А. Ю. Солынин

РАДИАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ И МЕТРИКА ПУАНКАРЕ

1. Введение и основные результаты

В работе рассматриваются области $D \subset \bar{\mathbb{C}}$, дополнение которых содержит не менее трех точек. Как известно, такие области имеют единичный круг $U = \{z : |z| < 1\}$ в качестве универсальной накрывающей поверхности. Если $\pi : U \to D$ – универсальное накрывающее отображение, то метрика Пуанкаре λ_D области D определяется уравнением

$$\lambda_D(\pi(z))|\pi'(z)| = 1/(1 - |z|^2), \quad z \in U, \quad w = \pi(z) \neq \infty;$$

в случае $w = \infty$ полагаем $\lambda_D(\infty) = \lambda_{D^{-1}}(0)$, где $D^{-1} = \{z : z^{-1} \in D\}$. В техническом отношении нам удобнее использовать открытые не обязательно связные множества; на таких множествах метрика Пуанкаре определяется покомпонентно.

В комплексном анализе метрика Пуанкаре является мощным инструментом решения различных экстремальных задач. В большинстве случаев используются оценки этой метрики, полученные симметризационными методами, см. [1–3]. Настоящая работа примыкает к указанному кругу исследований.

Далее через E_{rad}, E_{circ} и E_x обозначаем, соответственно, круговую проекцию произвольного множества $E \subset \bar{\mathbb{C}}$ на отрицательную вещественную полуось $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}$, радиальную проекцию множества $E \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ на единичную окружность $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1$, где $\mathbb{T}_r = \{z : |z| = r\}$, $r > 0$, и ортогональную проекцию E на вещественную ось $\mathbb{R}$.

Следующее утверждение является частным случаем более общего результата А. Вейтсмана [1].

Теорема А ([1], см. также [3]). *Пусть $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D$ – дополнение*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 97–01–00259) и министерства образования Финляндии (CIMO program).

области D до сферы $\bar{\mathbb{C}}$. Если $D^{\mathrm{rad}} = \bar{\mathbb{C}} \setminus E_{\mathrm{rad}}$, то

$$\lambda_D(z_0) \geqslant \lambda_{D^{\mathrm{rad}}}(r) \tag{1.1}$$

для любой точки $z_0 \in D$ такой, что $|z_0| = r \geqslant 0$.

Равенство в (1.1) достигается при $r > 0$ только в случае $D = e^{i \arg z_0} D^{\mathrm{rad}}$, при $r = 0$ – только в случае $D = e^{i\alpha} D^{\mathrm{rad}}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$.

Неравенство (1.1) доказано Вейтсманом [1], а утверждение о случаях равенства в (1.1) – автором [3].

Одна из целей настоящей заметки – получить оценку метрики Пуанкаре λ_D, выраженную в терминах радиальной проекции E_{circ} множества $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D$ на окружность $\mathbb{T}$. Таким образом, наша задача в определенном смысле двойственна задаче, рассмотренной в [1].

Теорема 1. *Пусть D – область, $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D \subset \bar{U} \setminus \{0\}$ и пусть $D^{\mathrm{circ}} = \bar{\mathbb{C}} \setminus E_{\mathrm{circ}}$. Тогда*

$$\lambda_D(0) \geqslant \lambda_{D^{\mathrm{circ}}}(0). \tag{1.2}$$

Равенство в (1.2) имеет место тогда и только тогда, когда $E \subset \mathbb{T}$.

Следствие 1. *Если в предположениях теоремы 1 $|E_{\mathrm{circ}}| = \alpha > 0$, где $|\cdot|$ означает линейную меру Лебега, то*

$$\lambda_D(0) \geqslant \lambda_{D(\alpha)}(0) = \sin(\alpha/4),$$

где $D(\alpha) = \overline{\mathbb{C}} \setminus E(\alpha)$ и $E(\alpha) = \{e^{i\theta} : |\theta| \leqslant \alpha/2\}$.

Равенство достигается только при условии $E = e^{i\beta} E(\alpha)$, где $\beta \in \mathbb{R}$.

В случае ортогональных проекций мы имеем следующую теорему, в которой $\Pi(h) = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < h\}$.

