С. И. Федоров

ОБ УГЛАХ МЕЖДУ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ, УСЛОВИИ МАККЕНХОУПТА И ПРОЕКЦИИ ИЗ ОДНОГО КОИНВАРИАНТНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА НА ДРУГОЕ В ТЕОРИИ ХАРАКТЕР-АВТОМОРФНЫХ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Посвящается
90-летию со дня рождения
Г. М. Голузина

1. Введение

Рассмотрим область Ω на комплексной сфере $\bar{\mathbb{C}}$, ограниченную конечным числом аналитических или кусочно-аналитических кривых $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_g, g \geq 0$. Зафиксировав точку $a \in \Omega$, обозначим через $d\eta_a$ гармоническую меру границы $\Gamma = \bigcup\limits_{j=0}^{g} \Gamma_j$ относительно точки a, т.е. порождающую меру для непрерывного линейного функционала на пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных функций на $\Gamma : u \longrightarrow u(a)$, где $u \in C(\Gamma)$ и $u(a)$ – значение гармонического расширения функции u в область Ω. Обозначим также через $\mathcal{R}(\Omega)$ линейное пространство всех тех рациональных функций на $\bar{\mathbb{C}}$, полюсы которых расположены вне $\operatorname{Clos}\Omega$. Замыкание $\mathcal{R}(\Omega)$ в $L_2(\Gamma, d\eta_a) = L_2(\Gamma) = L_2$ приводит к обычному пространству Харди $H^2_+(\Omega)$ (см., например, [1]). Обозначим через P_+ "проектор Рисса" – оператор ортогонального проектирования на H^2_+ в L_2.

Первая проблема, представляющая для нас интерес, состоит в описании всех тех конечных положительных мер $d\mu$ на Γ, для которых оператор P_+ продолжаем как ограниченный оператор с плотного множества в $L_2 \cap L_2(d\mu)$ на все пространство

Работа выполнена при финансовой поддержке Марсден (Marsden) фонда, грант 96–UOA–MIS–0098.

$L_2(d\mu) = L_2(\Gamma, d\mu)$ или, что то же самое, для которых выполняется следующее неравенство для норм в весовых пространствах:

$$\int\limits_{\Gamma} |P_+ f|^2 d\mu \le C \int\limits_{\Gamma} |f|^2 d\mu \quad \forall f \in L_2 \cap L_2(d\mu) \tag{1}$$

с некоторой абсолютной константой C.

Эквивалентная постановка вопроса: для каких мер угол в пространстве $L_2(d\mu)$ между подпространствами $\mathcal{R}(\Omega)$ и $L_2(d\mu) \cap (\mathcal{R}(\Omega))^{\perp}_{L_2}$ положителен? Здесь $(\mathcal{R}(\Omega))^{\perp}_{L_2} = \left(H^2(\Omega)\right)^{\perp}_{L_2}$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{R}(\Omega)$ в $L_2(\Gamma, d\eta_a)$.

Второй интересующий нас вопрос – так называемая проблема базисности воспроизводящих ядер. Когда ортогональные проекции нормализованных воспроизводящих ядер в $H^2_+(\Omega)$ в точках $z_j \in \Omega,\ j = 1, 2\dots$, на замыкание линейной оболочки воспроизводящих ядер, соответствующих другой последовательности точек $t_1, t_2, \dots \in \Omega$, образуют там базис Рисса?

В случае, когда $\Omega = D$ – единичный круг, обе эти проблемы хорошо известны и тесно связаны между собой. Решение первой из них сводится к двум различным описаниям. Первое описание – это известная теорема Хельсона–Сегё (см., например, [2, 3] или [4]). Обозначим через $\mathcal{P}$ линейное пространство всех тригонометрических полиномов на единичной окружности $\mathbb{T}$, которое, очевидно, плотно в $C(\mathbb{T})$, $L_2(\mathbb{T})$ и $L_2(d\mu)$.

