В. Н. Дубинин

АСИМПТОТИКА МОДУЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ КОНДЕНСАТОРА И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

**Посвящается
90-летию со дня рождения
Г. М. Голузина**

Пусть B – область комплексной сферы $\overline{\mathbf{C}}_z$, имеющая функцию Грина, и пусть z_0 – некоторая конечная точка этой сферы. Рассмотрим конденсатор

$$C(r, B) = (\overline{\mathbf{C}}_z \setminus B,\ \{z : |z - z_0| \leqslant r\},$$

где $r > 0$ достаточно мало. При $r \to 0$ вторая пластина конденсатора вырождается в точку, и для модуля конденсатора $C(r, B)$ справедлива асимптотическая формула

$$|C(r, B)| = -\frac{1}{2\pi} \log r + M(B, z_0) + o(1), \quad r \to 0. \tag{1}$$

Константа $M(B, z_0)$ называется приведенным модулем области B относительно точки z_0. Известны многочисленные приложения формулы (1) в геометрической теории функций, инициированные монографией Хеймана [1] и связанные прежде всего с применением метода симметризации. В данной работе изучается асимптотика обобщенного конденсатора, состоящего из нескольких пластин, причем потенциальная функция этого конденсатора может принимать значения разных знаков. Тем самым мы продолжаем исследования, начатые нами ранее в статьях [2, 3]. В §1 мы получим аналог формулы (1) в весьма общем случае. Во втором параграфе будут даны некоторые приложения, связанные с применением разделяющего преобразования и диссимметризации [4]. Мы ограничимся в основном задачами, экстремальная конфигурация

Работа выполнена при финансовой поддержке российского фонда фундаментальных исследований (грант 96–01–00007).

в которых обладает n-кратной симметрией. Будут получены неравенства для комплексных чисел, функций Грина, внутренних радиусов и теоремы искажения в теории однолистных функций.

§1. Асимптотическая формула

Всюду ниже B – открытое множество на $\overline{\mathbf{C}}_z$, дополнение которого $E_0 = \overline{\mathbf{C}}_z \setminus B$ имеет положительную гармоническую меру [5]. Пусть z_l, $l = 1, \dots, m$, – различные точки множества B; δ_l, $l = 1, \dots, m$, – произвольные вещественные числа, отличные от нуля, и пусть m_l, ν_l, $l = 1, \dots, m$, – произвольные положительные числа. Введем следующие обозначения: $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\psi_l\}$, $\psi_l = \psi_l(r) \equiv \mu_l r^{\nu_l}$, $l = 1, \dots, m$; $E(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$ в случае конечной точки z_0 и $E(z_0, r) = \{z : |z| \geqslant 1/r\}$ в случае $z_0 = \infty$, $r > 0$. Здесь и ниже, если не оговорено противное, символы $\{\ \}$, Σ и Π означают соответственно совокупность, суммирование и произведение по всевозможным индексам, указанным в контексте, за исключением тех, при которых слагамое в Σ либо равно ∞, либо неопределено, а сомножитель в произведении равен либо нулю, либо ∞. При достаточно малом $r > 0$ определим обобщенный конденсатор как упорядоченную совокупность

$$C(r, B, Z, \Delta, \Psi) = \left\{E_0, E(z_1, \psi_1(r)), \dots, E(z_m, \psi_m(r)\right\}$$

с предписанными значениями соответственно $0, \delta_1, \dots, \delta_m$. По аналогии с обычными конденсаторами, модулем конденсатора $C(r; B, Z, \Delta, \Psi)$ назовем величину

$$|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| = \sup \left\{1 / \iint\limits_{\mathbf{C}_z} |\Delta v|^2 \, dx dy\right\},$$

где верхняя грань берется по всем вещественнозначным функциям $v(z)$, непрерывным на $\overline{\mathbf{C}}_z$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки и таким, что $v(z) = 0$ в окрестности множества E_0 и $v(z) = \delta_l$ на $E(z_l, \psi_l(r))$, $l = 1, \dots, m$ (здесь $1/0 = +\infty$). Приведенным модулем множества B относительно совокупностей Z, Δ и Ψ назовем предел[1)]

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) = \lim_{r \to 0} \left(|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r\right), \tag{2}$$

[1)] Обозначения в данной работе несколько отличны от [2].

где $\nu = (\Sigma\,\delta_l^2\nu_l^{-1})^{-1}$. В случае $\psi_l(r) \equiv r$, $l = 1, \dots, m$, вместо $M(B, Z, \Delta, \Psi)$ будем писать $M(B, Z, \Delta)$. Ниже будет показано, что указанный предел всегда существует и конечен, а пока заметим, что непосредственно из определения приведенного модуля вытекает важное свойство монотонности:

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) \leqslant M(B', Z, \Delta, \Psi)$$

для любых $Z = \{z_l\}$, $z_l \in B \subset B'$, $l = 1, \dots, m$ и любых Δ, Ψ. Введем вспомогательные множества $\widetilde{E}(z_l, r)$, $l = 1, \dots, m$, как произвольные замкнутые множества на $\overline{\mathbf{C}}_z$, удовлетворяющие условию

$$E(z_l, \psi_l(r_1)) \subset \widetilde{E}(z_l, r) \subset E(z_l, \psi_l(r_2)), \ \ l = 1, \dots, m \tag{3}$$

при некоторых непрерывных положительных $r_j = r_j(r) \sim r$, $r \to 0$, $0 < r < r_0$, $j = 1, 2$. Обобщенный конденсатор, определенный как и выше, но с заменой $E(z_l, \psi_l(r))$ на $\widetilde{E}(z_l, r)$, обозначим через $\widetilde{C}(r, B, Z, \Delta, \Psi)$.