Теорема 2. *Пусть $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D \subset \bar{\Pi}(2) \setminus \{i\}$ и пусть $D^x = \bar{\mathbb{C}} \setminus E_x$. Тогда*

$$\lambda_D(i) \geqslant \lambda_{D^x}(i).$$

Равенство достигается только при условии $E \subset \mathbb{R}$.

В современных исследованиях симметризационные результаты часто используются в сочетании с оценками произведений конформных радиусов (внутренних радиусов) попарно induced неналегающих областей. В идейном плане оценки таких произведений восходят к классическому результату М. А. Лаврентьева [4], который можно переформулировать в следующем виде.

Теорема B ([4], см. также [5, с. 32]). *Пусть f и g, соответственно, регулярная и мероморфная в круге U функции, имеющие в окрестности точки $z = 0$ разложения*

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad g(z) = b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + \dots. \tag{1.3}$$

Если области $f(U)$ и $g(U)$ не налегают, т.е. $f(U) \cap g(U) = \varnothing$, то

$$|a_1 b_{-1}| \leqslant 1. \tag{1.4}$$

Равенство в (1.4) достигается только для пар вида $f(z) = a_1 z$, $g(z) = e^{i\beta}/a_1 z$, где $a_1 \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Условия теоремы B означают, что объединение областей $f(U) \cup g(U)$ лежит в некотором открытом множестве D таком, что $E_{\mathrm{circ}} = \mathbb{T}$, где $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D$. Наше следующее утверждение существенно усиливает как теорему B, так и другие известные результаты такого рода.

Теорема 3. *Пусть $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ – открытое множество, содержащее точки $w = 0$ и $w = \infty$. Пусть проекция E_{circ} множества $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D$ содержит не менее трех точек и при этом $|E_{\mathrm{circ}}| = \alpha \geqslant 0$. Пусть $F_{\mathrm{circ}}(z)$ – универсальное накрывающее отображение множества D такое, что $F_{\mathrm{circ}}(0) = 0$. Если f и g – соответственно регулярная и мероморфная в круге U функции, имеющие разложения (1.3) и такие, что $f(U) \subset D$, $g(U) \subset D$, то*

$$|a_1|\,|b_{-1}| \leqslant |F'_{\mathrm{circ}}(0)|^2 \leqslant \operatorname{cosec}^2(\alpha/4). \tag{1.5}$$

Равенство в первом из неравенств (1.5) имеет место только при условии $E \subset \mathbb{T}_r$ при некотором $r > 0$ и при этом только для функций f и g, осуществляющих универсальное накрытие множества D и нормированных условиями $f(0) = 0$, $g(0) = \infty$. Если $\alpha > 0$, то равенство во втором неравенстве в (1.5) достигается только в случае $E_{\mathrm{circ}} = aE(\alpha)$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

В основе доказательства всех приведенных выше утверждений лежит теорема автора об изменении метрики Пуанкаре при поляризации [3, теорема 9]. Ниже мы приводим переформулировку этой теоремы для случая поляризации относительно окружностей.

Под поляризацией множества $A \subset \bar{\mathbb{C}}$ относительно вещественной оси понимается множество

$$P_{\mathbb{R}} A = ((A \cup A^*) \cap \bar{\mathbb{H}}) \cup ((A \cup A^*) \cap \mathbb{H}_-),$$

где $A^* = \{z : \bar{z} \in A\}$, $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{H}_- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{H}$.

Поляризация множества A относительно произвольной ориентированной окружности L, лежащей на сфере $\bar{\mathbb{C}}$, определяется соотношением

$$P_L A = \varphi^{-1}(P_{\mathbb{R}}(\varphi(A)),$$

где φ – произвольный мёбиусов автоморфизм $\bar{\mathbb{C}}$, отображающий L на $\mathbb{R}$ и сохраняющий ориентацию. Преобразование поляризации введено В. Волонтисом [6], оно эффективно использовалось в серии работ В. Н. Дубинина, см. [7].