Теорема Хельсона–Сегё. *Пусть $d\mu$ – конечная положительная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$. Следующие утверждения равносильны.*

(1) *Проектор Рисса $P_+ = P_{H^2_+}$ продолжим с $\mathcal{P}$ как ограниченный оператор на все пространство $L_2(d\mu)$.*

(2) *Угол между $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\{H^2_+(\mathbb{T}) \cap C(\mathbb{T})\}$ и $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\{H^2_-(\mathbb{T}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{T})\}$ положителен. Здесь $H^2_-(\mathbb{T}) = \{\bar f : f \in H^2_+, f(0) = 0\}$.*

(3) *$d\mu = |h|^2 \frac{d\varphi}{2\pi}$ где h – внешняя функция из H^2_+ и норма оператора Ганкеля $H_{\frac{\bar h}{h}} = (I - P_+)\frac{\bar h}{h}|H^2_+$ меньше 1:*

$$|H_{\frac{\bar h}{h}}| = \operatorname{dist}\left(\frac{\bar h}{h}, H^\infty(\mathbb{T})\right) < 1.$$

(4) *Мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $\frac{d\varphi}{2\pi}$ и существуют ограниченные вещественные функции u и*

v на $\mathbb{T}$ такие, что

$$2\pi d\mu/d\varphi = e^{u+\tilde{v}}, \quad \|v\|_\infty < \pi/2, \tag{HS}$$

где $\tilde{v}$ – функция, гармонически сопряженная функции v.

Другое описание дается теоремой Ханта–Маккенхоупта–Видена [5] и утверждает, что $d\mu \in (HS)$ тогда и только тогда, когда $d\mu = w\frac{d\varphi}{2\pi}$, $w \in L_1(\mathbb{T})$ и вес w удовлетворяет условию Маккенхоупта A_2 ($A_2(\mathbb{T})$):

$$\sup_I \frac{1}{|I|}\int\limits_I w\ \frac{d\varphi}{2\pi}\cdot\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{w}\frac{d\varphi}{2\pi} < \infty, \tag{$A_2(\mathbb{T})$}$$

где супремум берется по всем интервалам (дугам) на единичной окружности и $|I|$ обозначает длину интервала I.

Хорошо известно, что условие A_2 имеет другую, эквивалентную форму:

$$\sup_{\lambda\in D}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}\zeta|^2}w\ \frac{d\zeta}{\zeta}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{1-|\lambda|^2}{|1-\bar{\lambda}\zeta|^2}\frac{1}{w}\ \frac{d\zeta}{\zeta} < \infty. \tag{$A_2'(\mathbb{T})$}$$

Если для $f \in L_1(\mathbb{T})$ мы обозначим через $f(\lambda)$ значение гармонического (пуассоновского) расширения f внутрь D, то последнее условие может быть переписано в виде

$$\sup_{\lambda\in D} w(\lambda)\cdot(\frac{1}{w})(\lambda) < \infty.$$

В несколько более общей постановке вторая проблема состоит в следующем.

Пусть B и Θ – внутренние функции в единичном круге D и пусть $K_B = H_+^2 \ominus BH_+^2$ и $K_\Theta = H_+^2 \ominus \Theta H_+^2$ – соответствующие коинвариантные подпространства. Мы интересуемся следующим вопросом. Когда оператор ортогонального проектирования $P_{K_\Theta}K_B$ из K_B на K_Θ является изоморфизмом? Ответ на этот вопрос также хорошо известен (см. [2, 6–8]), он утверждает, что оператор проектирования – изоморфизм тогда и только тогда, когда отношение B/Θ представляется в виде

$$\frac{B}{\Theta} = \frac{\bar{h}}{h},$$

где $h \in H^2_+$ – так называемая внутренняя функция Хельсона–Сегё, т.е. функция, для которой угол в $L_2(|h|^2 d\varphi)$ на единичной окружности между подпространствами $\bigvee_{n<0}\{z^n\}$ и $\bigvee_{n\geq 0}\{z^n\}$ ненулевой. Эквивалентное условие состоит в том, что h удовлетворяет условию Маккенхоупта $A_2(\mathbb{T})$ на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Мы будем иметь дело с аналогичными проблемами в случае $(g+1)$-связной области, $g > 0$. Первая трудность, возникающая в этом случае, состоит в том, что в противоположность случаю единичного круга, где $L_2(\mathbb{T}) = H^2_+ \oplus H^2_-$ и все меры на $\mathbb{T}$ "ортогональные" к $\mathcal{R}(D)_- = \{\bar{f} : f \in \mathcal{R}(D), f(0) = 0\}$, по теореме братьев Рисс, имеют вид $h\frac{d\varphi}{2\pi}, h \in H^1(\mathbb{T})$, в нашем случае $L_2(\Gamma, d\eta_a) = H^2_+(\Gamma) \oplus H^2_-(\Gamma) \oplus \mathfrak{M}$, здесь $H^2_- = \{\bar{f} : f \in H^2_+, f(a) = 0\}$ и $\mathfrak{M}$ – g-мерное так называемое дефектное пространство (см. [1, 9, 10]). Более того, для конечных мер на Γ аналог теоремы братьев Рисс имеет следующий вид (см. [10]):

$$d\mu \perp \overline{\mathcal{R}_0(\Omega)} = \{\bar{f} : f \in \mathcal{R}(\Omega), f(a) = 0\} \iff d\mu = h d\eta_a, \ h \in \{H^1 + \mathfrak{M}\}.$$

