В. О. Кузнецов

О МАКСИМУМЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ В КРУГЕ

Посвящается
90-летию со дня рождения
Г. М. Голузина

§1. Введение и формулировка результатов

Пусть $U = \{z : |z| < 1\}$, $C = \{z : |z| = 1\}$. Под $R(D, a)$ в настоящей работе будем понимать конформный радиус односвязной области D относительно точки $a \in D$, если $a \neq \infty$, и обратную величину, если $a = \infty$. Рассмотрим три связанные друг с другом задачи.

Задача 1. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ – различные фиксированные точки круга U. Найти максимум функционала*

$$\prod_{j=1}^{n} R(D_j, a_j) \tag{1}$$

для всех систем неналегающих односвязных областей $D_1, \ldots, D_n$ в круге U таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Задача 2. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$; $D_1, \ldots, D_n$ $(n \geqslant 2)$ – система точек и неналегающих односвязных областей в круге U таких, что $a_j \in D_j$, $j = 1, \ldots, n$. Найти максимум функционала (1) для всех указанных систем точек a_j и областей D_j.*

Задача 3. *Пусть α, β, γ – положительные числа, $(n-1)(\alpha+\beta)+\gamma = 1$, и пусть $a_1, \ldots, a_n$; $D_1, \ldots, D_n$ $(n \geqslant 2)$ – система точек и неналегающих односвязных областей в U таких, что $a_j \in D_j$, $j =$*

$1,\ldots,n$. *Найти максимум функционала*

$$\prod_{j=1}^{n} R(D_j,a_j)\left\{\prod_{1\leqslant k<j\leqslant n}|a_k-a_j|\right\}^{-2\alpha}\left\{\prod_{1\leqslant k<j\leqslant n}|1-\bar{a}_k a_j|\right\}^{-2\beta}\times$$
$$\times\left\{\prod_{j=1}(1-|a_j|^2)\right\}^{-\gamma} \qquad (2)$$

для всех указанных систем точек a_j *и областей* D_j.

В задаче 1 имеет место следующий качественный результат [1].

Теорема A. *Экстремальной системой областей задачи 1 является только система лежащих в* U *круговых областей* $D_1^*,\ldots,D_n^*$ *квадратичного дифференциала*

$$\mathcal{Q}(z)dz^2=-\frac{P(z)}{4\pi^2R^2(z)}\,dz^2, \qquad (3)$$

где

$$R(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)(1-\bar{a}_j z), \quad P(z)=B\prod_{j=1}^{2n-2}(z-b_j)(1-\bar{b}_j z).$$

Величины B, $b_1,\ldots,b_{2n-2}$ *однозначно определяются условиями:*

$$B>0,$$
$$|b_j|\leqslant 1, \quad j=1,\ldots,2n-2,$$
$$P(a_j)=(R'(a_j))^2, \quad j=1,\ldots,n,$$
$$\bigcup_{j=1}^{n}\bar{D}_j^*=\bar{U}.$$

Отметим некоторые свойства дифференциала (3). Объединение замыканий критических траекторий дифференциала (3), лежащих в $\bar{U}$, обозначим через $\bar{\Phi}$. Из теоремы A вытекает, что

$$\bar{\Phi}=\bigcup_{j=1}^{n}\partial D_j^*$$

и множество $\bar{\Phi}$ является связным. Круговые области и полюсы дифференциала (3) попарно симметричны относительно окружности C, являющейся объединением замыканий критических траекторий этого дифференциала. Существует по крайней мере один нуль дифференциала (3), лежащий на окружности C, и все нули этого дифференциала, лежащие на C, имеют четный порядок.

Отметим, что главной сложностью при решении задач 2 и 3, в отличие от задачи 1, является нахождение экстремальных точек $a_1, \dots, a_n$, положение которых заранее не известно. И в том и в другом случае точки $a_1, \dots, a_n$ являются двойными полюсами ассоциированного квадратичного дифференциала. Поэтому, в соответствии с общепринятой терминологией, задача 1 является задачей с фиксированными полюсами, задачи 2 и 3 – задачами со свободными полюсами.