Лемма 1. *Если при некоторых $\widetilde{E}(z_l, r)$, $l = 1, \dots, m$, существует предел*

$$\lim_{r\to 0}\left(|\widetilde{C}(r; B, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi}\log r\right), \tag{4}$$

то существует равный ему предел (2) и, наоборот, если существует предел (2), то существует равный ему предел (4) для любых $\widetilde{E}(z_l, r)$, $l = 1, \dots, m$.

Доказательство. Покажем сначала существование предела (2). Ввиду непрерывности для любого достаточно малого $r > 0$ существуют такие r' и r'', что $r_2(r') = r = r_1(r'')$. Учитывая (3), имеем $\widetilde{E}(z_l, r') \subset E(z_l, \psi_l(r)) \subset \widetilde{E}(z_l, r'')$, $l = 1, \dots, m$.

Из определения модуля конденсатора следует

$$|\widetilde{C}(r'; B, Z, \Delta, \Psi)| \geqslant |\widetilde{C}(r; B, Z, \Delta, \Psi)| \geqslant |\widetilde{C}(r''; B, Z, \Delta, \Psi)|. \tag{5}$$

Заметим, что $r = r_2(r') \sim r'$, $r = r_1(r'') \sim r''$ при $r \to 0$. Прибавляя ко всем частям неравенств (5) $\frac{\nu}{2\pi}\log r$, а к левой и правой частям соответственно $\pm\frac{\nu}{2\pi}\log r'(\pm\frac{\nu}{2\pi}\log r'')$, и переходя к пределу при $r \to 0$ с учетом (4), получим существование равного предела (2). Наоборот, из условия (3) вытекает

$$|C(r_1; B, Z, \Delta, \Psi)| \geqslant |\widetilde{C}(r; B, Z, \Delta, \Psi)| \geqslant |\ C(r_2; B, Z, \Delta, \Psi)|,$$

где $r_j = r_j(r) \sim r$, $r \to 0$, $j = 1, 2$. Поэтому, как и выше, из существования предела (2) следует существование равного ему предела (4). Лемма доказана.

Для произвольной области $C \subset \overline{\mathbf{C}}_z$ обозначим через $g_G(z, z_0)$ функцию Грина этой области с полюсом в точке $z_0 \in G$, доопределенную нулем во внешности G. Пусть $r(G, z_0)$ – внутренний радиус области G относительно точки z_0. В случае $z_0 = \infty$ полагаем $r(G, \infty) = \exp\{\lim_{z\to\infty}(g_G(z, \infty) - \log|z|)\}$.

Теорема 1. *Пусть множество B и совокупности Z, Δ, Ψ такие же, как и выше, и пусть B_l означает связную компоненту множества B, содержащую точку z_l, $l = 1, \dots, m$.*[2] *Тогда*

$$|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| = -\frac{\nu}{2\pi}\log r + M(B, Z, \Delta, \Psi)| + o(1), \ r \to 0, \qquad (6)$$

где

$$M(B, Z, \Delta, \psi) = \frac{\nu^2}{2\pi}\left\{\sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\frac{r(B_l, z_l)}{\mu_l} + \sum \frac{\delta_l\delta_j}{\nu_l\nu_j}g_{B_l}(z_j, z_l)\right\}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что каждая область B_l имеет классическую функцию Грина $g_l(z) \equiv g_{B_l}(z, z_l)$, т.е. функцию Грина, непрерывную в $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus \{z_0\}$ и обращающуюся в нуль в дополнении $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus B_l$. Введем вспомогательную функцию

$$g(z) = \sum_{l=1}^{m}\delta_l\sum_{k=1}^{m}\beta_{kl}g_k(z),$$

где

$$\beta_{kl} = \begin{cases} -(\log\psi_k)^{-1}(\log\psi_l)^{-1}g_k(z_l), & k \neq l, \\ -(\log\psi_l)^{-1}[1 + (\log\psi_l)^{-1}\log R_l], & k = l, \end{cases}$$

$$k = 1, \dots, m; \quad R_l = r(B_l, z_l), \quad l = 1, \dots, m.$$

Функция $g(z)$ равна нулю в $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus B$ и гармоническая в $B \setminus \{z_l\}$. Положим $\widetilde{E}(z_l, r) = \{z \in E(z_l, \psi_l(2r)) : g(z)/\delta_l \geqslant 1\}$, $l = 1, \dots, m$.

[2] При такой нумерации одна компонента может иметь несколько обозначений.

Ввиду гармоничности $g(z)$ граница множества $\widetilde{E}(z_l, r)$ при достаточно малом r состоит из точек $\{z \in E(z_l, \psi_l(2r)) : g(z) = \delta_l\}$. Действительно, для таких точек имеем при $z_l \neq \infty$ и $r \to 0$

$$\delta_l = \delta_l\{-\log\psi_l)^{-1}[1 + (\log\psi_l)^{-1}\log R_l](-\log|z - z_l| + \log R_l + o(1))+$$

$$o((\log r)^{-1})\} + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{m} \delta_j\{-(\log\psi_j)^{-1}[1 + (\log\psi_j)^{-1}\log R_j](g_j(z_l) + o(1))-$$

$$-(\log\psi_l)^{-1}(\log\psi_j)^{-1}g_l(z_j)(-\log|z - z_l| + \log R_l + o(1)) + o((\log r)^{-1})\}.$$

Отсюда следует, в частности, что $\log|z - z_l| \sim \log\psi_l$ при $r \to 0$. Используя последнее соотношение, получим

$$\delta_l = \delta_l\{\log\psi_l)^{-1}\log|z - z_l| - (\log\psi_l)^{-1}\log R_l + (\log\psi_l)^{-2}\log R_l\log|z - z_l|\}+$$

$$+\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^{m} \delta_j\{-(\log\psi_j)^{-1}g_j(z_l) + (\log\psi_l)^{-1}(\log\psi_j)^{-1}g_j(z_l)\log|z - z_l|\}+$$

$$+o((\log r)^{-1}) = \delta_j\{(\log\psi_l)^{-1}\log|z - z_l| + o((\log r)^{-1})\},\ \ r \to 0.$$

Следовательно, $|z - z_l| \sim \psi_l$, $r \to 0$. Таким образом, границей множества $\widetilde{E}(z_l, r)$ является “почти окружность” с центром в точке z_l радиуса ψ_l, а само множество $\widetilde{E}(z_l, r)$ удовлетворяет условию (3). Аналогично показывается, что в случае $z_l = \infty$ граница множества $\widetilde{E}(z_l, r)$ является “почти окружностью” с центром в начале радиуса $1/\psi_l$ и это множество вновь удовлетворяет условию (3).