Другая сложность связана со следующими фактами. Вместо одного или пары H^p_+ и $H^p_-, 1 \leq p \leq \infty$, пространств Харди в нашем случае имеется целая шкала (g-мерный вещественный тор) так называемых характер-автоморфных пространств Харди $H^p_{+,\kappa}(\Gamma)$, параметризованных вектором $\kappa = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_g\}$ из g-мерного вещественного тора $\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ (см., например, [10]). Каждое из пространств $H^p_{+,\kappa}(\Gamma)$ есть подпространство $L_p(\Gamma)$ и состоит из тех функций f, для которых:

(1) f локально аналитична в Ω.
(2) $|f|$ однозначен в Ω.
(3) Всякий аналитический элемент (росток) функции f после аналитического продолжения вдоль любого замкнутого цикла в Ω, гомологичного Γ_j, $j = 1, \ldots, g$ зарабатывает унимодулярный множитель $e^{2\pi i \kappa_j}$.
(4) f имеет некасательную предельную функцию (предельные значения) $\tilde{f}$ почти всюду относительно меры η_a на Γ, которая принадлежит $L_p(\Gamma)$.

При любом характере κ пространство $L_2(\Gamma)$ может быть разложено в ортогональную сумму

$$H^2_{+,\kappa} \oplus H^2_{-,\kappa} \oplus \mathfrak{M}_\kappa,$$

где $H^2_{-,\kappa} = \{\bar f | f \in H^2_{+,-\kappa}, f(a) = 0\}$ и $\mathfrak{M}_\kappa$ – так называемое κ-автоморфное дефектное пространство, $\dim \mathfrak{M}_\kappa = g + 1$.

Если обозначить через P^+_κ ортогональный "проектор Рисса" в $L^2(\Gamma)$ на $H^2_{+,\kappa}$, то для любых $\kappa, \nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ и $f \in L^\infty$ можно рассмотреть целую шкалу операторов Ганкеля $H^{\kappa,\nu}_f = (I - P^{\kappa+\nu}_+) f | H^2_{+,\kappa}$ (см. [10]). К сожалению, для норм этих операторов имеют место лишь следующие равенства

$$\sup_\kappa |H^{\kappa,\nu}_f| = \max_\kappa |H^{\kappa,\nu}_f| = \operatorname{dist}_{L^\infty}(f, H^\infty_{+,\kappa}),$$

и максимум по всем характерам κ достигается только для некоторых значения κ (см. [10, 11]).

Эти характер-автоморфные пространства Харди естественным образом возникают при обсуждении вопросов факторизации [12], об инвариантных подпространствах [13–17, 10], о субнормальных операторах [18], об экстремальных полиномах [19], интерполяции Неванлинны–Пика [11, 20] и спектрального анализа почти периодических матриц Якоби [21]. Все эти пространства одинаково важны при разных значениях κ и наш первоначальный выбор пространства однозначных функций ($\kappa = \mathbf{0}$) представляет собой лишь частный случай. К примеру, подпространство D пространства $H^2_{+,\kappa}$, инвариантное относительно умножения на любую функцию из H^∞, имеет вид (см., например, [12–16, 10])

$$D = B_\nu H^2_{+,\kappa-\nu},$$

где B_ν – так называемая характер-автоморфная внутренняя функция, соответствующая характеру ν (подробности см. в § 2).

Все вышесказанное побуждает рассматривать вместо нашей первоначальной проблемы модифицированную более общую проблему описания тех конечных положительных мер $d\mu$ на Γ, для которых κ-автоморфный "проектор Рисса" $P^\kappa_+, \kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, может быть продолжен с плотного множества в $L_2(d\mu) \cap L_2$ как ограниченный оператор на все пространство $L_2(d\mu)$, т.е. тех мер, для которых

$$\int_\Gamma |P^\kappa_+ f|^2 d\mu \le C \int_\Gamma |f|^2 d\mu \quad \forall f \in L_2(\Gamma, d\mu) \cap L_2(d\mu). \tag{1'}$$

Более общая "характер-автоморфная" постановка второй проблемы формулируется следующим образом.

