Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ $F(Z_0)$ В ОДНОМ КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Посвящается
90-летию со дня рождения
моего отца, Г. М. Голузина

Настоящая работа продолжает исследования в [1, 2], посвященные нахождению множеств значений систем функционалов на классе T_R типично вещественных функций. В данной работе находится множество значений системы $\{f(z_0), f(r), f''(0)/2\}$ (при фиксированных z_0 и r) на этом классе. В качестве следствия находится множество значений $f(z_0)$ на классе функций из T_R с фиксированными значениями $f(r)$ и $f''(0)$.

1. Как обычно, T_R – класс функций вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \tag{1}$$

регулярных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} f(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$, $\operatorname{Im} f(z) = 0$ при $\operatorname{Im} z = 0$.

Для класса T_R известно [3, 4] интегральное представление:

$$f(z) \in T_R \Longleftrightarrow f(z) = \int_{-1}^{1} s(z,t)\,d\alpha(t),\ \ \alpha(t) \in M_1, \tag{2}$$

где $s(z,t) = z(1 - 2tz + z^2)^{-1}$, M_1 – класс неубывающих на $[-1,1]$ функций $\alpha(t)$ с $\int_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$.

Хорошо известно, что

$$T_R \supset S_R \quad \text{и} \quad T_R = \overline{\mathrm{co}}\, S_R,$$

где S_R – класс регулярных и однолистных в круге E функций $f(z)$ вида (1) с вещественными коэффициентами $c_2, c_3, \ldots, \overline{\mathrm{co}}\, S_R$ –

замкнутая выпуклая оболочка этого класса. Функция $s(z,t)$ при $-1 \leqslant t \leqslant 1$ принадлежит классу S_R, $s(z,\pm 1) = z(1 \mp z)^{-2}$ – функции Кёбе.

Параметрическое представление (2) ($\alpha(t)$ – параметр) использовалось во многих работах. Опираясь на это представление, Г. М. Голузин [4] решил в классе T_R ряд задач, экстремальными функциями которых оказались лишь функции $s(z,t)$. В [5] Г. М. Голузин получил вариационные формулы для классов функций, представимых интегралом Стилтьеса, которые позволили решить в классе T_R более общие задачи, экстремальные функции которых имеют вид

$$f(z) = \lambda_1 s(z,t_1) + \lambda_2 s(z,t_2),\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

и могут не принадлежать классу S_R, если $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Пусть $T_R^{(j)}$, $j = 1,2,3$, – класс функций $f(z) \in T_R$, удовлетворяющих условию (j), где

(1) $c_2 = b$ (b – константа, $-2 < b < 2$);

(2) $f(r) = a$ (r и a – константы, $0 < r < 1$, $r(1+r)^{-2} < a < r(1-r)^{-2}$);

(3) $c_2 = b$, $f(r) = a$ (b, r, a – константы, $0 < r < 1$, $-2 < b < 2$, $b + \rho > a(\rho^2 - 4)$, $a(\rho - b) > 1$; здесь и ниже, $\rho = r + 1/r$).

Пусть

$$D_j = \{f(z_0) : f \in T_R^{(j)}\}, \quad j = 1,2,3,$$

где z_0 – фиксированная точка круга E, и пусть $\zeta = z_0 + 1/z_0$.

Множество значений функционала $f(z_0)$ на классе T_R нашел Рогозинский [6]. В случае $z_0 = r_0 \neq 0$, $-1 < r_0 < 1$, оно представляет собой отрезок прямой, соединяющий точки $s(r_0, \pm 1)$. В случае $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ это множество есть круговой сегмент, ограниченный дугой $w = s(z_0, t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, и хордой, стягивающей концы этой дуги.

Точная оценка $|c_n| \leqslant n$, $n \geqslant 2$, в классе T_R получена Рогозинским в [6], знак равенства достигается только для функций $s(z, \pm 1)$. Точные оценки для c_n снизу в случае нечетных n дал С. А. Гельфер [7].

