прогрессия в том смысле, что если $\varepsilon(d) = P + Q\sqrt{d}$, то $P = M\gamma + N$ с фиксированными M и N (см. [1]). Соответственно, $\log \varepsilon(d) = \log \gamma + O_{d_0}(1)$. Таким образом, величина $h(d)$ – числа классов неэквивалентных форм дискриминанта $4d$ – определяется значением соответствующего L-ряда Дирихле в единичной точке.

По существующим гипотезам, восходящим еще к Гауссу (см. [4–6]), число дискриминантов с короткими разложениями таких, что $d \leqslant X$, мало по сравнению с X. Однако именно они с некоторой точки зрения представляют наибольший интерес. Точнее: во-первых, для таких d кратность собственного числа $\lambda = 1/4$ для автоморфного лапласиана на $H/\Gamma_0(4d)$ велика (H – верхняя полуплоскость, $\Gamma_0(4d)$ – конгруэнц-подгруппа); во-вторых, именно такие d дают основной вклад в количество примитивных гиперболических классов с ограниченной нормой (см. [7]).

Если взять конкретное d_0, то из разложения (2) мы получаем полную информацию обо всех приведенных иррациональностях из главного класса (если кроме $\sqrt{d(\gamma)}$ рассмотреть и разложение $-\sqrt{d(\gamma)}$). В частности, мы знаем все числа, которые по абсолютной величине не превосходят $\sqrt{d(\gamma)}$ и представляются главным классом. Отсюда сразу же вытекает нетривиальная информация о числе классов форм дискриминанта $4d(\gamma)$.

Сходная конструкция может применяться и для $D \equiv 1 \pmod 4$. Разница состоит лишь в том, что здесь надо рассматривать разложение в непрерывную дробь не $\sqrt{d}$, а $\frac{n+\sqrt{D}}{2}$, где n – нечетное, $n = [\sqrt{D}]$ или $n = [\sqrt{D}] - 1$.

В настоящей работе мы реализуем эту схему на примерах $d_0 = 3, 7$ (предложение 1) и $d_0 = \sqrt{67}$ (предложение 2).

При решении задачи о поведении средних значений констант, связанных с квадратичными полями, имеется несколько естественных способов упорядочивания. При упорядочивании по величине дискриминанта про эти средние значения известно очень немного. Например, наилучшие оценки для $\varepsilon(d)$ очень далеки от ожидаемых (см. [8, 5]).

Наибольшее число известных результатов относится к случаю упорядочивания по величине $\varepsilon(d)$ (см. [9–13]). К сожалению, при этом наиболее интересные с точки зрения арифметики вопросы остаются в стороне. Промежуточным между этими двумя способами является следующий: упорядочивание иррациональности по длине периода, а внутри множества с фиксированной длиной – по величине дискриминанта. В силу вышеизложенных причин такой способ представляется перспективным. Имеются все основания предполагать, что

$$\#\left\{d \leqslant X,\, \ell(\sqrt{d}) = k\right\} = O\left(\sqrt{X}\log X\right),$$

где $k \ll \sqrt{X}$ и константа, входящая в символ, O – абсолютная. Это очень сильная гипотеза, из которой, в частности, вытекает, что в среднем $h(d)$ имеет логарифмический порядок.

В настоящей работе это предположение проверено для $k = 12$ и простых $d \equiv 3 \pmod 4$. Случай меньших k был разобран в работах [6, 8]. Простота d используется по существу, поскольку в этом случае внутри периода (1) возникают дополнительные линейные соотношения между неполными частными r_i и m и m_1 (см. [8]).

2. Перейдем к непосредственному изложению результатов.

Предложение 1. *Пусть $n = \ell^2 - 2$ – нечетное. Тогда:* 1) *Если n не является простым, то $h(n) > 1$.* 2) *Если $2\ell - 3$ не является простым, то $h(n) > 1$. Если p – простое, $p \mid 2\ell - 3$, то $h(n) \geqslant [\log(\ell-1)/\log p] + 1$, $h(n) \geqslant 2^t(\log(\ell-1)/2\log p] + 1)$, где t – число простых делителей n.*

Пусть $n = \ell^2 + 2$ – нечетное. Тогда: 1) *Если n не является простым, то $h(n) > 1$.* 2) *Если $2\ell - 1$ не является простым, то $h(n) > 1$. Если p – простое, $p \mid 2\ell - 1$, то $h(n) \geqslant [\log(\ell-1)/\log p] + 1$, $h(n) \geqslant 2^t(\log(\ell-1)/2\log p] + 1)$, где t – число простых делителей n.*

Доказательство. В обоих случаях утверждение п. 1 очевидно. Докажем п. 2.