Пусть B_μ и Θ_λ – характер-автоморфные внутренние функции в области Ω, и пусть $K^\kappa_{B_\mu} = H^2_{+,\kappa} \ominus B_\mu H^2_{+,\kappa-\mu}$ и $K^\kappa_{\Theta_\lambda} = H^2_{+,\kappa} \ominus \Theta_\lambda H^2_{+,\kappa-\lambda}$ – соответствующие коинвариантные подпространства в $H^2_{+,\kappa}$. Когда оператор ортогонального проектирования $P_{K^\kappa_{\Theta_\lambda}} K_{B_\mu}$ из $K^\kappa_{B_\mu}$ на $K^\kappa_{\Theta_\lambda}$ является изоморфизмом?

Обладая знанием всех вышеупомянутых фактов, автор сомневался в том, что указанные проблемы могут иметь простые ответы. К удивлению (и к счастью) ответ на первую проблему, который мы даем ниже, в точности такой же как в случае единичного круга и не зависит от выбора κ. Формулировки соответствующих результатов приводятся в § 3 настоящей работы.

Как и следовало предполагать, решение первой проблемы является существенным для решения проблемы об обратимости проекции из одного коинвариантного подпространства на другое, но, как оказывается, его не достаточно.

Выясняется, что решение второй проблемы (основные утверждения приведены в § 5) требует еще и описания (в терминах необходимых и достаточных условий) тех конечных положительных мер $d\mu$ на Γ, для которых угол в $L_2(\Gamma, d\mu)$ между $L_2(\Gamma, d\mu) \cap H^2_{+,\kappa}$ и $L_2(\Gamma, d\mu) \cap H^2_{-,\kappa}$ ненулевой. Решение этой проблемы (также в виде формулировок основных результатов) приводится в § 4. Полное изложение результатов параграфов 3, 4 и 5 дано в препринтах [22–24], и будет опубликовано в других изданиях.

2. Начальные сведения

В дальнейшем мы рассматриваем плоскую область как половину ее дубля – компактной римановой поверхности, и существенно используем факты теории функций на таких поверхностях.

2.1. Мы рассматриваем нашу $(g+1)$-связную область $\Omega = \Omega_+$ как риманову поверхность с краем и обозначаем через $\hat{\Omega}$ ее дубль – компактную риманову поверхность рода g, которая топологически получается из двух копий Ω_+ и Ω_- области Ω отождествлением точек границы $\partial\Omega_\pm \stackrel{def}{=} \Gamma$ (т.е. приклеиванием второй копии Ω_- области Ω к Ω_+ вдоль $\partial\Omega_+$) и комплексная структура получается "отражением" комплексной структуры из $\Omega_+ \cup \partial\Omega_+$ на Ω_-. Инволюция $J : \hat{\Omega} \longrightarrow \hat{\Omega}$, оставляющая на месте точки Γ и переставляющая местами одинаковые точки Ω_+ и Ω_-, является антиголоморфной.

Зафиксируем точку $P_0 \in \Gamma_0$ и проведем ориентированные разрезы $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ из P_0 к граничным компонентам $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_g$ соответственно, которые за исключением своих концов полностью лежат в Ω_+ и пересекают друг друга лишь в точке P_0. Мы задаем гомологический бызис на компактной римановой поверхности $\hat{\Omega}$ рода g следующим образом: b-циклы – это просто граничные компоненты, $b_j = \Gamma_j$, $j = 1, \ldots, g$, а a-циклы строятся из разрезов γ_j и их антиголоморфных отражений $J(\gamma_j)$ на Ω_-, $a_j = \gamma_j - J(\gamma_j)$, $j = 1, \ldots, g$.

Рассмотрим g-мерное векторное пространство $\mathfrak{N}$ голоморфных дифференциалов на $\hat{\Omega}$ и зафиксируем его нормализованный базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$, двойственный к выбранному базису гомологий:

$$\int_{a_j} \omega_k = \delta_{j,k},$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Дифференциалы ω_j являются чисто мнимыми на Γ и антисимметричны по отношению к антиголоморфной инволюции J, $J^*\omega \overset{def}{=} \overline{\omega_j(J(z))} = -\omega_j(z)$, поэтому матрица b-периодов $\tau = \left\{\int_{b_j} \omega_k\right\}_{j,k=1}^{g}$ представима в виде $\tau = iP$, где P – вещественная положительно определенная матрица. Полная $g \times 2g$ риманова матрица периодов представима в виде

$$\left[\int_{a_1} \vec{\omega}, \ldots, \int_{a_g} \vec{\omega} : \int_{b_1} \vec{\omega}, \ldots, \int_{b_g} \vec{\omega}\right] = [I_g : \tau],$$

где $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_g)^t$ и I^g – $g \times g$ единичная матрица.