Рассмотрим теперь конденсатор

$$\widetilde{C}(r, B, Z, \Delta, \Psi) = \{\overline{\mathbf{C}}_z \setminus B, \widetilde{E}(z_l, r), \ldots, \widetilde{E}(z_m, r)\}.$$

По принципу Дирихле,

$$|\widetilde{C}(r, B, Z, \Delta, \Psi)|^{-1} = \iint\limits_{B\setminus\bigcup_{l=1}^{m}\widetilde{E}(z_l, r)} |\nabla g|^2\, dxdy.$$

Пусть $\rho > 0$ настолько мало, что множества $E(z_l, \rho)$ принадлежат соответственно $\widetilde{E}(z_l, r)$, $l = 1, \ldots, m$. Применяя формулу Грина и теорему Гаусса, последовательно имеем

$$\iint\limits_{B\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{m}\widetilde{E}(z_l,r)} |\nabla g|^2\,dxdy = -\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\partial\widetilde{E}(z_j,r)} \delta_j\frac{\partial g}{\partial n}ds =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\delta_j\int\limits_{\partial\widetilde{E}(z_j,r)}\frac{\partial g}{\partial n}ds = 2\pi\sum_{j=1}^{m}\delta_j\sum_{l=1}^{m}\delta_l\beta_{jl} + o(1),\ \ \rho\to 0.$$

Здесь дифференцирование проводится по внутренней нормали к полю конденсатора $\widetilde{C}(r,B,Z,\Delta,\Psi)$. Подставив сюда значения β_{jl} и учитывая, что модуль конденсатора не зависит от ρ, получим

$$|\widetilde{C}(r,B,Z,\Delta,\Psi)|^{-1} = 2\pi\{\Sigma - \delta_l^2(\log\psi_l)^{-1}[1+(\log\psi_l)^{-1}\log R_l] -$$
$$-\Sigma\,\delta_j\delta_l(\log\psi_j)^{-1}(\log\psi_l)^{-1}g_j(z_l)\}. \tag{7}$$

Равенство (7) совместно с леммой 1 дает требуемую формулу (6).

В случае произвольного множества B построим исчерпание областей B_l последовательностями областей B_l^s, имеющих классическую функцию Грина: $\overline{B}_l^s \subset B_l^{s+1} \subset B_l$, $s = 1,2,\ldots$, $\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} B_l^s = B_l$. Введем обозначения: $B^s = \bigcup\limits_{l=1}^{m} B_l^s$, $g_l^s(z) = g_{B_l^s}(z,z_l)$, $R_l^s = r(B_l^s,z_l)$. Известно, что $g_l^s \to g_l$ при $s\to\infty$ равномерно внутри $B_l\setminus z_l$ и, в частности, $R_l^s \to R_l$, $s\to\infty$, $l=1,\ldots,m$. Пусть $g(s)$ и $\widetilde{E}(z_l,r)$ такие же, как и выше, а $g^s(z)$ – функция, построенная по $g_l^s(z)$ аналогично $g(z)$. Учитывая равномерную сходимость, стандартными рассуждениями показываем

$$\lim_{s\to\infty}\iint\limits_{B^s\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{m}\widetilde{E}(z_l,r)} |\nabla g^s|^2\,dxdy = |\widetilde{C}(r,B,Z,\Delta,\Psi)|^{-1}.$$

С другой стороны, как и выше убеждаемся, что интеграл под знаком предела равен

$$-\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\partial\widetilde{E}(z_j,r)}(\delta_j+\alpha_{js}(z))\frac{\partial g^s}{\partial n}ds = -\sum_{j=1}^{m}\delta_j\int\limits_{\partial E(z_j,\rho)}\frac{\partial g^s}{\partial n}ds + \alpha_s =$$

$$= 2\pi\{\Sigma - \delta_l^2(\log\psi_l)^{-1}[1 + (\log\psi_l)^{-1}\log R_l^s] -$$

$$-\Sigma\,\delta_j\delta_l(\log\psi_j)^{-1}(\log\psi_l)^{-1}g_j^s(z_l)\} + \alpha_s,$$

где $\alpha_{js}(z)$ и α – некоторые бесконечно малые при $s\to\infty$. Переходя к пределу при $s\to\infty$, вновь получим равенство (7) и, следовательно, формулу (6). Теорема доказана.

§2. Применение в геометрической теории функций

Заметим сначала, что если B и B' – открытые множества плоскости $\mathbf{C}_z$ и $B\subset B'$, то из монотонности приведенного модуля и теоремы 1 следует неравенство Нехари [6]

$$\Sigma\,\delta_l\delta_j h_l(z_l,z_j) \leqslant \Sigma\,\delta_l\delta_j h_l'(z_l,z_j) \tag{8}$$

для любых вещественных δ_l, $l=1,\dots,m$. Здесь $h_l(z,\zeta) = g_{B_l}(z,\zeta) + \log|z-\zeta|$ и $h_l'(z,\zeta) = g_{B_l'}(z,\zeta) + \log|z-\zeta|$ – регулярные части функций Грина связных компонент соответственно B и B' (см. также [7, §3]). Положив в (8) $B' = \{z : |z| < R\}$ и переходя к пределу при $R\to\infty$, получим известное неравенство

$$\prod_{l=1}^{m} r(B_l,z_l)^{\delta_l^2} \leqslant \prod_{1\leqslant k<l\leqslant m} |z_k - z_l|^{-2\delta_k\delta_l},$$

где $\Sigma\,\delta_l = 0$ и B_l, $l=1,\dots,m$, – попарно неналегающие области [5, с. 551].