Пусть $n = \ell^2 - 2$. Разложим $\sqrt{n}$ в непрерывную дробь:

$$\sqrt{n} = \left[\ell - 1, \overline{1, \ell - 2, 1, 2(\ell - 1)}\right]. \tag{3}$$

Рассмотрим все приведенные формы определителя n, принадлежащие главному классу. (Напомним, что приведенной формой называется такая, для которой разложение в непрерывную дробь обоих корней является чисто периодическим.) Их положительные корни совпадают с полными частными разложения (3) и имеют вид

$$\frac{\ell - 1 + \sqrt{n}}{2\ell - 3},\ \frac{\ell - 2 + \sqrt{n}}{2},\ \frac{\ell - 2 + \sqrt{n}}{2\ell - 3},\ \ell - 1 + \sqrt{n}. \tag{4}$$

Таким образом, число $2\ell-3$ представляется формой из главного класса. Пусть простое $p \mid 2\ell-3$. Очевидно, $(p,n)=1$. Мы можем считать, что $p \leqslant \sqrt{2\ell-3}$.

Из гауссовой теории квадратичных форм следует, что тогда p представляется приведенной формой φ дискриминанта $4n$, $\varphi=(a,2b,c)$, $a>0$, $b^2-ac=n$, $b^2 \equiv n \pmod p$, $\sqrt{n}-p<b<\sqrt{n}$. Поскольку $p \leqslant \sqrt{2\ell-3}<\ell-1$, то существует форма φ_1, эквивалентная (несобственно) φ, которая имеет корень $(b+\sqrt{n})/p$. Этот корень, очевидно, не встречается среди корней (4). Отсюда следует, что $h(n) \geqslant 2$.

Пусть k – наибольшая степень такая, что $p^k \leqslant \ell-1$, $k=[\log(p-1)/\log p]$. Класс форм, которому принадлежит φ, обозначим через σ. Тогда классы $\sigma^0,\sigma^1,\dots,\sigma^k$ являются различными, поскольку в противном случае мы имели бы равенство $\sigma^r=\sigma^0$ $(0 \leqslant r \leqslant k)$, а число p^r не встречается среди знаменателей корней в (4). Таким образом, $h_0(n) \geqslant k+1$. Здесь $h_0(d)$ – число классов форм дискриминанта $4d$, эквивалентных в широком смысле (т.е. несобственно).

Наконец, для доказательства последнего утверждения п. 2 заметим, что четные степени $\sigma^0,\sigma^1,\dots,\sigma^{2[k/2]}$ принадлежат главному роду. Из тех же соображений, что и выше, мы видим, что главный род содержит, как минимум, $1+[k/2]$ различных классов. Поскольку число родов равно 2^t и $h(n)=2h_0(n)$, отсюда следует требуемое неравенство.

Случай $n=\ell^2+2$ отличается от разобранного тем, что здесь надо рассматривать разложение в непрерывную дробь второго корня формы x^2-ny^2, т.е. числа $\ell-\sqrt{n}$. Среди знаменателей полных частных этого разложения содержится число $2\ell-1$, которое играет ровно ту же роль для этого случая, что число $2\ell-3$ для случая $n=\ell^2-2$.

Следствие 1. *Пусть $p=\ell^2-2$ и $h(p)=1$ Тогда:* 1) $h(-p)=\ell-2$. 2) *Пусть $B_{(p+1)/2}$ – число Бернулли, тогда в кольце p-целых рациональных чисел имеем сравнение*

$$2B_{\frac{p+1}{2}} \equiv 2-\ell \pmod p.$$

Доказательство. Из разложения (3) вследствие формулы Хирцебруха–Загира (см. [14]) имеем

$$3h(-p)=-1+(\ell-2)-1+2(\ell-1)=3(\ell-2).$$

Отсюда следует утверждение п. 1.

По поводу п. 2 см. [15], стр. 511.

Следствие 2. *Пусть* $n = \ell^2 - 2$. *Если* $\ell = (3^{r-1} + 1)/2$, *то* $r \mid h(n)$. *Если* $2\ell - 3 = p^m$, *где* m *нечетно,* $p \neq 3$, *то* $m \mid h(n)$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что в этих случаях в группе классов форм дискриминанта $4n$ есть элемент порядка r или m соответственно.