В следующей теореме L – неориентированная окружность с центром $z_0 \in \mathbb{C}$ и радиусом R, $0 < R < \infty$; L^+ и L^- – окружность L, снабженная положительной и отрицательной ориентацией, соответственно; z^*, A^* – точка и множество, симметричные точке z или множеству A относительно окружности L. Через $\Omega(z)$ обозначается связная компонента открытого множества Ω, содержащая точку $z \in \Omega$.

Теорема C (см. с теорему 9 в [3]). *Пусть D_1 и D_{-1} обозначают поляризацию произвольного открытого множества D относительно окружностей L^+ и L^-, соответственно. Тогда*

$$\lambda_{D_1}(z) \leqslant \min\{\lambda_D(z),\, \lambda_D(z^*)|z-z_0|^2/R^2\} \quad \forall z \in D_1 \cap \overline{U_R(z_0)}, \tag{1}$$

$$\lambda_{D_{-1}}(z) \leqslant \min\{\lambda_D(z),\, \lambda_D(z^*)R^2/|z-z_0|^2\} \quad \forall z \in D_{-1} \setminus U_R(z_0), \tag{2}$$

$$\lambda_{D_1}(z)\lambda_{D_1}(z^*) = \lambda_{D_{-1}}(z)\lambda_{D_{-1}}(z^*) \leqslant \lambda_D(z)\lambda_D(z^*) \quad \forall z : z, z^* \in D. \tag{3}$$

Равенство $\lambda_{D_k}(z) = \lambda_D(z)$ (в соответствующем из соотношений (1) или (2)) имеет место только при условии $D_k(z) = D(z)$, $k = -1, 1$; равенство $\lambda_{D_k}(z) = \lambda_D(z^*)(|z-z_0|^2/R^2)^k$ – только при условии $D_k(z) = (D_k(z^*))^*$. Равенство в (3) достигается только при совпадении пар областей $D_1(z)$, $D_1(z^*)$ и $D(z)$, $D(z^*)$.

Если L – прямая, то утверждения теоремы C остаются справедливыми, если в (1) и (2) положить $|z-z_0|/R = 1$.

Указанные выше результаты дают нижнюю оценку метрики Пуанкаре. В противоположность этому, следующая теорема, решающая интересную, на наш взгляд, экстремальную задачу, дает верхнюю оценку этой метрики. Через $\lambda(z; a_1, \dots, a_n)$ обозначаем метрику Пуанкаре сферы $\bar{\mathbb{C}}$, проколотой в попарно различных точках $a_1, \dots, a_n$, $n \geqslant 3$.

Теорема 4. *Функция* $\lambda(0; e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n})$ *вещественных переменных* φ_k, $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \dots \leqslant \varphi_n \leqslant \varphi_1 + 2\pi$, *достигает максимума только при условии*

$$(1) \qquad e^{i\varphi_k} = e^{i\beta} a_k^*, \text{ где } \beta \in [0, 2\pi) \text{ и } a_k^* = e^{2\pi i (k-1)/n}, \; k = 1, \dots, n.$$

Таким образом,

$$(2) \qquad \lambda(0; e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}) \leqslant \lambda(0; a_1^*, \dots, a_n^*) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера, и равенство здесь достигается только в указанном случае.*

Теорема 4 имеет диссимметризационный характер; она является следствием основного результата работы [8].

Настоящая статья завершена во время моего пребывания в университете г. Хельсинки по программе CIMO. Автор благодарен сотрудникам математического департамента этого университета за идеальные условия для работы и Матти Вуоринену за многие полезные обсуждения.

2. Доказательство теорем 1 и 2

Аппроксимируем область D последовательностью подобластей $D_1, D_2, \dots$ таких, что

$$\bar{\mathbb{C}} \setminus \bar{U} \subset D_1 \subset D_2 \subset \dots \quad \text{и} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D;$$

при этом считаем, что каждая из областей D_n ограничена конечным числом замкнутых жордановых кривых, каждая из которых состоит из конечного числа дуг, лежащих на окружностях с центром в точке $z = 0$, и конечного числа радиальных отрезков, каждый из которых соединяет соответствующую пару указанных дуг.