Перейдем теперь к новым результатам, вызванным применением диссимметризации и разделяющего преобразования. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в статье [4]. Отличие заключается лишь в том, что в нашем случае конденсаторы состоят, вообще говоря, из большого числа пластин. Однако определения либо аналогичны, либо полностью повторяются.

Пусть Φ_n – группа симметрии на $\overline{\mathbf{C}}_z$, состоящая из суперпозиций отражений относительно прямых $\{z = t\exp(\pi ik/n) : -\infty < t < +\infty\}$, $k=1,\dots,n$. Множество A называется симметричным (относительно группы Φ_n), если $\varphi(A) = A$ для любых изометрий $\varphi\in\Phi_n$. Совокупность точек назовем симметричной, если объединение этих точек суть симметричное множество. Орбитой точки z относительно группы Φ_n называется множество $\{\varphi(z) : \varphi\in\Phi_n\}$.

Теорема 2. *Пусть B^* – открытое симметричное множество на комплексной сфере $\overline{\mathbf{C}}_z$, $\{z_l^*\}$ – симметричная совокупность из m различных точек множества B^* и $\{\delta_l\}$ – совокупность m вещественных чисел, удовлетворяющих условию: $\delta_k = \delta_l$, если точки z_k^* и z_l^* принадлежат одной орбите. Пусть множество B и точки $\{z_l\}$ – результат некоторой диссимметризации соответственно B^* и $\{z_l^*\}$. Справедливо неравенство*

$$\Sigma\, \delta_l^2 \log r(B_l^*, z_l^*) + \Sigma\, \delta_k \delta_l g_{B_l^*}(z_k^*, z_l^*) \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma\, \delta_l^2 \log r(B_l, z_l) + \Sigma\, \delta_k \delta_l g_{B_l}(z_k, z_l).$$

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $C(r; B^*, \{z_l^*\}, \{\delta_l\})$. Легко видеть, что при достаточно малом $r > 0$ результат диссимметризации этого конденсатора совпадает с конденсатором $C(r; B, \{z_l\}, \{\delta_l\})$. Из принципа диссимметризации (аналогично теореме 1.10 [4]) следует

$$|C(r; B^*, \{z_l^*\}, \{\delta_l\})| \leqslant |C(r; B, \{z_l\}, \{\delta_l\})|.$$

Переходя здесь к пределу при $r \to 0$, получим

$$M\big(B^*, \{z_l^*\}, \{\delta_l\}\big) \leqslant M\big(B, \{z_l\}, \{\delta_l\}\big).$$

Осталось воспользоваться формулой для приведенного модуля в теореме 1.

Отметим некоторые следствия теоремы 2. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$ – совокупность произвольных различных точек на окружности $|z| = 1$, $a^* = (1, \exp(2\pi i/n), \dots, \exp(2\pi i(n-1)/n)$. Пусть K – замкнутое множество на промежутке $(0, 1]$, и пусть $g_a(z, \zeta)$ – функция Грина области $B_a = \{z : |z| < 1\} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{z = a_k t : t \in K\}$. Известно, что существует диссимметризация, переводящая множество B_{a^*} в множество B_a [4, с. 34]. Фиксируем r, $0 < r < 1$, и рассмотрим симметричную совокупность точек $z_l^* = r \exp(i(\pi/nN + 2\pi(i - 1/nN))$, $l = 1, \dots, nN$, и точку $z = 0$. Соответствующую совокупность вещественных чисел образуют числа $\delta_l = \frac{1}{nN}$, $l = 1, \dots, nN$, и произвольное вещественное число δ. Теорема 2 дает

$$\frac{1}{(nN)^2} \Sigma\, \log r(B_{a^*}, z_l^*) + \delta^2 \log r(B_{a^*}, 0) + 2\delta \frac{1}{nN} \Sigma\, g_{a^*}(0, z_l^*) +$$

$$+\frac{1}{(nN)^2}\Sigma\, g_{a^*}(z_k^*, z_l^*) \leqslant \frac{1}{(nN)^2}\Sigma\, \log r(B_a, z_l) + \delta^2 \log r(B_a, 0) +$$

$$+2\delta\frac{1}{nN}\Sigma\, g_a(0, z_l) + \frac{1}{(nN)^2}\Sigma\, g_a(z_k, z_l).$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$, имеем

$$\delta^2\log r(B_{a^*},0) + \frac{\delta}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_{a^*}(0, re^{i\theta})d\theta + \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_{a^*}(re^{i\varphi}, re^{i\theta})\, d\varphi d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \delta^2\log r(B_a,0) + \frac{\delta}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_a(0, re^{i\theta})d\theta + \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_a(re^{i\varphi}, re^{i\theta})\, d\varphi d\theta.$$

Положив здесь $\delta=0$, получим

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_{a^*}(re^{i\varphi}, re^{i\theta})\, d\varphi d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g_a(re^{i\varphi}, re^{i\theta})\, d\varphi d\theta.$$

Случай $\delta\to\infty$, либо $r\to 1$ дает известное неравенство

$$r(B_{a^*},0)\leqslant r(B_a,0).$$

Заметим, что согласно гипотезе Халисте по известной задаче Гончара [8] выполняется

$$\int\limits_0^{2\pi} g_{a^*}(0, re^{i\theta})d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi} g_a(0, re^{i\theta})d\theta,$$

и это неравенство до сих пор не доказано и не опровергнуто.