Дж. Дженкинс [8], опираясь на представление (2) и лемму Неймана-Пирсона из теории статистики, получил в классе T_R точные оценки для $f(r)$ в зависимости от c_2:

$$r(1 - c_2 r + r^2)^{-1} \leqslant f(r) \leqslant r(1 + c_2 r + r^2)(1 - r^2)^{-2},\ 0 < r < 1. \quad (3)$$

Этим Дженкинс нашел множество D_1 в случае $\operatorname{Im} z_0 = 0$. В случае $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ множество D_1 найдено Ю. Е. Аленицыным [9]: D_1 – выпуклая круговая луночка, ограниченная соединяющими точки $\frac{1}{\zeta - b}$ и $\frac{\zeta + b}{\zeta^2 - 4}$ дугами окружностей, одна из которых проходит через точку $\frac{1}{\zeta + 2}$, другая – через точку $\frac{1}{\zeta - 2}$. При этом Ю. Е. Аленицын опирался на представление (2) и полученные им результаты о множестве значений систем функционалов в классах функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса. В [9] установлен и более общий результат: показано, что множество значений системы $\{f(z_0), c_2\}$ на классе T_R в случае $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ представляет собой тело в $\mathbb{R}^3$, ограниченное двумя конкретными коническими поверхностями.

Множество D_2 найдено автором в [2]: в случае $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ это множество – выпуклая круговая луночка, ограниченная дугами окружностей, соединяющими точки $(\zeta - \rho + a^{-1})^{-1}$ и $[\zeta - \rho + a(\rho^2 - 4)](\zeta^2 - 4)^{-1}$, причем окружности, содержащие эти дуги, проходят соответственно через точки $\frac{1}{\zeta + 2}$ и $\frac{1}{\zeta - 2}$. В [2] найдено также множество значений системы $\{f(z_0), f(r)\}$ на классе T_R.

Экстремальным задачам в классе T_R посвящен ряд других работ. Мы остановились здесь лишь на некоторых результатах, тесно связанных с исследованием на классе T_R множества значений системы функционалов вида

$$\{f^{(n)}(z_k)\} \quad (k = 1, 2, \ldots, m;\ n = 0, 1, 2, \ldots, n_k) \tag{4}$$

при произвольных фиксированных точках z_k из E, $z_k \neq z_j$ при $k \neq j$.

При нахождении множества значений системы $\{f(z_0), f(r), c_2\}$ на классе T_R, определяемого в данной работе, мы будем опираться на представление (2) и теоремы из теории моментов [10, 11], обобщающие результаты Каратеодори–Теплица и Ф. Рисса для C-функций Каратеодори. Таким способом в [1] исследовано множество значений системы (4) на классе T_R, а в работе [2] найдено множество D_2.

2. Пусть D – множество значений системы $\{f(z_0), f(r), c_2\}$ на классе T_R при фиксированных z_0 и r из E, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, $0 < r < 1$.

Положим

$$f(z_0) = w = x_1 + ix_2,\ f(r) = x_3,\ c_2 = x_4,\ \zeta = z_0 + z_0^{-1},\ \rho = r + r^{-1}.$$

Имеет место

Теорема 1. *Множество значений D представляет собой множество точек $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющих следующей системе неравенств:*

$$x_3 \geqslant 0, \;\; x_3(\rho - x_4) \geqslant 1, \;\; x_4 + \rho + x_3(4-\rho^2) \geqslant 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &|w|^2|\zeta^2-4|^2 + |\zeta-\rho|^2 + x_3(4-\rho^2)(\rho - x_4 - 2\operatorname{Re}\zeta) - \\ &\quad - 2\operatorname{Re}\{w(\zeta^2-4)[(\rho + x_4 + x_3(4-\rho^2))(\rho-\bar\zeta)(\zeta-\bar\zeta)^{-1} - \\ &\qquad - (\rho - \bar\zeta + x_3(4-\rho^2))]\} \leqslant 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &|w|^2[x_3|\zeta-\rho|^2 + 2\operatorname{Re}\zeta - \rho - x_4] + x_3 - \\ &\quad - 2\operatorname{Re}\{w[x_3(\zeta - x_4) + (\bar\zeta-\rho)(1 + x_3(x_4-\rho))(\bar\zeta-\zeta)^{-1}]\} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1 будет дано ниже.