Предложение 2. *Пусть* $n = (27\gamma + 8)^2 + 10\gamma + 3$ $(\gamma \geqslant 0)$. *Тогда:* 1) *Если* n *не является простым, то* $h(n) > 1$. 2) *Если хотя бы одно из чисел* $n_1 = 10\gamma + 3$, $n_2 = 22\gamma + 7$, $n_3 = 32\gamma + 9$ *не является простым, то* $h(n) > 1$. 3) *Если существует* $\delta \neq 2$, $\delta \mid n_1$, *или* $\delta \mid n_2$, *или* $\delta \mid n_3$, *то* $h(n) \geqslant [\log \sqrt{n} / \log \delta] + 1$. 4) *Если* $n_1 = \delta_1^{r_1}$, $(\delta_1, 3) = 1$, *или* $n_2 = \delta_2^{r_2}$, $(\delta_2, 7) = 1$, *или* $n_3 = \delta_3^{r_3}$, $(\delta_3, 3) = 1$, *то* $h(n)$ *делится на* r_1 *или* r_2 *или* r_3 *соответственно.*

Доказательство. Разложение в непрерывную дробь $\sqrt{n}$ имеет вид
$$\sqrt{n} = \left[\, 27\gamma + 8, \overline{5, 2, 1, 1, 27\gamma + 8, 1, 1, 2, 5, 54\gamma + 16}\,\right].$$

Цепочка приведенных иррациональностей, аналогичная (4), в данном случае имеет вид
$$\frac{27\gamma + 8 + \sqrt{n}}{10\gamma + 3}, \quad \frac{23\gamma + 7 + \sqrt{n}}{20\gamma + 6}, \quad \frac{17\gamma + 5 + \sqrt{n}}{22\gamma + 7}, \quad \frac{5\gamma + 2 + \sqrt{n}}{32\gamma + 9}, \quad \frac{27\gamma + 7}{2},$$
а далее знаменатели повторяются.

Утверждения пп. 1–4 можно получить так же, как аналогичные утверждения предложения 1 и следствия 2.

Замечание. Как уже говорилось во введении, в качестве исходного можно взять любое конкретное значение $\sqrt{d_0}$ со сколь угодно большой длиной разложения $2L$. (Напомним, что в предложении 1 $d_0 = 7$ и $d_0 = 3$, а в предложении 2 $d_0 = 67$.) Тогда это разложение даст, грубо говоря, $L/2$ существенно различных чисел, представимых главным классом форм дискриминанта $4d(\gamma)$.

Соответственно, если, например, $h(d(\gamma)) = 1$, то $L/2$ чисел, зависящих от γ линейно, должны быть простыми, что становится все более “невероятным” с ростом L. При этом коэффициенты многочлена $d(\gamma)$ вместе с основной единицей поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d_0})$ растут как показательная функция от L.

3. Теорема. *Имеем*

$$\# \{p \leqslant X : p \equiv 3 \pmod 4;\ \ell(p) = 12\} = O\left(\sqrt{X} \log X\right).$$

Доказательство. В работе [8] доказано, что для таких p разложение (1) имеет одну из форм:

$$\sqrt{p} = \left[r, \overline{r_1, 2r_4+1, 1, r_4, 2r_1, r, 2r_1, r_4, 1, 2r_4+1, r_1, 2r}\right], \tag{5}$$

или

$$\sqrt{p} = \left[\, r, \overline{r_1, 1, 2, 2, 2r_1+1, r, 2r_1+1, 2, 2, 1, r_1, 2r}\right], \tag{6}$$

или

$$\sqrt{p} = \left[r+1, \overline{2r_3+2, 1, r_3, 1, 1, r, 1, 1, r_3, 1, 2r_3+2, 2(r+1)}\right], \tag{7}$$

или

$$\sqrt{p} = \left[r+1, \overline{1, r_2, 1, 2r_2+2, 1, r, 1, 2r_2+2, 1, r_2, 1, 2(r+1)}\right], \tag{8}$$

или

$$\sqrt{p} = \left[r+1, \overline{2, 2, 2, 2, 1, r, 1, 2, 2, 2, 2, 2(r+1)}\right]. \tag{9}$$

Обозначим количество $p \leqslant X$ таких, что разложение $\sqrt{p}$ имеет вид (i), где $5 \leqslant i \leqslant 9$, через $N^{(i)}(X)$. Пусть $\{R_i, 0 \leqslant i \leqslant 5\}$ – рекуррентная последовательность, порожденная набором $(r_5, r_4, r_3, r_2, r_1)$, и $\{T_i, 0 \leqslant i \leqslant 4\}$ – рекуррентная последовательность, порожденная набором (r_4, r_3, r_2, r_1).