Пусть λ_n – метрика Пуанкаре области D_n. Тогда $\lambda_n \to \lambda_D$ равномерно на компактных подмножествах D, см. [9, с. 297]. Поэтому при доказательстве неравенства (1.2) мы можем считать, что область D сама ограничена указанными выше круговыми дугами и радиальными сегментами, так как если неравенство (1.2) не выполняется для области D, то оно не выполняется и для всех областей D_n при достаточно больших n.

Пусть D – область указанного выше вида. Далее мы построим конечную последовательность областей $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_N$. Область Ω_0 выбирается таким образом, что ее граница $\partial\Omega_0$ состоит из круговых дуг γ^{0j}, $j = 1, \dots, M_0$, которые лежат на границе ∂D и удовлетворяют следующим условиям при $s = 0$:

(a) $((\gamma^{sj})_{\mathrm{circ}}) \bigcap ((\gamma^{sk})_{\mathrm{circ}})$ не имеет внутренних точек, если $j \neq k$;

(b) $E_{\mathrm{circ}} = (F^s)_{\mathrm{circ}}$, где $F^s = \bigcup\limits_1^{M_s} \gamma^{sj}$.

Очевидно, что такая область Ω_0 существует. Кроме того,

$$\lambda_{\Omega_0}(z) \leqslant \lambda_D(z) \quad \forall z \in D, \tag{2.1}$$

так как метрика Пуанкаре убывает при расширении области.

Пусть M_0', $0 \leqslant M_0' \leqslant M_0$, – число дуг γ^{0j}, лежащих в круге U. Равенство $M_0' = 0$ означает, что $D^{\mathrm{circ}} = \Omega_0$; в этом случае (1.2) эквивалентно неравенству (2.1).

Если $M_0' > 0$, то существует дуга γ^{0j_0}, имеющая наименьший радиус r_0, $0 < r_0 < 1$, среди всех дуг γ^{0j}. Определим область Ω_1 как объединение поляризации $P_L(\Omega_0)$ области Ω_0 относительно окружности $L = \mathbb{T}_{\rho_0}$, где $\rho_0 = r_0^{1/2}$, ориентированной в положительном направлении, и множества всех изолированных граничных точек множества $P_L(\Omega_0)$ (последнее множество может быть пустым).

По теореме C и свойству монотонности метрики Пуанкаре,

$$\lambda_{\Omega_s}(0) \leqslant \lambda_{\Omega_{s-1}}(0), \tag{2.2}$$

если $s = 1$.

Легко видеть, что $\partial\Omega_1$ состоит из конечного числа дуг γ^{1j}, $j = 1, \dots, M_1$, удовлетворяющих условиям (a) и (b). Кроме того, если M_1' обозначает число дуг γ^{1j}, лежащих в U, то выполняется соотношение

$$0 \leqslant M_s' \leqslant M_{s-1}' \tag{2.3}$$

при $s = 1$.

Если $M_1' = 0$, то (1.2) следует из (2.1) и (2.2). Если $M_1' > 0$, то, продолжая описанную выше процедуру, будем строить области $\Omega_2, \dots, \Omega_N$ до тех пор, пока не придем к равенству $M_N' = 0$, где M_j' означает число граничных дуг области Ω_j, лежащих в U. В силу (2.3), число N таких шагов конечно.

Аргументы, использованные для обоснования неравенства (2.2) при $s = 1$, доказывают это неравенство и при всех s, $1 \leqslant s \leqslant N$. Теперь (1.2) следует из (2.1) и (2.2), так как $F^N = E_{\mathrm{circ}}$.

Для доказательства утверждения о равенстве в (1.2) предположим, что $\partial D \cap U \neq \varnothing$. Тогда $0 < d := \operatorname{dist}(0, \partial D) < 1$ и окружность $\mathbb{T}_d$ содержит по крайней мере одну точку $z_0 \in \partial D$. Пусть D_d – поляризация области D относительно положительно ориентированной окружности $\mathbb{T}_\rho$, где $\rho = d^{1/2}$. Так как $(\partial D_d)_{\mathrm{circ}} = (\partial D)_{\mathrm{circ}}$, то из (1.2) вытекает неравенство

$$\lambda_{D^{\mathrm{circ}}}(0) \leqslant \lambda_{D_d}(0). \tag{2.4}$$

Если $D_d \neq D$, то $\lambda_{D_d}(0) < \lambda_D(0)$ по утверждению о случаях равенства в теореме C. Это вместе с (2.4) влечет строгое неравенство в (1.2).