Пусть Ω – система точек $a_1, \dots, a_n$ и областей $D_1, \dots, D_n$ допустимая в задаче 3, и пусть система точек $a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ и областей $D_{n+1}, \dots, D_{2n}$ симметрична системе Ω относительно окружности C. Тогда функционал (2) для системы Ω может быть представлен в виде произведения

$$\prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} \left\{ \frac{R(D_j, a_j) R(D_k, a_k)}{|a_j - a_k|^2} \right\}^{\nu_{jk}}, \tag{4}$$

где ν_{jk} – положительные числа такие, что

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} \nu_{jk} = \frac{n}{2}.$$

Так как каждый из сомножителей в (4) ограничен [2] и инвариантен относительно дробно-линейных преобразований z-сферы на себя, то функционал (2) инвариантен при гиперболических движениях круга U и ограничен.

Используя рассуждения теории нормальных семейств, нетрудно показать, что существуют системы точек и областей, реализующие максимум рассматриваемых в задачах 2 и 3 функционалов. Если $a_1^*, \dots, a_n^*$ – некоторая экстремальная система точек задачи 2 или 3, то соответствующей экстремальной системой областей каждой из этих задач является экстремальная система областей задачи 1 для точек $a_1^*, \dots, a_n^*$. Таким образом, каждая экстремальная система областей задач 2 и 3 также описывается квадратичным дифференциалом (3).

В отличие от задачи 1, решения задач 2 и 3 заведомо не единственны (в силу инвариантности функционалов (1) и (2) при поворотах относительно начала координат в первом случае и при произвольных гиперболических движениях во втором). При $n = 2$ решение задач 2 и 3 вытекает из результата П. П. Куфарева [3]: экстремальной системой точек и областей с точностью до соответствующих преобразований является только система точек $-a$, a и полукругов в U, симметричных относительно мнимой оси. При этом $a = \sqrt{\sqrt{5} - 2}$ в первом случае и величина a определяется соотношением между параметрами α, β и γ во втором.

Отметим, что в том случае, когда параметры α, β, γ задачи 3 равны друг другу:

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2n-1},$$

квадрат функционала (2) преобразуется к виду

$$\prod_{j=1}^{2n} R(D_j, a_j) \left\{ \prod_{1 \leqslant k < j \leqslant 2n} |a_k - a_j| \right\}^{-\frac{2}{2n-1}},$$

где $a_1, \ldots, a_{2n}$; $D_1, \ldots, D_{2n}$ – система симметричных относительно окружности C точек и областей, введенная выше. Этот частный случай задачи 3 рассматривался в работах [4] и [5]. Как показано в [5], в этом случае дифференциал (3), определяющий экстремальную систему областей задачи 3, имеет на окружности C при всех $n \geqslant 2$ нули только второго порядка. Геометрически это означает, что пересечение границы каждой из областей экстремального разбиения с окружностью C не содержит изолированных точек.

Цель настоящей работы – установить, что экстремальные разбиения круга U в некоторых случаях обладают следующим геометрическим свойством:

Граница ни одной из областей экстремального разбиения не может содержать всю окружность C.

Так как число областей экстремального разбиения, имеющих на своих границах дуги окружности C, не превосходит числа различных нулей дифференциала (3), лежащих на C, то это свойство в задачах 2 и 3 вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 1. *Квадратичный дифференциал* (3), *определяющий экстремальную систему областей задачи* 2, *имеет на окружности* C *не менее двух различных нулей.*

Теорема 2. *Если параметры* α, β, γ *в задаче 3 удовлетворяют условию* $\alpha \leqslant \beta + \gamma$, *то квадратичный дифференциал* (3), *определяющий экстремальную систему областей задачи* 3, *имеет на окружности* C *не менее двух различных нулей.*

Отметим, что утверждение теоремы 2, в частности, справедливо в случае, рассмотренном в работах [4] и [5], когда значения α, β, γ равны друг другу.

§2. Доказательство теорем 1 и 2

1^0. Докажем предварительно следующую лемму, представляющую и самостоятельный интерес, так как она дает оценку конформного модуля "объемлющей" двусвязной области *сверху*, в отличие от известной леммы Гретша (см., например, [6]). Будем придерживаться терминологии, принятой в [6] и использовать следующие обозначения: $K(r, R) = \{r < |z| < R\}$, $U_R = \{|z| < R\}$, $C_r = \{|z| = r\}$, $\Gamma(D)$ – семейство кривых, разделяющих граничные компоненты двусвязной области D, $m(D)$ – модуль двусвязной области D относительно семейства кривых $\Gamma(D)$, $m(D, a)$ – приведенных модуль односвязной области D относительно точки $a \in D$.