Пусть $f(r) = a$, $c_2 = b$, a и b – константы. В силу неравенства (3), a и b удовлетворяют условиям

$$b + \rho \geqslant a(\rho^2-4), \quad a(\rho - b) \geqslant 1, \quad -2 < b < 2.$$

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Множество значений D_3 функционала $f(z_0)$ на классе $T_R^{(3)}$ в случае $b+\rho > a(\rho^2-4)$, $a(\rho-b) > 1$, $-2 < b < 2$ является выпуклой круговой луночкой: $D_3 = \Delta_1^{(r)} \cap \Delta_2^{(r)}$, где*

$$\Delta_j^{(r)} = \{w : |w - O_j^{(r)}| \leqslant R_j^{(r)}\}, \quad j = 1, 2,$$

$$O_1^{(r)} = \frac{\zeta - \rho + a(\rho^2-4)}{\zeta^2-4} + \frac{(\zeta-\rho)[\rho + b - a(\rho^2-4)]}{(\zeta^2-4)(\zeta-\bar\zeta)},$$

$$R_1^{(r)} = \frac{|\zeta-\rho|[\rho+b-a(\rho^2-4)]}{2|\operatorname{Im}\zeta|\cdot|\zeta^2-4|},$$

$$O_2^{(r)} = \frac{1}{\zeta-b} + \frac{(\bar\zeta-\rho)(\bar\zeta-b)[1+a(b-\rho)]}{(\zeta-b)(\zeta-\bar\zeta)\varkappa_r},$$

$$R_2^{(r)} = \frac{|\zeta-\rho|[a(\rho-b)-1]}{2|\operatorname{Im}\zeta|\varkappa_r}, \quad \varkappa_r = |\zeta-\rho|^2 a + 2\operatorname{Re}\zeta - \rho - b.$$

В случаях $\rho + b = a(\rho^2-4)$ или $a(\rho-b) = 1$ множество D_3 вырождается соответственно в точку $\frac{\zeta+b}{\zeta^2-b}$ или в точку $\frac{1}{\zeta-b}$.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что точкам дуги $C_j^{(r)} = \partial D_3 \cap \partial\Delta_j^{(r)}$, $j = 1, 2$, соответствуют функции $f_j^{(r)}(z,t)$ вида:

$$f_1^{(r)}(z,t) = z\frac{1-\rho z+z^2}{(1-z^2)^2}\left[1+\frac{(\rho+b)z}{1-2tz+z^2}\right]+ \\ +\frac{a(\rho^2-4)(\rho-2t)z^3}{(1-z^2)^2(1-2tz+z^2)}$$

при $\frac{1}{2}(\rho-\alpha_1) \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(\rho-\alpha_2)$, где

$$\alpha_1 = \frac{2-b}{1-a(\rho-2)}, \quad \alpha_2 = \frac{2+b}{a(\rho+2)-1};$$

$$f_2^{(r)}(z,t) = \frac{z\{1-[\rho+a(\rho-2t)\beta_1]z+z^2\}}{(1-2tz+z^2)[1-(\rho+\beta_1)z+z^2]}$$

при $-1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}(\rho-\alpha_1)$, где $\beta_1 = \frac{b-2t}{1+a(2t-\rho)}$. Функции $f_j^{(r)}(z,t)$ принадлежат классу $T_R^{(3)}$ и могут быть записаны в виде:

$$f_1^{(r)}(z,t_1) = \lambda_1 s(z,-1)+\mu_1 s(z,1)+(1-\lambda_1-\mu_1)s(z,t_1),$$
$$f_2^{(r)}(z,t_2) = \lambda_2 s(z,t_2)+(1-\lambda_2)s(z,\tau),$$

причем $\lambda_1 \geqslant 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 > 0$, $-1 < t_1 < 1$, $-1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$ и выполняются условия

$$-\lambda_1+\mu_1+(1-\lambda_1-\mu_1)t_1 = b/2, \quad \frac{\lambda_1}{\rho+2}+\frac{\mu_1}{\rho-2}+\frac{1-\lambda_1-\mu_1}{\rho-2t_1} = a_1,$$

$$\lambda_2 t_2+(1-\lambda_2)\tau = b/2, \quad \frac{\lambda_2}{\rho-2t_2}+\frac{1-\lambda_2}{\rho-2\tau} = a.$$