Рассмотрим теперь произвольные точки z_k, $k=1,\dots,n$, лежащие на окружности $|z|=r$, и точки $\zeta_k = z_kR/r$, $k=1,\dots,m$, $0<r$, $R<\infty$. Пусть z_k^* и $\zeta_k^* = z_k^*R/r$, $k=1,\dots,n$, образуют симметрическую совокупность точек. Известно, что существует диссиметризация, переводящая точки Z_k^*, ζ_k^* в точки z_k, ζ_k [4]. Применяя теорему 2 к этим точкам и к области $B_\rho^* = B_\rho = \{z : |z|>\rho\}$ и переходя затем к пределу при $\rho\to 0$, получим неравенство

$$\frac{\prod|z_k^*-\zeta_l^*|^{2\alpha\beta}}{\prod|z_k^*-z_l^*|^{\alpha^2}|\zeta_k^*-\zeta_l^*|^{\beta^2}} \leqslant \frac{\prod|z_k-\zeta_l|^{2\alpha\beta}}{\prod|z_k-z_l|^{\alpha^2}|\zeta_k-\zeta_l|^{\beta^2}},$$

справедливое для любых вещественных α и β. При $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ имеем классическое неравенство [9]:

$$\prod |z_k - z_l| \leqslant \prod |z_k^* - z_l^*|.$$

Понятно, что нетривиальная оценка снизу левой части этого неравенства невозможна без дополнительных ограничений на точки Z_k. В связи с этим представляет интерес

Теорема. *Если различные точки $z_{kl} \neq 0$ лежат на радиальных лучах так, что $\arg z_{kl} = 2\pi k/n$, $l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$, и если вещественные числа δ_{kl}, $l = 1, \dots, m_k$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям*

$$\nu^2 \Big(\sum \delta_{kl}\Big)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \nu_k^2 \Big(\sum_{l=1}^{m_k} \delta_{kl}\Big)^2, \quad \nu = \frac{1}{n^2} \sum \nu_k, \tag{9}$$

где

$$\nu = \Big(\sum \delta_{kl}^2\Big)^{-1}, \quad \nu_k = \Big(\sum_{l=1}^{m_k} \delta_{kl}^2\Big)^{-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

то справедливо неравенство

$$\prod |z_{ki} - z_{lj}|^{n^2\nu^2\delta_{ki}\delta_{lj}} \geqslant$$
$$\geqslant \prod (n|z_{kl}|^{n-1})^{\nu^2\delta_{kl}^2} \prod \big|\, |z_{ki}|^n - |z_{kj}|^n \big|^{\nu_k^2\delta\delta_{ki}\delta_{kj}}. \tag{10}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$B_\rho = \{z : |z| < \rho\}, \quad Z = \{z_{kl}\}, \quad \Delta = \{\delta_{kl}\},$$

$$w = p_k^+(z) \equiv -iz^n, \ 2\pi k/n < \arg z < 2\pi k/n + \pi/n, \ k = 1, \dots, n,$$

$$w = p_k^-(z) \equiv -iz^n, \ -\pi/n + 2\pi k/n < \arg z < 2\pi k/n, \ k = 1, \dots, n.$$

При достаточно большом ρ и малом $r > 0$ пусть $\{C_k^+, C_k^-\}_{k=1}^n$ – результат разделяющего преобразования конденсатора $C(r; B_\rho, Z, \Delta)$ относительно семейства функций $\{p_k^+(z), p_k^-(z)\}_{k=1}^n$ (см. [4, с. 27]). Легко видеть, что пластины конденсаторов $C_k^\pm$ удовлетворяют условиям (3), так что

$$C_k^\pm = \widetilde{C}\big(r; B_{\rho^n}, \{p_k^\pm(z_{kl})\}_{l=1}^{m_l}, \ \{\delta_{kl}\}_{l=1}^{m_k} \ \{n|z_{kl}|^{n-1} r\}_{l=1}^{m_k}\big).$$

Как и в теореме 1.8 [4], имеем

$$|C(r;B_\rho,Z,\Delta)|^{-1}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(|C_k^+|^{-1}+|C_k^-|^{-1}\right).$$

Учитывая $|C_k^+|=|C_k^-|$, получим

$$|C(r;B_\rho,Z,\Delta)|\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}|C_k^+|.$$

Отсюда ввиду (9)

$$|C(r;B_\rho,Z,\Delta)|+\frac{\nu}{2\pi}\log r\leqslant\frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[|C_k^+|+\frac{\nu_k}{2\pi}\log r\right]\right\}.$$

По теореме 1 заключаем

$$\frac{\nu^2}{2\pi}\left\{\sum\delta_{kl}^2\log\frac{\rho^2-|z_{kl}|^2}{\rho}+\sum\delta_{ki}\delta_{lj}\log\left|\frac{\rho^2-\overline{z}_{ki}z_{lj}}{\rho(z_{ki}-z_{lj})}\right|\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k^2}{2\pi}\left\{\sum_{l=1}^{m_k}\delta_{kl}^2\log\frac{\rho^{2n}-|z_{kl}|^{2n}}{\rho^n n|z_{kl}^{n-1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{ij}\delta_{ki}\delta_{kj}\log\left|\frac{\rho^{2n}-|z_{ki}z_{kj}|^n}{\rho^n(|z_{ki}|^n-|z_{kj}|^n)}\right|\right\}.$$

Осталось воспользоваться соотношением (9) и перейти к пределу при $\rho\to 0$. Теорема доказана.