Лемма 1. *Пусть* $r < 1$. *Пусть* $D^+ \subset \mathbb{C} \setminus U_r$ *– ограниченная двусвязная область, одной из граничных компонент которой является окружность* C_r, *и пусть* D^- *– та из связных компонент множества* $K(r, 1) \cap D^+$, *одной из граничных компонент которой является* C_r. *Тогда*

$$m(D^+) \leqslant m(D^-) + \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{D^+ \setminus U} \frac{dx\, dy}{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Если $D^+ \setminus U \neq \varnothing$, *то равенство в* (5) *имеет место только в том случае, когда* D^+ *– кольцо:* $D^+ = K(r, R)$, *где* $R > 1$.

Доказательство. Пусть $R > 1$, $D^+ \subset K(r, R)$, $D^+ \setminus U \neq \varnothing$. Отметим, что, в силу условия леммы, D^- – двусвязная область. Применим способ рассуждений, использованный в [7] для доказательства аналогичного факта. Как известно (см., например, [6]), экстремальной метрикой проблемы модуля для семейства кривых $\Gamma(K(1,R))$ является метрика

$$\rho_0(z)|dz| = \frac{|dz|}{2\pi|z|}.$$

Пусть $\rho^-(z)|dz|$ – экстремальная метрика проблемы модуля для семейства кривых $\Gamma(D^-)$. По лемме о граничном искажении [7],

$$\rho^-(z) \leqslant \rho_0(z) \tag{6}$$

для всех $z \in \overline{D^-} \cap C$.

Положим

$$\rho^+(z) = \begin{cases} \rho^-(z), & z \in D^-, \\ \rho_0(z), & z \in \overline{K(1,R)}, \\ 0, & z \in D^+ \setminus (\overline{K(1,R)} \cup D^-). \end{cases}$$

Покажем, что $\rho^+(z)|dz|$ – допустимая метрика проблемы модуля для семейства кривых $\Gamma(D^+)$. Пусть $\gamma \in \Gamma(D^+)$ – аналитическая жорданова кривая. Если $\gamma \cap C = \varnothing$, то либо $\gamma \in \Gamma(D^-)$, следовательно,

$$\int\limits_\gamma \rho^+(z)|dz| = \int\limits_\gamma \rho^-(z)|dz| \geqslant 1,$$

либо $\gamma \in \Gamma(K(1,R))$, следовательно,

$$\int\limits_\gamma \rho^+(z)|dz| = \int\limits_\gamma \rho_0(z)|dz| \geqslant 1.$$

Пусть теперь $\gamma \cap C \neq \varnothing$. Рассмотрим внутренность G кривой γ, и пусть G' – связная компонента множества $G \cap D^-$, одной из граничных компонент которой является окружность C_r. Тогда G' – двусвязная область. Пусть γ' – ее внешняя граничная компонента. Так как $\rho^-(z)|dz|$ – экстремальная метрика в D^-, то

$$\int\limits_{\gamma'} \rho^-(z)|dz| \geqslant 1. \tag{7}$$

Будем говорить, что жорданова дуга $\delta \subset K(r,R)$ стягивается дугой τ окружности C, если концы этих дуг совпадают, а $\overline{\tau \cup \delta}$ является замкнутым жордановым контуром, ограничивающим на

$K(r,R)$ односвязную область. Так как $\gamma\cap C\neq\varnothing$, то множество $\gamma'\backslash\gamma$ является объединением конечного семейства T непересекающихся дуг $\tau_1,\tau_2,\ldots$ окружности C. Концы каждой дуги τ_k семейства T разбивают кривую γ на две дуги. Пусть γ_k – та из этих дуг, которая стягивается дугой τ_k. Тем самым каждой дуге τ_k семейства T ставится в соответствие определенная дуга $\gamma_k\subset\gamma$. При этом для любой дуги τ_j семейства T, отличной от τ_k, имеем $\gamma_k\cap\gamma_j=\varnothing$.