Точки $w_j^{(r)} = \frac{\zeta-\rho+a\alpha_j[\rho+(-1)^j 2]}{(\zeta-\rho+\alpha_j)[\zeta+(-1)^j 2]}$, $j = 1, 2$, – вершины луночки D_3 и им соответствуют функции $f_j^{(r)}(z)$:

$$f_1^{(r)}(z) = f_2^{(r)}(z,1) \equiv f_1^{(r)}\left(z, \frac{\rho-\alpha_1}{2}\right),$$

$$f_2^{(r)}(z) = f_2^{(r)}(z,-1) \equiv f_1^{(r)}\left(z, \frac{\rho-\alpha_2}{2}\right).$$

Окружность, содержащая дугу $C_1^{(r)}$, проходит через точки $\frac{\zeta+b}{\zeta^2-4}$, $\frac{\zeta-\rho+a(\rho^2-4)}{\zeta^2-4}$, $w_1^{(r)}$, $w_2^{(r)}$. Окружность, содержащая дугу $C_2^{(r)}$, проходит через точки $\frac{1}{\zeta-b}$, $\frac{1}{\zeta-\rho+\frac{1}{a}}$, $w_1^{(r)}$, $w_2^{(r)}$.

Пусть $T_R(1,a,b)=\{f(z)\in T_R : f(1-)\leqslant a, c_2=b\}$, где $a>(2-b)^{-1}$, $|b|<2$, и пусть $D_3(1,a,b)$ – множество значений функционала $f(z_0)$ на классе $T_R(1,a,b)$. Имеем

Следствие 1.

$$D_3(1,a,b)=\Delta_1^{(1)}\cap\Delta_2^{(1)}, \tag{8}$$

где

$$\Delta_j^{(1)}=\{w:|w-O_j^{(1)}|\leqslant R_j^{(1)}\},\quad j=1,2,$$
$$O_1^{(1)}=\frac{\zeta-\bar\zeta+2+b}{(\zeta+2)(\zeta-\bar\zeta)},\quad R_1^{(1)}=\frac{2+b}{2|\operatorname{Im}\zeta|\,|\zeta+2|},$$
$$O_2^{(1)}=\frac{1}{\zeta-b}-\frac{(\bar\zeta-2)(\bar\zeta-b)[a(2-b)-1]}{(\zeta-b)(\zeta-\bar\zeta)\varkappa_1},$$
$$R_2^{(1)}=\frac{|\zeta-2|[a(2-b)-1]}{2|\operatorname{Im}\zeta|\varkappa_1},\quad \varkappa_1=a|\zeta-2|^2+2\operatorname{Re}\zeta-2-b.$$

Точкам множества $D_3(1,a,b)\cap\partial\Delta_1^{(1)}$ соответствуют функции

$$f_1^{(1)}(z,t)=\frac{z}{(1+z)^2}\,\frac{1+(2+b-2t)z+z^2}{1-2tz+z^2}\ \textit{при}\ \frac{b}{2}\leqslant t\leqslant t_1, \tag{9}$$

где $t_1=1-(2+b)[2(4a-1)]^{-1}$.

Точкам множества $D_3(1,a,b)\cap\partial\Delta_2^{(1)}$ соответствуют функции

$$f_2^{(1)}(z,t)=\frac{z\{1-2[1+a(1-t)\psi(t)]z+z^2\}}{(1-2tz+z^2)\{1-[2+\psi(t)]z+z^2\}}\ \textit{при}\ -1\leqslant t\leqslant\frac{b}{2}, \tag{10}$$

где $\psi(t)=(b-2t)[1-2a(1-t)]^{-1}$.

Доказательство. Полагая в теореме 2 $r\to 1$, получаем представление (8).

При $r\to1$ имеем $\alpha_1\to 2-b$, $w_1^{(r)}\to w_1^{(1)}=\frac{1}{\zeta-b}$, $C_1^{(r)}\to C_1^{(1)}\equiv\partial D_3(1,a,b)\cap\partial\Delta_1^{(1)}$, $f_1^{(r)}(z,t)\to f_1^{(1)}(z,t)$, $f_1^{(r)}(z)\to f_1^{(1)}(z)=\frac{z}{1-bz+z^2}$. Нетрудно проверить, что функции (9) и (10) принадлежат классу $T_R(1,a,b)$ и соответствуют точкам на $\partial D_3(1,a,b)$.