Обозначим через $d\eta_{P,J(P)}$, где $P, Q \in \hat{\Omega}$, $P \neq Q$, нормализованный дифференциал третьего рода с единственными простыми полюсами в точках P и Q с вычетами $\frac{1}{2\pi i}$ и $-\frac{1}{2\pi i}$ соответственно, $\int_{a_j} d\eta_{P,Q} = 0$, $j = 1, \ldots, g$. Заметим, что для точки $P \in \Omega_+$ сужение дифференциала $d\eta_{P,J(P)}$ на Γ задает в точности гармоническую меру $d\eta_P$. Имеет место тесная связь между гармонической мерой области Ω_+ относительно P и функцией Грина $G(z, P)$ этой области с особенностью в точке P[1] :

$$2\pi \operatorname{Im} \int_{P_0}^{z} d\eta_{P,J(P)} = G(z,P) \quad \text{или} \quad 2\pi d\eta_{P,J(P)} = 2i \frac{\partial G(z,P)}{\partial z} dz.$$

2.2. Дивизор на $\hat{\Omega}$ есть конечная формальная сумма

$$\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{k} n_j P_j, \; n_j \in \mathbb{Z}, \; P_j \in \hat{\Omega}.$$

Дивизор $\mathfrak{a}$ называется положительным ($\mathfrak{a} \geq 0$), если $n_j \geq 0$ для всех j. Порядок дивизора определяется равенством

$$\operatorname{ord}(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

Дивизор мероморфной на $\hat{\Omega}$ функции f называется главным дивизором и обозначается через (f). Очевидно, $\operatorname{ord}(f) = 0$. Обозначим через $L(\hat{\Omega})$ поле мероморфных функций на $\hat{\Omega}$, а через $L(\mathfrak{a})$ – векторное пространство $\left\{ f \in L(\hat{\Omega}) : (f) \geq \mathfrak{a} \right\}$, $r(\mathfrak{a}) \overset{def}{=} \dim L(\mathfrak{a})$.

Дивизоры $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ называются эквивалентными ($\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$), если их разность является главным дивизором.

Дивизор мероморфного дифференциала ω на $\hat{\Omega}$ также обозначается через (ω) и называется каноническим, а соответствующее векторное пространство мероморфных дифференциалов на $\hat{\Omega}$ обозначается через $\mathfrak{N}(\hat{\Omega})$. Пусть также $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \overset{def}{=} \left\{ \omega \in \mathfrak{N}(\hat{\Omega}) : (\omega) \geq \mathfrak{a} \right\}$, $i(\mathfrak{a}) \overset{def}{=} \dim \mathfrak{N}(\mathfrak{a})$. Любые два канонических дивизора эквивалентны и порядок любого канонического дивизора равен $2g-2$. Действие антиголоморфной инволюции J очевидным образом распространяется на дивизоры.

Теорема Римана–Роха гласит, что

$$r(-\mathfrak{a}) = \operatorname{ord}(\mathfrak{a}) - g + 1 + i(\mathfrak{a}).$$

Решетка периодов голоморфных дифференциалов есть решетка $\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$ в $\mathbb{C}^g$. Комплексный тор $\operatorname{Jac}(\hat{\Omega}) = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$ называется

[1] Начиная с этого места дифференциал $d\eta_{P,J(P)}$ будет называеться гармонической мерой области в точке P и обозначаться через $d\eta_P$.