Если $\gamma_k\subset\overline{K(1,R)}$, то используя (6) и тот факт, что дуга τ_k является геодезической в метрике $\rho_0(z)|dz|$, получаем

$$\int\limits_{\gamma_k}\rho^+(z)|dz|=\int\limits_{\gamma_k}\rho_0(z)|dz|\geqslant\int\limits_{\tau_k}\rho_0(z)|dz|\geqslant\int\limits_{\tau_k}\rho^-(z)|dz|. \tag{8}$$

В противном случае дуга γ_k разделяется окружностью C на конечное число дуг. По крайней мере одна из этих дуг, пусть дуга γ_k', содержится в кольце $K(1,R)$ и стягивается дугой τ_k' окружности C, содержащей дугу τ_k. Поэтому, как и в предыдущем случае, имеем

$$\int\limits_{\gamma_k}\rho^+(z)|dz|\geqslant\int\limits_{\gamma_k'}\rho^+(z)|dz|\geqslant\int\limits_{\tau_k'}\rho_0(z)|dz|\geqslant\int\limits_{\tau_k}\rho(z)|dz|\geqslant\int\limits_{\tau_k}\rho^-(z)|dz|. \tag{9}$$

Из (7)–(9) вытекает

$$\int\limits_{\gamma}\rho^+(z)|dz|\geqslant 1,$$

следовательно, метрика $\rho^+(z)|dz|$ допустима. Поэтому

$$m(D^+)\leqslant\iint\limits_{D^+}(\rho^+(z))^2dx\,dy= \tag{10}$$

$$=\iint\limits_{D^-}(\rho^-(z))^2dx\,dy+\iint\limits_{D^+\backslash U}(\rho_0(z))^2dx\,dy=m(D^-)+\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{D^+\backslash U}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}.$$

Если D^+ – кольцо, то экстремальной метрикой в D^+ и D^- является метрика $\rho_0(z)|dz|$ и в (10) имеет место равенство. Обратно, если в неравенстве (10) имеет место равенство, то метрика $\rho^+(z)|dz|$ является экстремальной в D^+. Если при этом

$D^+ \setminus U \neq \varnothing$, то на множестве $C \cap \partial D^-$ метрики $\rho^-(z)|dz|$ и $\rho_0(z)|dz|$ должны совпадать. По упомянутой выше лемме о граничном искажении, это возможно только в случае $D^- = K(r,1)$. В этом случае метрика $\rho_0(z)|dz|$ является экстремальной метрикой в D^-, следовательно, окружности $|z| = r'$, $r < r' < 1$, являются геодезическими в метрике $\rho^+(z)|dz|$. Последнее возможно только в том случае, когда D^+ – кольцо. Доказательство закончено.

Если $r < 1 < R$, $D^+ \subset K(r,R)$, то

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{D^+ \setminus U} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{K(1,R)} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = m(K(1,R)).$$

Поэтому справедливо

Следствие 1. *Пусть $r < 1 < R$. Пусть D^+ – двусвязная область, одной из граничных компонент которой является окружность C_r. Пусть $D^+ \subset K(r,R)$ и пусть D^- – та из связных компонент множества $K(r,1) \cap D^+$, одной из граничных компонент которой является C_r. Тогда*

$$m(D^+) \leqslant m(D^-) + m(K(1,R)).$$

Равенство в этом неравенстве имеет место только в случае $D^+ = K(r,R)$.

Переходя в лемме 1 и следствии 1 к пределу при $r \to 0$, получаем также

Следствие 2. *Пусть D^+ – ограниченная односвязная область, $0 \in D^+$, и пусть D^- – связная компонента множества $U \cap D^+$, $0 \in D^-$. Тогда*

$$m(D^+,0) \leqslant m(D^-,0) + \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{D^+ \setminus U} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}.$$

Если $D^+ \setminus U \neq \varnothing$, то равенство в этом неравенстве имеет место только для $D^+ = U_R$, где $R > 1$.

Следствие 3. *Пусть $R > 1$. Пусть D^+ – односвязная область, $0 \subset D^+ \subset U_R$, и пусть D^- – связная компонента множества $U \cap D^+$, $0 \in D^-$. Тогда*

$$m(D^+,0) \leqslant m(D^-,0) + m(K(1,R)).$$

Равенство в этом неравенстве имеет место только для $D^+ = U_R$.