Полагая в следствии 1 $a=1$, $b=0$, получаем

Следствие 2. *$D_3(1,1,0)=\Delta_1\cap\Delta_2$, где*

$$\Delta_1=\left\{w:\left|w-\left(1-\frac{i}{\operatorname{Im}\zeta}\right)\frac{1}{\zeta+2}\right|\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta||\zeta+2|}\right\},$$

$$\Delta_2=\left\{w:\left|w-\frac{\bar\zeta+i(\zeta-2)/(2\operatorname{Im}\zeta)}{2-2\operatorname{Re}\zeta+|\zeta|^2}\right|\leqslant\right.$$
$$\left.\leqslant\frac{|\zeta-2|}{2|\operatorname{Im}\zeta|(2-2\operatorname{Re}\zeta+|\zeta|^2)}\right\}.$$

Точкам множества $D_3(1,1,0)\cap\partial\Delta_1$ соответствуют функции

$$f_1(z,t)=\frac{z}{(1+z)^2}\,\frac{1+2(1-t)z+z^2}{1-2tz+z^2},\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{2}{3},$$

а точкам множества $D_3(1,1,0)\cap\partial\Delta_2$ – функции

$$f_2(z,t)=\frac{z[1-2(2t^2-1)(2t-1)^{-1}z+z^2]}{(1-2tz+z^2)[1-2(t-1)(2t-1)^{-1}z+z^2]},$$

$-1\leqslant t\leqslant 0$.

3. Доказательство теоремы 1. В силу (2), для системы $\{f(z_0), f(r), c_2\}$ имеем представление

$$f(z_0)=\int_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\zeta-2t},\quad f(r)=\int_{-1}^{1}\frac{d\alpha(t)}{\rho-2t},\quad c_2=\int_{-1}^{1}2t\,d\alpha(t),\quad \alpha\in M_1, \tag{11}$$

при $\rho=r+1/r$, $\zeta=z_0+1/z_0$. Из (11) следует, что D – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^4$.

Известен следующий результат (см. теорему 1.1 в [11, стр. 84–85]).

Для того, чтобы имело место представление (11), *необходимо и достаточно, чтобы при выполнении неравенства*

$$\varphi(t)\equiv\operatorname{Re}[\delta_0+\delta_1(\zeta-2t)^{-1}+\delta_2(\rho-2t)^{-1}+\delta_3 t]\geqslant 0 \tag{12}$$

для всех $t\in[-1,1]$ и некоторых комплексных чисел $\delta_0\neq 0$, δ_1, δ_2, δ_3, выполнялось бы и неравенство

$$H\equiv\operatorname{Re}[\delta_0+\delta_1 f(z_0)+\delta_2 f(r)+\delta_3\frac{c_2}{2}]\geqslant 0. \tag{13}$$

Замечая, что $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, запишем (12) в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_4(t)}{(\rho - 2t)|\zeta - 2t|^2} \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{14}$$

где $A_4(t)$ – алгебраический многочлен 4-ой степени. По теореме Маркова–Лукача (см. [11, стр. 89]), $A_4(t)$ допускает представление

$$A_4(t) = (1 - t^2)(X_0 + X_1 t)^2 + (Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2)^2, \tag{15}$$

где X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2 – некоторые вещественные числа.

Подставим (15) в левую часть неравенства (14):

$$\varphi(t) = \frac{1 - t^2}{\rho - 2t}\left|\beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta - 2t}\right|^2 + \frac{1}{\rho - 2t}\left|\gamma_0 + \gamma_1 t + \frac{\gamma_2}{\zeta - 2t}\right|^2.$$