Как показано в теореме 1 из [8], в случаях (5), (6) $p = r^2 + 2a$, где

$$[\sqrt{p}] = r = \gamma R_5 - T_3 T_4, \quad a = 2\gamma\, T_4 - T_3^2, \tag{10}$$

и γ – произвольное целое такое, что r и a положительные. В случаях (7)–(9) $p = r^2 + 2a$, где $[\sqrt{p}] = r + 1$, $2r + 1 = \gamma R_5 - T_3 R_4$, $a = \gamma T_4 - T_3^2$, γ таково, что r и a положительны.

Так как $p \leqslant X$, то $r < \sqrt{X}$ и $a \leqslant 2\sqrt{X}/r_1$.

В случае (9) R_5, T_3 и T_4 – абсолютные постоянные. Значит, $\gamma = 0(\sqrt{X})$. По заданному γ p определяется однозначно. Таким образом,

$$N^{(9)}(X) = O(\sqrt{X}).$$

В случае (8) R_5 задано набором $(1, r_2, 1, 2r_2{+}2, 1)$. Следовательно, $R_5 > r_2^2$. Если $r_2 > X^{1/4}$, то из (10) видно, что γ определяется по

r_2 однозначно. Таким образом, p определяется по r_2 однозначно. Поскольку $r_2 < r = O(\sqrt{X})$, то количество таких p есть $O(\sqrt{X})$. Пусть теперь $r_2 \leqslant X^{1/4}$. Из (10) видно, что при заданном r_2 γ принимает $O(\sqrt{X}/R_5) = O(\sqrt{X}/r_2^2)$ значений. Следовательно, количество соответствующих значений p из (8) есть

$$O\biggl(\sum_{r_2 \leqslant X^{1/4}} \frac{\sqrt{X}}{r_2^2}\biggr) = O(\sqrt{X}).$$

Объединяя случаи $r_2 \leqslant X^{1/4}$ и $r_2 > X^{1/4}$, имеем

$$N^{(8)}(X) = O(\sqrt{X}).$$

Аналогично рассматриваются разложения (6), (7).

Случай (5) отличается от них тем, что здесь T_4 и R_5 зависят от двух параметров r_1 и r_4.

Из (5) имеем

$$\begin{gathered} T_1 = r_4,\ T_2 = r_4 + 1,\ T_3 = 2r_4^2 + 4r_4 + 1 = 2T_2^2 - 1, \\ T_4 = 2T_2^2\, r_1 - r_1 + T_2. \end{gathered} \tag{11}$$

Из неравенства (10) видно, что при $r_1 r_4 \leqslant X^{1/4}$ каждой паре (r_1, r_4) соответствует $O(\sqrt{X}/r_1^2\, r_4^2)$ значений γ, поскольку $T_4 \asymp r_1\, r_4^2$. Следовательно, число p из (5), $p \leqslant X$ и таких, что $r_1 r_4 < X^{1/4}$, равно

$$O\biggl(\sqrt{X} \sum_{r_1, r_4} \frac{1}{r_1^2\, r_4^2}\biggr) = O(\sqrt{X}).$$

При $r_1\, r_4 > X^{1/4}$, поскольку $T_4 \gg \sqrt{X}/r_1$, из неравенства (11) видно, что γ определяется по r_1 и r_4 однозначно. Таким образом, если $r_1 r_4 < 8\sqrt{X}$, то число соответствующих p оценивается как

$$O\biggl(\sum_{r_4 < \sqrt{X}} \frac{\sqrt{X}}{r_4}\biggr) = O\left(\sqrt{X} \log X\right),$$

так как $r_4 \leqslant r \leqslant \sqrt{X}$.

Нам осталось рассмотреть случай $r_1 r_4 > 8\sqrt{X}$. Перепишем неравенство $0 < 2T_4\gamma - T_3^2 < \sqrt{X}/r_1$ в виде

$$\frac{T_3^2}{T_4} < \gamma < \frac{T_3^2}{T_4} + \frac{2\sqrt{X}}{r_1\, T_4}.$$

Подставляя значение T_3 из (11), имеем

$$\frac{(2T_2^2-1)^2}{T_4} < \gamma < \frac{(2T_2^2-1)^2}{T_4} + \frac{2\sqrt{X}}{r_1\,T_4}.$$