2^0. **Доказательство теоремы 2.** Пусть $a_1, \dots, a_n$; $D_1, \dots, D_n$ – экстремальная система точек и областей задачи 2, $\mathcal{Q}(z)dz^2$ – дифференциал (3), определяющий экстремальную систему областей. Предположим, что $\mathcal{Q}(z)dz^2$ имеет на окружности C только один нуль $z = z_0$. Тогда окружность C является подмножеством границы одной из областей экстремального семейства, пусть это будет область D_1.

Пусть $a'_1, \dots, a'_n$; $D'_1, \dots, D'_n$ – образ экстремальной системы точек и областей при гиперболическом движении

$$\sigma(z) = \frac{z - a_1}{1 - \bar{a}_1 z}.$$

Пусть порядок нуля $z = z_0$ дифференциала $\mathcal{Q}(z)dz^2$ равен $2k$. Выберем $\varepsilon > 0$ настоялько малым, чтобы при $\lambda = 1 + \varepsilon$ кольцо $K_\varepsilon = K(\lambda^{-1}, 1)$ не содержало точек $a'_2, \dots, a'_n$, а множество $K_\varepsilon \cap \sigma(\bar{\Phi})$ состояло из k непересекающихся дуг, соединяющих точку $z'_0 = \sigma(z_0)$ с окружностью $C_\varepsilon = \{|z| = \lambda^{-1}\}$. Тогда каждое из множеств $D''_j = D'_j \setminus K_\varepsilon$, $j = 1, \dots, n$, является односвязной областью, содержащей точку a'_j. Полагая

$$\omega(z) = \sigma^{-1}(\lambda(z)), \quad a^*_j = \omega(a'_j), \quad D^*_j = \omega(D''_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

получаем варьированную систему точек $a^*_1, \dots, a^*_n$ и областей $D^*_1, \dots, D^*_n$, допустимую в задаче 2.

Сравним значения функционала (1) для экстремальной и варьированной систем точек и областей. Имеем $a^*_1 = a_1$,

$$m(D'_1, 0) = m(D_1, a_1) + \frac{1}{2\pi} \log |\sigma'(a_1)|,$$
$$m(D^*_1, a_1) = m(D''_1, 0) + \frac{1}{2\pi} \log |\omega'(0)|.$$

В силу следствия 2,

$$m(D''_1, 0) > m(D'_1, 0) - m(K_\varepsilon) = m(D'_1, 0) - \frac{1}{2\pi} \log \lambda.$$

Следовательно,

$$m(D^*_1, a_1) > m(D_1, a_1) + \frac{1}{2\pi} \log |\tau'(a_1)| - \frac{1}{2\pi} \log \lambda,$$

где $\tau(z) = \sigma^{-1}(\lambda\sigma(z))$ – дробно-линейное преобразование z-сферы. Так как $\tau'(a_1) = \lambda$, то

$$m(D_1^*, a_1) > m(D_1, a_1).$$

Чтобы оценить приведенные модули остальных областей, заметим, что $a_j^* = \tau(a_j)$, $D_j^* = D_j^+ \cap U$, где $D_j^+ = \tau(D_j)$, $j = 2, \dots, n$. Имеем

$$\tau'(z) = \frac{\lambda(1 - |a_1|^2)^2}{[(1 - \lambda|a_1|^2) + \bar{a}_1(\lambda - 1)z]^2}.$$

Можем ограничиться значениями ε, для которых $\lambda|a_1|^2 < 1$. Тогда для любой точки z круга U

$$|\tau'(z)| \geqslant \frac{\lambda(1 - |a_1|^2)^2}{[(1 - \lambda|a_1|^2) + |a_1|(\lambda - 1)]^2} = \frac{\lambda(1 + |a_1|)^2}{(1 + \lambda|a_1|)^2} = \\ = 1 + \frac{(\lambda - 1)(1 - \lambda|a_1|^2)}{(1 + \lambda|a_1|)^2},$$