Если на каждом луче $\arg z=2\pi k/n$ расположено по одной точке z_k, $k=1,\dots,n$, то неравенство (10) дает

$$\prod|z_k-z_l|\geqslant n^n\prod|z_k|^{n-1} \tag{11}$$

($z_{k1}=z_k$, $m_k=1$, $\delta_{k1}=1$, $\nu_k=1$, $\nu=1/n$). Знак равенства достигается для симметричных точек z_k. Случай двух точек на каждом луче приводит, например, к неравенству

$$\frac{n^{2n}\Pi|z_{k1}-z_{l2}|}{\Pi|z_{k1}-z_{l1}|\,|z_{k2}-z_{l2}|}\leqslant\prod\frac{|\,|z_{k1}|^n-|z_{k2}|^n|^2}{|z_{k1}z_{k2}|^{n-1}},$$

($\delta_{k1}=-\delta_{k2}=1$, $k=1,\dots,n$). В дополнение к этим неравенствам укажем на способ их усиления, при этом мы ограничимся простейшим из них, т.е. неравенством (11). Пусть $z_k\neq 0$ $\arg z_k=$

$2\pi k/n$, $k = 1, \dots, n$, $Z = \{z_k\}$, $\Delta = \{1, \dots, 1\}$, $w = p_k(z) \equiv -iz^{n/2}$, $2\pi k/n < \arg z < 2\pi(k+1)/n$, $p_k(z_k) = -i|z_k|^{n/2}$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $\{C_k\}$ – результат разделяющего преобразования конденсатора $C(r; B_\rho, Z, \Delta)$ относительно семейства функций $\{p_k(z)\}$. По теореме 1.8 [4], получим

$$|C(r; B_\rho, Z, \Delta)| + \frac{1}{2\pi n}\log r \leqslant \frac{2}{n^2}\sum\left[|C_k| + \frac{1}{4\pi}\log r\right].$$

Асимптотическая формула теоремы 1 приводит, как и выше, к неравенству

$$\prod |z_k - z_l| \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^n \prod |z_k|^{\frac{n}{2}-1}\big(|z_k|^{\frac{n}{2}} + |z_{k+1}|^{\frac{n}{2}}\big) \quad (z_{n+1} = z_1).$$

В теории функций хорошо известны задачи об экстремальном разбиении с участием модулей и приведенных модулей областей вида $M(B, z_0)$ [10]. Мы продолжим изучение аналогичных задач для обобщенных приведенных модулей относительно совокупностей точек [2].

Теорема 4. *Пусть D_k, $k = 0, 1, \dots, n$, – области комплексной сферы $\overline{\mathbf{C}}_z$, причем область D_0 содержит точку $z = 0$ и не пересекается с областями D_k, которые содержат соответственно некоторые точки z_k, $\arg z_k = 2\pi k/n$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $g_k(z)$ – функция Грина связной компоненты множества $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k$, содержащей точку z_k с полюсом в этой точке, и пусть $g_k(z) = 0$ вне этой связной компоненты. Тогда*

$$\exp\big(2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n} g_k(z_l)\big)(r(D_0, 0))^{n^2}\prod_{k=1}^{n} r(D_k, z_k) \leqslant n^{-n}\prod_{k=1}^{n}|z_k|^{n+1}. \tag{12}$$

Знак равенства достигается для областей D_0^* и D_k^*, ограниченных кривыми $z = \sqrt[n]{R^n/2 + it}$, $-\infty < t < +\infty$, и точек $z_k^* = R\exp(2\pi ik/n)$, $k = 1, \dots, n$, где R – любое положительное число.

Доказательство. Положим $B_\rho = \{z : |z| < \rho\}$, $\rho > \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|z_k|$, $Z = \{0, z_1, \dots, z_n\}$, $\Delta = \{-n, 1, \dots, 1\}$. Пусть $D_{k\rho}$ – связная компонента множества $D_k \cap B_\rho$, содержащая точку z_k $(z_0 = 0)$, и пусть $g_{k\rho}(z)$ – функция Грина связной компоненты множества $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k \cap B_\rho$, содержащей точку z_k, с полюсом в этой точке. По теореме 1 и в силу монотонности приведенного модуля, имеем

$$\frac{1}{2\pi(n(n+1))^2}\left\{n^2\log r(D_{0\rho},0)+\sum_{k=1}^{n}\log r(D_{k\rho},z_k)+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}g_{k\rho}(z_l)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant M\left(\bigcup_{k=0}^{N}D_{k\rho},Z,\Delta\right)\leqslant M(B_\rho,Z,\Delta).$$

Прямые вычисления дают

$$M(B_\rho,Z,\Delta)=\frac{1}{2\pi(n(n+1))^2}\left\{n^2\log\rho+\sum\log\frac{\rho^2-|z_k|^2}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\sum\log\left|\frac{\rho^2-\overline{z}_k z_l}{\rho(z_k-z_l)}\right|-2n\sum\log\left|\frac{\rho}{z_k}\right|\right\}.$$

Суммируя выписанные соотношения и переходя к пределу при $\rho\to\infty$, получим неравенство, которое вместе с (11) приводит к требуемому результату (12). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Заметим, что D_k^*, $k=1,\dots,n$, являются односвязными попарно пересекающимися областями. Таким образом, неравенство (12) суть обобщение соответствующего неравенства в задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами в классической постановке [10] на случай частично неналегающих областей (ср. [4, §9]). Одним из эффективных методов решения задач об экстремальном разбиении является применение разделяющего преобразования областей [4]. Разделяющее преобразование произвольных множеств и поведение обобщенных приведенных модулей при таком преобразовании суть предмет отдельной работы. Поэтому мы ограничимся здесь лишь двумя каноническими случаями экстремального разбиения, в которых обобщенный приведенный модуль сводится к обычному, следовательно, экстремальная задача сводится к известной задаче об экстремальном разбиении. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 2. *Предположим, что область D имеет классическую функцию Грина $g(z,\zeta)$ и пусть z_1 и z_2 – две точки этой области.*