Запишем $\varphi(t)$ в виде:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = &\left(\frac{t}{2} + \frac{\rho}{4} + \frac{1 - \rho^2/4}{\rho - 2t}\right)|\beta_0|^2 + \\
&+ 2\operatorname{Re}\left\{\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{\zeta - \rho}\left(\frac{1 - \rho^2/4}{\rho - 2t} - \frac{1 - \zeta^2/4}{\zeta - 2t}\right)\right]\bar{\beta}_0\beta_1\right\} + \\
&+ \left\{\frac{1 - \rho^2/4}{(\rho - 2t)|\zeta - \rho|^2} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\zeta - 2t}\frac{1 - \zeta^2/4}{(\rho - \zeta)(\bar{\zeta} - \zeta)}\right]\right\}|\beta_1|^2 + \\
&+ \frac{1}{\rho - 2t}|\gamma_0|^2 + \left(-\frac{\rho}{4} - \frac{t}{2} + \frac{\rho^2/4}{\rho - 2t}\right)|\gamma_1|^2 + \\
&+ \left\{\frac{1}{(\rho - 2t)|\zeta - \rho|^2} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\zeta - 2t}\cdot\frac{1}{(\rho - \zeta)(\bar{\zeta} - \zeta)}\right]\right\}|\gamma_2|^2 + \\
&+ 2\operatorname{Re}\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\rho/2}{\rho - 2t}\right)\gamma_0\bar{\gamma}_1\right] + \\
&+ 2\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\rho - \zeta}\left(\frac{1}{\zeta - 2t} - \frac{1}{\rho - 2t}\right)\bar{\gamma}_0\gamma_2\right\} + \\
&+ 2\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\zeta - \rho}\left(\frac{\rho/2}{\rho - 2t} - \frac{\zeta/2}{\zeta - 2t}\right)\bar{\gamma}_1\gamma_2\right\},
\end{aligned}$$

где $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ – некоторые комплексные числа, зависящие от X_k, Y_k.

В силу неравенств (12), (13), из неравенства $\varphi(t) \geqslant 0$ следует неотрицательность квадратичной формы H, т.е. неравенство

$$\begin{aligned} H = A_{00}|\beta_0|^2 + A_{11}|\beta_1|^2 + 2\operatorname{Re}(\beta_0\bar\beta_1 A_{01}) + B_{00}|\gamma_0|^2 + B_{11}|\gamma_1|^2 + \\ + B_{22}|\gamma_2|^2 + 2\operatorname{Re}(\gamma_0\bar\gamma_1 B_{01}) + 2\operatorname{Re}(\gamma_0\bar\gamma_2 B_{02}) + \\ + 2\operatorname{Re}(\gamma_1\bar\gamma_2 B_{12}) \geqslant 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$A_{00} = \frac{1}{4}[c_2 + \rho + (4-\rho^2)f(r)],$$

$$A_{11} = \frac{(4-\rho^2)f(r)}{4|\zeta-\rho|^2} + \operatorname{Re}\frac{(4-\zeta^2)f(z_0)}{2(\rho-\zeta)(\bar\zeta-\zeta)},$$

$$A_{01} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4(\bar\zeta-\rho)}[(4-\rho^2)f(r) - (4-\bar\zeta^2)\overline{f(z_0)}],$$

$$B_{00} = f(r), \quad B_{11} = \frac{1}{4}[\rho^2 f(r) - \rho - c_2],$$

$$B_{22} = \frac{f(r)}{|\zeta-\rho|^2} + 2\operatorname{Re}\frac{f(z_0)}{(\rho-\zeta)(\bar\zeta-\zeta)},$$

$$B_{01} = \frac{\rho f(r) - 1}{2}, \quad B_{02} = \frac{\overline{f(z_0)} - f(r)}{\rho - \bar\zeta},$$

$$B_{12} = \frac{\rho f(r) - \bar\zeta\overline{f(z_0)}}{2(\bar\zeta-\rho)},$$

$$B_{10} = B_{01}, \quad B_{20} = \bar B_{02}, \quad B_{21} = \bar B_{12}.$$

Неотрицательность квадратичной формы в (16) равносильна неотрицательности всех главных миноров матриц

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} \\ B_{20} & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

т.е. выполнению неравенств (5)–(7). Теорема 1 доказана.

Литература

1. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций,* Вестн. ЛГУ No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
2. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.

3. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically real functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
4. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях,* Мат. сб. **27(69)** , No. 2 (1950), 201–218.
5. Г. М. Голузин, *Об одном методе вариаций в теории аналитических функций,* Учен. записки ЛГУ **144** (1952), 85–101.
6. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen,* Math. Z. **35**, No. 1 (1932), 93–121.
7. С. А. Гельфер, *О типично вещественных функциях порядка p,* Мат. сб. **35**, No. 2 (1954), 193–214.
8. J. A. Jenkins, *Some problems for typically real functions,* Canad. J. Math. **13**, No. 2 (1961).
9. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса,* Вестник ЛГУ No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.
10. Н. Ахиезер, М. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов,* Харьков, 1938.
11. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи,* М., 1973.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 июня 1997 г.