якобианом (якобиевым многообразием) римановой поверхности $\hat{\Omega}$. Отображение Абеля–Якоби с начальной точкой P_0 (напомним, что мы выбрали P_0 на $\Gamma_0 = b_0$) определяется формулой

$$\varphi(P) = \int_{P0}^{P} \vec{\omega}, \ \ P \in \hat{\Omega}.$$

Отображение $\varphi : \hat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}^g$ многозначно и, следовательно, не является корректно определенным, но оно корректно определено как отображение из $\hat{\Omega}$ в $\mathrm{Jac}\,(\hat{\Omega})$. Отображение φ есть однолистное конформное отображение $\hat{\Omega}$ на его образ в $\mathrm{Jac}\,(\hat{\Omega})$. Отображение φ (а так же и $\varphi_0(P)$) может быть продолжено на $D_0(\hat{\Omega})$ – дивизоры порядка 0 на $\hat{\Omega}$. Если

$$\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{k} n_j P_j, \ \ \sum_{j=1}^{k} n_j = 0,$$

то мы полагаем

$$\varphi(\mathfrak{a}) = \sum_{j=1}^{k} n_j \varphi(P_j).$$

Теорема Абеля утверждает, что для $\mathfrak{a} \in D_0(\hat{\Omega})$ $\ \varphi(\mathfrak{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}$ – главный дивизор.

Дивизор нулей гармонической меры $v\eta_{P,J(P)}$ имеет порядок $2g$, симметричен по отношению к J и имеет вид $Z^* + J(Z^*)$, где $Z^* \subset \Omega_+$, $Z^* = z_1^* + \cdots + z_g^*, z_1^*, \ldots, z_g^*$ – критические точки функции Грина $G(z, P)$. Поэтому дивизор $Z^* = Z^*(P)$ часто называют критическим дивизором Грина. φ-образ дивизора $Z^* - gP_0$ на $\mathrm{Jac}\,(\hat{\Omega})$ достаточно явно определен в терминах тета-функций Римана на $\mathrm{Jac}\,(\hat{\Omega})$ (см. [15, 21]).

2.3. Для любого дивизора $\mathfrak{a}$ порядка 0, $\mathfrak{a} = \sum_{j=1}^{k} Q_j - \sum_{j=1}^{k} P_j$, и любого вектора $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_g) \in \mathbb{C}^g$ функция

$$f_{\mathfrak{a},\vec{c}} = \exp(2\pi i \int_{P_0}^{P} \omega(\mathfrak{a}, \vec{c})), \quad \omega(\mathfrak{a}, \vec{c}) = \sum_{j=1}^{k} \eta_{Q_j, P_j} + \sum_{l=1}^{g} c_l \omega_l, \tag{2}$$

является так называемой мультипликативной мероморфной функцией на $\hat{\Omega}$, соответствующей дивизору $\mathfrak{a}$ и вектору $\vec{c} \in \mathbb{C}^g$. А именно, $f_{\mathfrak{a},\vec{c}}(P)$ – локально мероморфная многозначная функция на $\hat{\Omega}$, чей характер многозначности определяется $2g$-мерным вектором

$$\chi = (\int\limits_{a_1} \omega(\mathfrak{a}, \vec{c}), \dots, \int\limits_{a_g} \omega(\mathfrak{a}, \vec{c}) : \int\limits_{b_1} \omega(\mathfrak{a}, \vec{c}), \dots, \int\limits_{b_g} \omega(\mathfrak{a}, \vec{c}))$$

a- и b-периодов дифференциала $\omega(\mathfrak{a}, \vec{c})$, который, в силу билинейных соотношений для дифференциалов первого и третьего рода, равен $(\vec{c} : \tau\vec{c} + \varphi(\mathfrak{a}))$. Значения f_1, f_2 функции $f_{\mathfrak{a},\vec{c}}$ в точке P, соответствующие двум различным путям интегрирования l_1, l_2 из P_0 в P, для которых цикл $l = l_2 - l_1$ гомологичен $\sum_{j=1}^{g} n_j a_j + \sum_{j=1}^{g} m_j b_j$, связаны между собой равенствами $f_2 = \exp(2\pi i \langle \chi, \vec{\mathbf{n}}_l \rangle) f_1$, где

$$\langle \chi, \vec{\mathbf{n}}_l \rangle = \sum_{j=1}^{g} n_j \chi_j + \sum_{j=1}^{g} m_j \chi_{g+j}.$$

Обратное тоже верно (см., например, [22]), всякая мультипликативная мероморфная функция на $\hat{\Omega}$ имеет вид (2).

Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{H}_\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, функций f, локально аналитических в Ω_+, имеющих там однозначный модуль и таких, что аналитической продолжение любого функционального элемента f вдоль замкнутого пути, гомологичного $\sum_{j=1}^{g} m_j b_j$, приводит к умножению начального значения на унимодулярный постоянный множитель (характер)

$$\exp(2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_j \kappa_j), \quad \kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_g).$$

С этого момента термин "характер" будет нами использоваться для элементов $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$; это означает, что вместо обычного мультипликативного представления фундаментальной группы области $\hat{\Omega}$ в $\mathbb{T}^g$ мы используем (эквивалентное) аддитивное представление.