Тогда существуют непересекающиеся области D_1 и D_2 такие, что $D_1 \cup D_2 \subset D$ и

$$\log r(D_1, z_1) r(D_2, z_2) = \log r(D, z_1) r(D, z_2) - 2g(z_1, z_2).$$

Доказательство. Функция $u(z) = g(z, z_1) - g(z, z_2)$ задана в области $D \setminus \{z_1, z_2\}$ и гармоническая в ней, причем $u(z) \to +\infty$ при $z \to z_1$ и $u(z) \to -\infty$ при $z \to z_2$. Отсюда следует, что множества $D_1 = \{z : u(z) > 0\}$ и $D_2 = \{z : u(z) < 0\}$ являются областями. Функция Грина области D_1 с полюсом в точке z_1 совпадает с функцией $u(z)$. Следовательно,

$$\log r(D_1, z_1) = \lim_{z \to z_1} \big(u(z) + \log|z - z_1|\big) = \log(D, z_1) - g(z_1, z_2).$$

Аналогично, $-u(z)$ совпадает с функцией Грина области D_2 с полюсом в z_2 и

$$\log r(D_2, z_2) = \log r(D, z_2) - g(z_2, z_1).$$

Осталось сложить полученные соотношения. Лемма доказана.

Теорема 5. *Для любых точек z_k, ζ_k, удовлетворяющих условию $\arg z_k = \arg \zeta_k$, $|z_k| = r$, $|\zeta_k| = R$, $k = 1, \dots, n$, $0 < r < R < \infty$, и любых попарно неналегающих областей D_k, z_k, $\zeta_k \in D_k \subset \overline{\mathbf{C}}_z$, $k = 1, \dots, n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, z_k) r(D_k, \zeta_k) \exp(-2g_k(z_k, \zeta_k)) \leqslant \left[\frac{4\sqrt{rR}(R^{n/2} - r^{n/2})}{n(R^{n/2} + r^{n/2})}\right]^{2n},$$

где $g_k(z, \zeta)$ – функция Грина области D_k. Знак равенства достигается для областей $D_k^* = \{z : 2\pi k/n < \arg z < 2\pi(k+1)/n\}$ и точек $z_k^* = r\exp(i(\pi/n + 2\pi k/n))$, $\zeta_k^* = R\exp(i(\pi/n + 2\pi k/n))$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Можно считать, что области D_k имеют классические функции Грина. По лемме 2, для каждой области D_k существуют две неналегающие области D_{k1} и D_{k2} такие, что $D_{k1} \cup D_{k2} \subset D_k$ и

$$r(D_k, z_k) r(D_k, \zeta_k) \exp(-2g_k(z_k, \zeta_k)) =$$

$$= r(D_{k1}, z_k) r(D_{k2}, \zeta_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Таким образом, доказательство теоремы свелось к оценке сверху произведения

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_{k1}, z_k) r(D_{k2}, \zeta_k), \tag{13}$$

где D_{k1}, D_{k2}, $k = 1, \dots, n$, – попарно неналегающие области. Эту оценку проще всего осуществить последовательным применением разделяющего преобразования и теоремы 2.15 работы [4]. Вместе с тем для односвязных областей указанная оценка уже получена Е. Г. Емельяновым [11, с. 96], причем метод его доказательства в данном случае "проходит" с известными специалистам поправками и для многосвязных областей. Ключевым моментом является специфика применяемого здесь квадратичного дифференциала (12) работы [11]. Повторяя доказательство Е. Г. Емельянова, получим

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_{k1}, z_k) r(D_{k2}, \zeta_k) \leqslant \left[\frac{4\sqrt{rR}(R^{n/2} - r^{n/2})}{n(R^{n/2} + r^{n/2})} \right]^{2n}.$$

Проверка случая равенства является простым упражнением. Теорема доказана.

Теорема 6. *Для любых точек z_k, ζ_k, лежащих на окружности $|z| = r$, и любых попарно неналегающих областей D_k, z_k, $\zeta_k \in D_k \subset \overline{\mathbf{C}}_z$, $k = 1, \dots, n$, справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, z_k) r(D_k, \zeta_k) \exp(-2 g_k(z_k, \zeta_k)) \leqslant (2r/n)^{2n}.$$

Знак равенства достигается для областей $D_k^* = \{z : 2\pi k/n < \arg z < 2\pi(k+1)/n\}$ и точек $z_k^* = r\exp(i(\pi/2n + 2\pi k/n))$, $\zeta_k^* = r\exp(i(3\pi/2n + 2\pi k/n))$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Как и в предыдущем доказательстве, убеждаемся, что достаточно оценить сверху произведение (13), где на этот раз точки z_k и ζ_k лежат на одной окружности. По теореме 2.17 работы [4], это произведение не превосходит $(4r/2n)^{2n}$. Случай равенства проверяется прямым вычислением произведения слева для указанных областей D_k^* и точек z_k^*, ζ_k^*, $k = 1, \dots, n$. Теорема доказана.

Приведенные выше результаты непосредственно связаны со свойствами регулярных и однолистных функций. Пусть B и D

– открытые множества, расположенные соответственно на сферах $\overline{\mathbf{C}}_z$ и $\overline{\mathbf{C}}_w$ и такие, что дополнения $\overline{\mathbf{C}}_z \setminus B$, $\overline{\mathbf{C}}_w \setminus D$ имеют положительную гармоническую меру. Пусть функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает множество B на D. Для любых различных точек $Z = \{z_l\}$ множества B и любых отличных от нуля чисел $\Delta = \{\delta_l\}$ определен приведенный модуль $M(B, Z, \Delta)$. Обозначим $W = \{f(z_l)\}$. В силу формулы (6) имеем

$$M(D, W, \Delta) = M(B, Z, \Delta) + \frac{\nu^2}{2\pi} \sum \delta_l^2 \log |f'(z_l)|. \qquad (14)$$

Вместе с оценками модулей конденсаторов $C(r; B, Z, \Delta)$ и $C(r; D, W, \Delta)$ равенство (14) дает приложения формулы (6) в теории однолистных функций.