Предполагая, что $D_d = D$, рассмотрим открытое множество $D_0 = D \cup U_\rho$. Так как $z_0 \in D_0 \setminus D$, то $D \subset D_0$ и $D \neq D_0$. Следовательно,

$$\lambda_{D_0}(0) < \lambda_D(0) \tag{2.5}$$

в силу свойства строгой монотонности метрики Пуанкаре, как функции множества.

Очевидно, что $(\partial D_0)_{\mathrm{circ}} = (\partial D)_{\mathrm{circ}}$. Следовательно, $\lambda_{D^{\mathrm{circ}}}(0) \leqslant \lambda_{D_0}(0)$ согласно неравенству (1.2). Последнее неравенство вместе с неравенством (2.5) доказывает утверждение о случаях равенства в (1.2). $\square$

Следствие 1 вытекает непосредственно из теоремы 1 и теоремы A. Нахождение явного выражения для величины $\lambda_{D(\alpha)}(0)$ является элементарным упражнением, которое мы оставляем читателю.

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1, только соответствующие поляризации выполняются в этом случае относительно подходящих прямых, параллельных вещественной оси.

3. Доказательство теоремы 3

В силу принципа подчинения (см., например, [10, с. 227]) можем считать, что функции f и g осуществляют универсальное накрытие связных компонент $D(0)$ и $D(\infty)$ единичным кругом U

(напомним, что множество D не обязательно связно). Тогда имеем

$$|a_1| = \lambda_D^{-1}(0), \quad |b_{-1}|\lambda_D^{-1}(\infty). \tag{3.1}$$

Далее доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1. Именно, используя аппроксимацию, сначала показываем, что неравенство (1.5) достаточно доказать только для областей D, граница которых состоит из конечного числа дуг окружностей с центром в начале координат. Затем применяем поляризационную процедуру "выметания" граничных дуг области D на единичную окружность; детали такого построения мы опускаем. Отличие от доказательства теоремы 1 состоит лишь в том, что теперь радиусы окружностей, на которых лежат граничные дуги, могут быть произвольными положительными числами и вместо неравенства (1) теоремы C при каждой поляризации применяется неравенство (3) этой же теоремы. В результате мы получим неравенство

$$\lambda_{D^{\rm circ}}(0)\lambda_{D^{\rm circ}}(\infty) \leqslant \lambda_D(0)\lambda_D(\infty), \tag{3.2}$$

эквивалентное, в силу (3.1), неравенству (1.5).

Из (3.1) также следует, что утверждение о равенстве в первом неравенстве в (1.5) эквивалентно утверждению о равенстве в соотношении (3.2), которое доказывается точно так же, как аналогичное утверждение теоремы 1.

Второе из соотношений (1.5) вытекает из равенств (3.1) и теоремы A. □

Замечание. Результат М. А. Лаврентьева, сформулированный в теореме B, получил многочисленные обобщения, известные под названием теорем о произведении конформных радиусов неналегающих областей, см. [11, 5, 12]. К настоящему времени наиболее общие из результатов такого рода для произведения внутренних радиусов были получены В. Н. Дубининым [7, 13]. Применение теоремы C в сочетании с идеями работы [7] позволяет усилить некоторые из упомянутых результатов, заменив в них конформные или внутренние радиусы плотностями соответствующих гиперболических метрик, как это сделано в ходе доказательтства теоремы 3. Мы предполагаем рассмотреть эти вопросы в следующих публикациях.

4. Симметризация

Утверждения теорем 1–3 остаются в силе, если в их условиях проекцию граничных множеств заменить их подходящей симметризацией. Ниже приводятся формулировки соответствующих результатов. Мы опускаем доказательства указанных результатов, поскольку в основе этих доказательств, также как и доказательства теоремы 1, лежат идея Волонтиса [6] об аппроксимации симметризационных преобразований последовательностью поляризаций и теорема C об изменении метрики Пуанкаре при поляризации.