следовательно,

$$\log|\tau'(z)| = p\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{11}$$

где

$$p = \frac{1 - |a_1|^2}{(1 + |a_1|)^2} > 0. \tag{12}$$

Таким образом, при всех $j \geqslant 2$

$$m(D_j^+, a_j^*) = m(D_j, a_j) + \frac{1}{2\pi}\log|\tau(a_j)| > m(D_j, a_j) \tag{13}$$

и, если $D_j^+ \setminus U = \varnothing$, то

$$m(D_j^*, a_j^*) > m(D_j, a_j).$$

Пусть теперь для некоторого $j \geqslant 2$ множество $G_j = D_j^+ \setminus U$ непусто. Тогда $z = z_0$ – нуль дифференциала $\mathcal{Q}(z)dz^2$ порядка $2k \geqslant 4$, а точка $z_0^* = \tau(z_0)$ является носителем по крайней мере одного граничного элемента области D_j^+. Рассмотрим конформное отображение $w = f(z)$ области D_j^+ на круг $|w| < 1$, нормированное условием $f(a_j^*) = 0$. В силу локальной структуры траекторий квадратичных дифференциалов (см., например, [6]), в окрестности каждого граничного элемента области D_j^+ с носителем в точке z_0^* имеет место асимптотическое равенство

$$f(z) = c(z - z_0^*)^{k+1} + o((z - z_0^*)^{k+1}),$$

где $c \neq 0$, а множество G_j при достаточно малых ε содержится в круге радиуса $r = O(\varepsilon)$ с центром в точке z_0^*. Поэтому $f(G_j) \subset \{1 - \delta < |w| < 1\}$, где $\delta = O(\varepsilon^{k+1})$. Следовательно,

$$m(D_j^+, a_j^*) - m(D_j^*, a_j^*) \leqslant \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{(1-\delta)} = O(\varepsilon^{k+1}),$$

и из (11)–(13) вытекает, что

$$m(D_j^*, a_j^*) > m(D_j, a_j). \tag{14}$$

Таким образом, неравенство (14) справедливо при всех $j \geqslant 1$, следовательно,

$$\sum_{j=1}^n m(D_j^*, a_j^*) > \sum_{j=1}^n m(D_j, a_j).$$

Переписывая это неравенство в терминах конформных радиусов, получаем неравенство

$$\prod_{j=1}^n R(D_j^*, a_j^*) > \prod_{j=1}^n R(D_j, a_j).$$

Так как это неравенство противоречит экстремальности исходной системы точек и областей, то теорема 1 доказана.

3^0. **Доказательство теоремы 2.** Пусть $a_1, \dots, a_n$, $D_1, \dots, D_n$ – экстремальная система точек и областей задачи 3, $\mathcal{Q}(z)dz^2$ – дифференциал (3), определяющий экстремальную систему областей. Предположим, что $\mathcal{Q}(z)dz^2$ имеет на окружности C только один нуль $z = z_0$ и пусть порядок этого нуля равен $2k$. Пусть D_1 – та из экстремальных областей, граница которой содержит окружность C. Так как функционал (2) является конформным инвариантом, то можем предположить, что $a_1 = 0$.

Как и при доказательстве теоремы 1, выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы при $\lambda = 1 + \varepsilon$ кольцо $K_\varepsilon = K(\lambda^{-1}, 1)$ не содержало точек $a_2, \dots, a_n$, а множество $K_\varepsilon \cap \bar{\Phi}$ состояло из k

непересекающихся дуг, соединяющих точку z_0 с окружностью $C_\varepsilon = \{|z| = \lambda^{-1}\}$. Полагая

$$a_j^* = \lambda a_j, \quad D_j' = \lambda D_j, \quad D_j^* = D_j' \cap U, \quad j = 1, \dots, n,$$

получаем варьированную систему точек $a_1^*, \dots, a_m^*$ и областей $D_1^*, \dots, D_n^*$, допустимую в задаче 3.