Заменим отношение $(2T_2^2-1)/T_4$ на соседнюю подходящую дробь u_2/u_3, где

$$u_1 = 1,\;\; u_2 = 2(r_4+1) = 2T_2,\;\; u_3 = 2T_2\,r_1 + 1. \tag{12}$$

Поскольку $T_3\,u_3 - T_4\,u_2 = -1$, имеем

$$\frac{(2T_2^2-1)u_2}{u_3} - \frac{2T_2^2-1}{T_4\,u_3} < \gamma < \frac{(2T_2^2-1)u_2}{u_3} - \frac{2T_2^2-1}{T_4\,u_3} + \frac{2\sqrt{X}}{r_1\,T_4}.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{u_3} = \frac{1}{2T_2r_1+1} < \frac{1}{2T_2r_1},$$

следовательно,

$$\frac{2T_2^2-1}{T_4u_3} < \frac{2T_2^2}{2T_2T_4r_1} < \frac{2\sqrt{X}}{r_1T_4},$$

так как $T_2 = r_4 + 1 < 2\sqrt{X}$. Подставляя значения u_2 и u_3 из (12), получим

$$\frac{-2\sqrt{X}(2T_2r_1+1)}{r_1T_4} < \gamma(2T_2r_1+1) - 2T_2(2T_2^2-1) < \frac{2\sqrt{X}(2T_2r_1+1)}{r_1T_4}.$$

С учетом явного выражения для T_4 для правой части имеем оценку

$$\frac{2\sqrt{X}(2T_2r_1+1)}{r_1T_4} < \frac{8\sqrt{X}T_2}{T_4} < \frac{8\sqrt{X}T_2}{T_2^2\,r_1} < 1,$$

поскольку $T_2\,r_1 > 8\sqrt{X}$. Таким образом,

$$\gamma(2T_2\,r_1+1) - 2T_2(2T_2^2-1) = 0.$$

Следовательно, $\gamma = 2T_2\,\gamma_1$ и

$$\gamma_1(2T_2\,r_1+1) - 2T_2^2 + 1 = 0.$$

Поскольку $\gamma_1 \equiv -1 \pmod{2T_2}$, то $\gamma_1 = 2T_2\,\gamma_2 - 1$, где $\gamma_2 \geqslant 1$ и

$$(2T_2\,\gamma_2 - 1)(2T_2\,r_1+1) = 2T_2^2 - 1.$$

Из неравенства $r_1 r_4 > 8\sqrt{X}$ следует, что $r_1 > 8$, поскольку $r_4 < \sqrt{X}$. При таких значениях r_1 последнее равенство не может иметь места, поскольку его левая часть больше, чем $16T_2^2$.

Таким образом, случай $r_1 r_4 > 8\sqrt{X}$ в действительности не реализуется.

Теорема доказана.

Литература

1. Е. П. Голубева, *Квадратичные иррациональности с фиксированной длиной периода разложения в непрерывную дробь,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 5–30.
2. А. С. Пен, Б. Ф. Скубенко, *Оценка сверху периода квадратичной иррациональности,* Мат. заметки **5**, No. 4 (1969), 413–417.
3. Е. П. Голубева, *О длине периода квадратичной иррациональности,* Мат. сб. **123**, No. 1 (1984), 120–129.
4. P. C. Sarnak, *Class number of indefinite binary quadratic forms. I, II,* J. Number Theory **15**, No. 2 (1982), 229–247; **21**, No. 3, (1985), 333–346.
5. C. Hooly, *On the Pellian equation and the class number of indefinite binary quadratic forms,* J. reine und angew. Math. **353** (1984), 98–131.
6. Е. П. Голубева, *О неопределенных бинарных квадратичных формах с большим числом классов,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 13–21.
7. Е. П. Голубева, *Распределение норм примитивных гиперболических классов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 40–45.
8. Е. П. Голубева, *О числах классов вещественных квадратичных полей дискриминанта 4p,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 11–36.
9. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series,* J. Indian Math. Soc. **20**, No. 1–3 (1956), 47–87.
10. Н. В. Кузнецов, *Распределение норм примитивных гиперболических классов модулярной группы и асимптотические формулы для собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами на фундаментальной области модулярной группы,* Докл. АН СССР **42**, No. 1 (1970), 40–43.
11. H. Jager et P. Liardet, *Distributions arithmétiques des dénominateurs des convergents de fraction continues,* Indag. Math. **50** (1988), 181–197.
12. C. Faivre, *Distributions of Lévy constsnts for quadratic numbers,* Acta Arithm. **61**, No. 1 (1992), 13–34.
13. M. Policott, *Distribution of closed geodesics on the modular surface and quadratic irrationals,* Bull. Soc. Math. France **114**, No. 4 (1986), 431–446.
14. D. B. Zagier, *Nombre de classes et fractions continues,* Astérisque **24–25** (1975), 81–97.
15. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* Наука, М., 1964.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 9 декабря 1996 г.