Функции из пространства $\mathcal{H}_\kappa$ называются модуль-автоморфными или характер-автоморфными функциями, соответствующими характеру κ, или просто κ-автоморфными. Эти функции можно рассматривать как однозначные аналитические функции f в односвязной области $\Omega'_+ = \Omega_+ \setminus \bigcup_{j=1}^{g} \gamma_j$ с непрерывным модулем $|f|$ в Ω_+ такие, что пределы $f(P\pm) = \lim_{z \to P\pm} f(z)$ существуют на $\bigcup_{j=1}^{g} \gamma_j \cap \Omega_+$ и удовлетворяют соотношению $f(P+) = e^{2\pi i \lambda_j} f(P-)$, $P \in \gamma_j$, $j = 1, \dots, g$; здесь пределы при $z \to P+$, $z \to P-$ на

γ_j понимаются как пределы соответственно с левой и с правой стороны от γ_j.

Следует отметить, что единичный круг D является универсальной накрывающей $\pi : D \longrightarrow \Omega_+$ области Ω_+. Группа накрывающих преобразований Σ (фуксова группа второго рода) изоморфна фундаментальной группе $\pi_1(\Omega_+, P_0)$ указанной области, и всякий элемент $f \in \mathcal{H}_\kappa$ поднимается в однозначную голоморфную функцию $\tilde{f}$ на D такую, что $|\tilde{f} \circ \sigma| = |\tilde{f}|$, $\sigma \in \Sigma$ и $\tilde{f} \circ \sigma_j = e^{2\pi i \lambda_j} \tilde{f}$, где $\sigma_j \in \Sigma$ соответствует элементу $\gamma_j{}^{-1} b_j \gamma_j$ в $\pi_1(\Omega_+, P_0)$. Соответствующее поднятое пространство $\mathcal{H}_\kappa = \mathcal{H}_\kappa(D)$ также будет называться пространством характер-автоморфных функций.

С этого момента мы фиксируем универсальное накрывающее отображение $\pi : D \longrightarrow \Omega_+$ условием $\pi(0) = a$ для некоторой фиксированной точки $a \in \Omega_+$ и рассматриваем гармоническую меру $d\eta_a$ как исходную меру на Γ. Через $L_p(\Gamma), p \geq 1$, мы обозначаем обычное пространство L_p на Γ по мере $d\eta_a$.

Пространства $H^p_{+,\kappa} = H^p_{+,\kappa}(\Gamma)$, упоминавшиеся в предыдущем параграфе, есть пространства тех функций f из $\mathcal{H}_\kappa$, которые имеют некасательные предельные граничные значения $\hat{f}$ на Γ п.в. по мере $d\eta_a$, принадлежащие $L_p(\Gamma)$. Всякая функция f из $H^p_{+,\kappa}$ поднимается на универсальную накрывающую как функция $\tilde{f}$ из $\mathcal{H}_\kappa(D) \cap H^p_+(D)$, где $H^p_+(D) = H^p_+(D) = H^p_+(\mathbb{T})$ – обычное пространство Харди в единичном круге. Для поднятого пространства мы используем ту же аббревиатуру, что и для пространства в области.

Мультипликативные мероморфные функции на $\hat{\Omega}$ вида (2) с $P_j = J(Q_j)$, $Q_j \in \Omega_+, \operatorname{Re} c_j = 0$, $j = 1, \ldots, g$, при точке P и пути интегрирования из P_0 в P, содержащихся в $\overline{\Omega_+}$, являются важным примером характер-автоморфных функций. Так, функция

$$b_Q \stackrel{def}{=} f_{Q-J(Q),\vec{0}}, \; Q \in \Omega_+,$$

является характер-автоморфной функцией с характером $\kappa = \kappa(Q) = \operatorname{Re} \varphi(Q - J(Q))$, сжимающей в Ω_+, унимодулярной на Γ, с единственным простым нулем в точке Q (и единственным полюсом в $J(Q)$). Эту функцию мы будем называть элементарным фактором Бляшке с нулем в точке Q. Под характер-автоморфным произведением Бляшке мы будем понимать произведение (конечное или бесконечное) элементарных факторов Бляшке (относительно условий на множество нулей факторов Бляшке, необходимых и достаточных для равномерной сходимости произведения Бляшке, см., например, [9]). Поднятие b_Q на универсальную накрывающую является обычным произведением Бляшке в единичном круге с множеством нулей $\pi^{-1}(Q)$.