Пусть J и J^* – значения функционала (2) соответственно для экстремальной и варьированной систем точек и областей. Перейдем к сравнению этих значений. Имеем

$$m(D_j', a_j') = m(D_j, a_j) + \frac{1}{2\pi} \log \lambda, \tag{15}$$

$j = 1, \dots, n$. Пусть сначала $K_\varepsilon \subset \bar{D}_1$ (этот случай, в силу выбора ε, заведомо будет иметь место, если $k = 1$). Тогда $D_j^* = D_j'$, $j = 2, \dots, n$. Используя (15) и следствие 3, получаем

$$m(D_1^*, 0) > m(D_1', 0) - m(K_\varepsilon) = m(D_1, 0).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n m(D_j^*, a_j^*) > \frac{n-1}{2\pi} \log \lambda + \sum_{j=1}^n m(D_j, a_k), \tag{16}$$

или, в терминах конформных радиусов,

$$\prod_{j=1}^n R(D_j^*, a_j^*) > \lambda^{n-1} \prod_{j=1}^n R(D_j, a_j). \tag{17}$$

Пусть теперь множество $G = K_\varepsilon \setminus \bar{D}_1$ не пусто. Тогда $k \geqslant 2$ и, в силу локальной структуры траекторий квадратичных дифференциалов,

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\bar{G}} \frac{dx\, dy}{x^2 + y^2} = p\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

где $p > 0$. Используя (15) и следствие 2, получаем

$$m(D_1^*, 0) > m(D_1', 0) - \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{K_\varepsilon \setminus \bar{G}} \frac{dx\, dy}{x^2 + y^2} = m(D_1, 0) + p\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2). \tag{18}$$

Пусть $j \geqslant 2$. Если $D_j \cap G = \varnothing$, то из (15) получаем

$$m(D_j^*, a_j^*) = m(D_j, a_j) + \frac{1}{2\pi} \log \lambda. \tag{19}$$

В противном случае, как и при доказательстве теоремы 1,

$$m(D'_j, a'_j) - m(D^*_j, a^*_j) = O(\varepsilon^{k+1}),$$

следовательно,

$$m(D^*_j, a^*_j) = m(D_j, a_j) + \frac{1}{2\pi}\log\lambda + O(\varepsilon^{k+1}). \tag{20}$$

Из (18)–(20) вытекает, что при достаточно малых ε неравенства (16) и (17) справедливы и в этом случае.

Сравним теперь значения остальных сомножителей функционала (2). Имеем:

$$\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}|a^*_j - a^*_k| = \prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}[\lambda|a_j - a_k|] = \lambda^{m(n-1)/2}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}|a_j - a_k|, \tag{21}$$

$$\prod_{j=1}^{n}(1-|a^*_j|^2) < \prod_{j=1}^{n}(1-|a_j|^2). \tag{22}$$

Можем ограничиться значениями ε, для которых $\lambda|a_j a_k| < 1$ при любых $1 \leqslant j,\ k \leqslant n$. Тогда

$$|1-\bar{a}^*_j a^*_k|^2 - \lambda^2|1-\bar{a}_j a_k|^2 = -(\lambda^2-1)(1-\lambda^2|\bar{a}_j a_k|^2) < 0,$$

следовательно,

$$\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}|1-\bar{a}^*_j a^*_k| < \\ < \prod_{2\leqslant j<k\leqslant n}[\lambda|1-\bar{a}_j a_k|] = \lambda^{(n-1)(n-2)/2}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}|1-\bar{a}_j a_k|. \tag{23}$$

Следствием условий $(n-1)(\alpha+\beta)+\gamma = 1$ и $\alpha \leqslant \beta+\gamma$ является неравенство

$$n(n-1)\alpha + (n-1)(n-2)\beta \leqslant n-1. \tag{24}$$

Из (21)–(24) и (17) получаем

$$J^* > J.$$

Это неравенство противоречит экстремальности исходной системы точек и областей и доказывает теорему 2.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
2. М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений,* Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР **5** (1934), 195–246.
3. П. П. Куфарев, *Об одной экстремальной задаче для дополнительных областей,* Докл. АН СССР **73**, No. 6 (1947), 881–884.
4. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей в круге,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **125** (1983), 99–113.
5. В. О. Кузнецов, *О свойствах ассоциированных квадратичных дифференциалов в некоторых экстремальных задачах,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 85–97.
6. Дж. Дженкинс, *Однолистные отображения,* М, 1962.
7. А. Ю. Солынин, *Геометрические свойства экстремальных разбиений и оценки модулей семейств кривых в круговом кольце,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 93–114.

С.-Петербургский государственный
университет водных коммуникаций

Поступило 20 декабря 1996 г.