Пусть $A(\varphi)$ означает пересечение произвольного множества A с лучом $R(\varphi) = \{z = te^{i\varphi},\, t > 0\}$, и пусть $\operatorname{lm} A(\varphi) = \int_{A(\varphi)} |z|^{-1}|dz|$ – логарифмическая мера множества $A(\varphi)$.

Под симметризацией компакта $E \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ относительно окружности $\mathbb{T}_r$ понимается компакт $E^{(r)}$, удовлетворяющий условиям:

(a) $E^{(r)}(\varphi) = \varnothing \iff E(\varphi) = \varnothing$;

(b) если $E(\varphi) \neq \varnothing$, то $E^{(r)}(\varphi)$ – либо точка $z = re^{i\varphi}$, либо отрезок луча $R(\varphi)$, симметричный относительно окружности $\mathbb{T}_r$;

(c) $\operatorname{lm} E^{(r)}(\varphi) = \operatorname{lm} E(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

В теореме 5 D – произвольное открытое множество, $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D$, $D^{(r)} = \mathbb{C} \setminus E^{(r)}$, E^* – симметризация Штейнера множества E относительно $\mathbb{R}$, $D^{(*)} = \bar{\mathbb{C}} \setminus E^*$. При этом в утверждениях (a) и (c) этой теоремы предполагается, что $0, \infty \in D$.

Теорема 5. (a) *Если $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D \subset \bar{U}$, то*

$$\lambda_D(0) \geqslant \lambda_{D^{(1)}}(0).$$

(b) *Если $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D \subset \bar{\Pi}(2)$, то*

$$\lambda_D(0) \geqslant \lambda_{D^{(*)}}(0).$$

(c) *Если множество D и функции f и g удовлетворяют условиям теоремы 3, то*

$$|a_1|\,|b_{-1}| \leqslant |F_1'(0)|^2,$$

где F_1, $F_1(0) = 0$, – универсальное накрытие связной компоненты множества $D^{(1)}$, содержащей точку $w = 0$, кругом U.

Равенство в первом из неравенств теоремы достигается только в случае $E \subset \mathbb{T}$, во втором – только в случае $E \subset \bar{\mathbb{R}}$, в третьем – тогда и только тогда, когда $E^{(r)} = kE$ при некотором $k > 0$ и *функции f и g осуществляют универсальное накрытие компонент $D(0)$ и $D(\infty)$ кругом U.*

Под радиальной симметризацией (или симметризацией Маркуса [14]) области $D \ni 0$ понимается область $D^* = \{z = re^{i\theta}, 0 \leqslant r < R^*(\theta, D), 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, где $R^*(\theta, D) = \rho \exp\{\operatorname{lm}((D \setminus \bar{U}_\rho) \cap R(\theta)\}$, $\rho > 0$. Как известно, $R^*(\theta, D)$ не зависит от ρ, если $U_\rho \subset D$.

Теорема 6. *Если D^* – радиальная симметризация области $D \ni 0$, то*

$$\lambda_{D^*}(0) \leqslant \lambda_D(0).$$

Равенство здесь достигается только в случае $D^* = D$.

5. Дополнительные результаты

В этом параграфе рассматриваются области D, дополнения которых $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D$ лежат на отрезке $[-1, 1]$. Для метрики Пуанкаре таких областей удобно использовать обозначение $\lambda(z, E) = \lambda_D(z)$. В случае $E \subset (0, 1]$, $\operatorname{lm} E = l > 0$ применение методики, использованной при доказательстве теоремы 1, приводит к неравенству

$$\lambda(0, E) \geqslant \lambda(0, E_\rho) = \frac{1}{4}(e^l - 1), \tag{5.1}$$

где $\rho = e^{-l}$ и $E_r = [r, 1]$. При этом равенство в (5.1) достигается только при условии $E = E_\rho$.

Менее тривиальна задача о точной нижней оценке величины $\lambda(0, E)$ при условиях $E \subset [-1, 1] \setminus \{0\}$ и $|E| = 2m > 0$. Следующая теорема дает решение этой задачи для достаточно массивных множеств E.