Теорема 7. *Пусть функция $w = f(z)$ конформно и однолистно отображает круг $|z| < 1$ в ограниченную область D, трансфинитный диаметр замыкания которой $d(\overline{D}) \leqslant 1$. Предположим, что точки w_0 и z_k, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям: $f(z_k) \neq w_0$,*

$$\arg \big[(f(z_k) - w_0) \setminus (f(z_1) - w_0)\big] = 2\pi(k-1)/n, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$n^n \prod n|f'(z_k)|\ |f(z_k) - w_0|^{n-1} \leqslant \prod \left| \frac{z_k - z_l}{1 - z_k \overline{z}_l} \right|.$$

Доказательство. Введем следующие обозначения: $B = \{z : |z| < 1\}$, $Z = \{z_k\}$, $\Delta = \{\delta_k\}$, $\delta_k = 1$, $k = 1, \dots, n$; $F(z) = 1/(f(z) - w_0)$; $W = \{F(z_k)\}$. В силу теоремы 1 и равенства (14) имеем последовательно

$$\frac{1}{2\pi n^2} \Big\{ \sum \log(1 - |z_k|^2) + \sum \log \left| \frac{1 - z_k \overline{z}_l}{z_k - z_l} \right| \Big\} = M(B, Z, \Delta) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi n^2} \sum \log |f'(z_k)|\ |f(z_k) - w_0|^{-2} + M(F(B), W, \Delta).$$

Пусть D_0 – связная компонента образа множества $\overline{\mathbf{C}}_w \setminus \overline{D}$ при отображении $\zeta = 1/(w - w_0)$, содержащая начало координат. По условию теоремы, $r(D_0, 0) \geqslant 1$. Обозначим через $g(\zeta, \zeta')$ функцию Грина области $F(B)$. Привлекая вновь теорему 1 и неравенство (12), получим

$$M(F(B), W, \Delta) = \frac{1}{2\pi n^2} \Big\{ \sum \log r(F(B), F(z_k)) + \sum g(F(z_k), F(z_l)) \Big\} =$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi n^2}\left\{n^2\log r(D_0,0)+\sum\log r(F(B),F(z_k))+\sum g(F(z_k),F(z_l))\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi n^2}\log\left\{n^{-n}\prod|F(z_k)|^{n+1}\right\}=\frac{1}{2\pi n^2}\log\left\{n^{-n}\prod|f(z_k)-w_0|^{-n-1}\right\}.$$

Суммируя выписанные соотношения, получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

Замечание. Наличие в данном доказательстве понятия приведенного модуля носит число методический характер. Наша цель – показать технику его применения. Содержательная часть доказательства состоит в применении неравенства (12), которое можно рассматривать как оценку приведенного модуля. В следующем доказательстве мы воспользуемся готовым результатом (теорема 5) и поведением внутреннего радиуса и функции Грина при конформном отображении.

Обозначим через $S_f(z) = f'''(z)/f'(z) - \frac{3}{2}(f''(z)/f'(z))^2$ производную Шварца функции $f(z)$ в точке z.

Теорема 8. *Для любых мероморфных и однолистных в круге $|z|<1$ функций $w=f_k(z)$, отображающих этот круг на взаимно неналегающие области таким образом, что $|f_k(0)|=1$, $k=1,\dots,n$, справедливо точное неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{|f_k'(0)|^{-2}-\frac{1}{6}\operatorname{Re}\left[\frac{f_k^2(0)S_{f_k}(0)}{(f_k'(0))^2}\right]\right\}\geqslant\frac{n(n^2+2)}{24}.$$

Знак равенства достигается для функций $f_k^*(z)=\exp(2\pi i(k-1)/n)\ [(1+z)/(1-z)]^2/n$, где под корнем понимается ветвь, сохраняющая единицу, $k=1,\dots,n$.

Доказательство. Обозначим $w_k=f_k(0)$, $D_k=f_k(\{z:|z|<1\})$, $w_k^*=f_k^*(0)$, $D_k^*=f_k^*(\{z:|z|<1\})$, $k=1,\dots,n$. Как и в работе [3], нетрудно проверить

$$|f_k'(0)|^{-2}-\frac{1}{6}\operatorname{Re}\left[\frac{w_k^2\,S_{f_k}(0)}{(f_k'(0))^2}\right]=K(D_k,w_k),\tag{15}$$

где

$$K(D_k,w_k)=\lim_{\rho\to 0}-\frac{1}{4\rho^2}\big\{\log r(D_k,(1-\rho)w_k)+\log r(D_k,(1+\rho)w_k)-$$

$$-2_{g_{D_k}}((1-\rho)w_k,(1+\rho)w_k)-2\log 2\rho\big\}.$$

По теореме 5,

$$\sum_{k=1}^{n} K(D_k, w_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} K(D_k^*, w_k^*).$$

Осталось воспользоваться равенством (15). Теорема доказана.

Литература

1. В. К. Хейман, *Многолистные функции,* М., 1960.
2. В. Н. Дубинин, *Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля,* Сиб. мат. ж. **35**, No. 4 (1994), 774–792.
3. В. Н. Дубинин, Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 80–92.
4. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49**, No. 1 (1994), 3–76.
5. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд. М., 1966.
6. Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions,* Trans. Amer. Math. Soc. **75**, No. 2 (1953), 256–286.
7. М. Шиффер, *Некоторые новые результаты в теории конформных отображений.* Приложение к кн.: Р. Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953, 234–301.
8. K. Haliste, *On an extremal configuration for capacity,* Arkiv for Mat. **27**, No. 1 (1989), 97–104.
9. I. Schur, *Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten,* Math. Zeit. **1** (1918), 377–402.
10. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
11. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1987), 91–98.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

Поступило 1 ноября 1996 г.