Теорема 7. *Пусть $E \subset [-1, 1] \setminus \{0\}$ – компакт и пусть $|E| = 2m \geqslant 2 - \sqrt{3}/3$. Тогда*

$$\lambda(0, E) \geqslant \lambda(0, E_m^{(2)}), \tag{5.2}$$

где $E_m^{(2)} = [-1, -1 + m] \cup [1 - m, 1]$. Равенство в (5.2) достигается только в случае $E = E_m^{(2)}$.

Доказательство. Пусть $-E = \{z : -z \in E\}$, $F_1 = E \cap (-E)$, $F_2 = E \cup (-E)$ и пусть $|F_k| = 2m_k$. Так как $|F_1| + |F_2| = 2|E| \geqslant 2 - \sqrt{3}/3$, то $1 > m_2 \geqslant m_1 \geqslant 1 - \sqrt{3}/3$. Из теоремы 2 работы [15] следует, что

$$\lambda^2(0, E) \geqslant \lambda(0, F_1)\lambda(0, F_2), \tag{5.3}$$

причем равенство в (5.3) достигается только при условии $E = -E = F_1 = F_2$.

Пусть $\tilde{F}_k = \{z^2 : z \in F_k\}$ и пусть $\tilde{f}_k$, $\tilde{f}_k(0) = 0$, – универсальное накрытие области $\tilde{D}_k = \bar{\mathbb{C}} \setminus \tilde{F}_k$ кругом U. Тогда функция $\zeta = (\tilde{f}_k(z^2))^{1/2}$ осуществляет универсальное накрытие области $D_k = \bar{\mathbb{C}} \setminus F_k$ кругом U. Поэтому

$$\lambda^2(0, F_k) = \lambda(0, \tilde{F}_k), \quad k = 1, 2. \tag{5.4}$$

Пусть $l_k = \operatorname{lm} F_k$, $\tilde{l}_k = \operatorname{lm} \tilde{F}_k$. Тогда нетрудно показать, что $\tilde{l}_k = l_k \geqslant -2\log(1-m_k)$. Отсюда, учитывая (5.1) и (5.4), получаем

$$\log \lambda(0, F_k) \geqslant \frac{1}{2}\Phi(m_k) - \log 2,$$

где

$$\Phi(t) = \log(t(2-t)/(1-t)^2).$$

После элементарных вычислений находим

$$\Phi''(t) = \frac{-2(3t^2 - 6t + 2)}{t^2(1-t)^2(2-t)^2} > 0$$

при $1 - \frac{\sqrt{3}}{3} < t \leqslant 1$. Следовательно, на указанном интервале функция $\Phi(t)$ выпукла. Отсюда с учетом неравенств $1 > m_2 \geqslant m_1 \geqslant 1 - \sqrt{3}/3$, получаем неравенство

$$\log \lambda(0, F_1) + \log \lambda(0, F_2) \geqslant \Phi(m) - \log 4 = 2 \log \lambda(0, E_m^{(2)}). \tag{5.5}$$

В силу строгой выпуклости функции Φ равенство здесь достигается только в случае $m_1 = m_2$. Из неравенств (5.3), (5.5) и из указанных выше условий достижения равенства в них вытекает утверждение теоремы. □

Замечания. 1) В случае $|E| = 2m < 2 - \sqrt{3}/3$ точная оценка величины $\lambda(0, E)$ неизвестна; по-видимому, при достаточно малых m компакт $E_m^{(2)}$ уже не является экстремальным.

2) Рассмотренная в теореме 7 задача аналогична задаче С. Сегавы [16] о минимуме гармонической меры $\omega(0, E, U)$ компактов $E \subset [-1, 1]$, имеющих фиксированную меру. Для "полностью несимметричных" множеств E, т.е. в случае $E \cap (-E) = \varnothing$, решение задачи Сегавы получено Д. Бетсакосом [17], а в общем случае – автором [15].

6. Доказательство теоремы 4

Известно, что для любого набора чисел φ_k таких, что

$$0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n < \varphi_1 + 2\pi,$$

существует функция $\zeta = g(z)$, отображающая круг U конформно и однолистно на подходящий неевклидов n-угольник Ω_n с вершинами $b_k = e^{i\beta k}$,

$$0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_n < \beta_1 + 2\pi,$$

и такая, что

$$g(0) = 0, \quad g(a_k) = b_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Напомним, что неевклидовым n-угольником называется односвязная область $\Omega \subset U$, граница которой состоит из n дуг окружностей, ортогональных $\mathbb{T}$.

Утверждение о существовании функции g содержится в работе [8] и легко вытекает также из известной теоремы Кёбе об отображении конечносвязной области на круговую область, см., например, [8, гл. 5].

Обратная функция $F(\zeta) = g^{-1}(\zeta)$ продолжается аналитически на единичный круг U до функции, вновь обозначаемой через $F(\zeta)$, которая осуществляет универсальное накрытие области $D_n = \bar{\mathbb{C}}\{a_1, \ldots, a_n\}$ кругом U. Следовательно,

$$\lambda(0; a_1, \ldots, a_n) = |F'(0)|^{-1} = R(\Omega_n, 0), \tag{6.1}$$

где через $R(\Omega_n, 0)$ обозначаем конформный радиус n-угольника Ω_n относительно точки $\zeta = 0$. При указанном выше отображении правильная конфигурация $D_n^* = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ соответствует правильному n-угольнику Ω_n^*. Поэтому утверждение теоремы вытекает из соотношений (6.1) и основного результата нашей работы [8], согласно которому правильный неевклидов n-угольник, и только он, имеет максимальный конформный радиус среди всех неевклидовых n-угольников при фиксированном числе сторон.

Указанное в теореме 4 явное выражение для $\lambda(0; a_1^*, \ldots, a_n^*)$ получено, например, в [8]. $\square$

В связи с теоремой 4 представляет интерес следующая

Задача. *Найти* $\max \lambda_D(0)$ *в семействе областей* D, *для которых множество* $E = \bar{\mathbb{C}} \setminus D$ *состоит из* n *дуг единичной окружности (некоторые из этих дуг могут вырождаться в точку) и* $|E| = n\alpha$, *где* $\alpha > 0$ – *фиксированное число.*

Литература

1. A. Weitsman, *Symmetrization and the Poincaré metric,* Ann. Math. **124** (1986), 159–169.
2. A. Baernstein II, *A unified approach to symmetrization.* In: Partial differential equations of elliptic type (Cortona, 1992), 47–91, Symps. Math., **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
3. А. Ю. Солынин, *Поляризация и функциональные неравенства,* Алгебра и Анализ, **8** (1996), 148–185.
4. М. А. Лаврентьев, *К теории конформных отображений,* Тр. Физ-мат. ин-та им. В. А. Стеклова **5** (1934), 195–246.
5. Н. А. Лебедев, *Принцип площадей в теории однолистных функций.* М., 1975.
6. V. Wolontis, *Properties of conformal invariants,* Amer. J. Math. **74** (1952), 587–606.
7. В. Н. Дубинин, *Симметризация в теории функций комплексного переменного,* Успехи мат. наук **49** (1994), 3–76.
8. А. Ю. Солынин, *Некоторые экстремальные задачи для круговых многоугольников,* Зап. научн. семин. ПОМИ **206** (1993), 127–136.
9. A. Weitsman, *A symmetry property of the Poincaré metric,* Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 295–299.
10. Z. Nehari, *Conformal mapping,* McGraw-Hill, New York etc., 1952.
11. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения,* М., 1962.
12. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы,* Тр. Мат. ин-та АН СССР **139** (1980), 1–240.
13. В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в задачах о неналегающих областях,* Мат. сб. **128**, No. 1 (1985), 110–123.
14. M. Marcus, *Transformations of domains in the plane and applications in the theory of functions,* Pasif. J. Math. **14**, No. 2 (1964), 613–626.
15. А. Ю. Солынин, *Упорядочивание множеств, гиперболическая метрика и гармоническая мера.* В настоящем сборнике 128–146..
16. S. Segawa, *Martin boundaries of Denjoy domains,* Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 177–183.
17. D. Betsacos, *On certain harmonic measures on the unit disk,* Colloq. Math. **73** (1997), 221–228.
18. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд. М., 1966.

С.-Петербургское отделение
Математического Института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 июня 1997 г.