В дальнейшем через B_Z мы будем обозначать произведение Бляшке с дивизором нулей Z. Так, B_{Z^*} будет конечным произведением Бляшке, соответствующим критическому дивизору Грина (с нулями в критических точках функции Грина $G(z,a)$), с характером $\kappa^* = \kappa_{Z^*} = \operatorname{Re}\varphi(Z^* - J(Z^*))$.

По аналогии с теорией в единичном круге мы рассматриваем также пространство

$$H^2_{-,\kappa} = \left\{\bar f : f \in H^2_{+,-\kappa}, f(a) = 0\right\}.$$

Пространства $H^2_{+,\kappa}$ и $H^2_{-,\kappa}$ ортогональны, поскольку $\langle f, \bar g\rangle = \int_\Gamma fg d\eta_a = f(a)g(a)$ для $f \in H^2_{+,\kappa}$, $g \in H^2_{+,-\kappa}$. Пространство $H^2_{-,\kappa}$ может так же трактоваться как пространство Харди на втором "листе" Ω_- дубля $\hat\Omega$.

Пространство $H^2_{+,\kappa}$ является функциональным гильбертовым пространством, и для всякой точки $t \in \Omega_+$ существует воспроизводящее ядро $k(\cdot, t, \kappa) = k^\kappa_t$, $\langle f, k^\kappa_t\rangle = f(t)$, для всех $f \in H^2_{+,\kappa}$ (выражение для k^κ_t в терминах тета-функции Римана на $\operatorname{Jac}(\hat\Omega)$ можно найти в [26]).

Для любого $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ и любой внутренней функции B в Ω_+ с характером κ_B рассмотрим коинвариантные подпространства

$$K^\kappa_B = H^2_{+,\kappa} \ominus BH^2_{+,\kappa-\kappa_B}, \ \bar K^\kappa_B = H^2_{-,\kappa} \ominus \frac{1}{B} H^2_{-,\kappa+\kappa_B}.$$

В случае критического дивизора Грина $Z^* = \{z^*_1 + \cdots + z^*_g\}$ мы имеем g-мерное пространство

$$K^\kappa_{Z^*} = H^2_{+,\kappa} \ominus B_{Z^*} H^2_{+,\kappa-\kappa^*}, \ \kappa^* = \kappa(Z^*) = \operatorname{Re}\varphi(Z^* - J(Z^*)),$$

натянутое на воспроизводящие ядра в точках z^*_j, $j = 1, \ldots, g$. Тогда

$$L^2(\Gamma) = H^2_{-,\kappa} \oplus \mathfrak{M}_\kappa \oplus H^2_{+,\kappa}, \ \mathfrak{M}_\kappa = \frac{1}{B_{Z^*}} K^{\kappa+\kappa^*}_{Z^*} = B_{Z^*} \bar K^{\kappa-\kappa^*}_{Z^*},$$

где $\mathfrak{M}_\kappa$ – так называемое κ-автоморфное дефектное пространство, $\dim \mathfrak{M}_\kappa = g$.

2.4. Более обще, под характер-автоморфной мероморфной функцией на $\hat{\Omega}$ мы будем понимать функцию вида (2) с $\vec{c} \in \mathbb{Z}^g$ и $\varphi(\mathfrak{a}) = \kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ по модулю решетки $\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$. Понятно, что такая функцию соответствует в точности характеру κ. Аналог теоремы Абеля (см., например, [28]) утверждает, что дивизор $\mathfrak{a}$ порядка нуль является дивизором характер-автоморфной функции тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathfrak{a}) = \kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, и в этом случае κ есть в точности характер этой функции. Дивизор характер-автоморфной функции f также будет обозначаться через (f) (ясно, что $\deg(f) = 0$). Мы будем обозначать через $L_\kappa(\hat{\Omega})$ векторное пространство κ-автоморфных мероморфных функций на $\hat{\Omega}$, а через $L_\kappa(\mathfrak{a})$ – векторное пространство $\left\{f \in L_\kappa(\hat{\Omega}) : (f) \geq \mathfrak{a}\right\}$, $r^\kappa[\mathfrak{a}] = \dim L_\kappa(\mathfrak{a})$. Мы можем также рассматривать характер-автоморфные мероморфные дифференциалы на $\hat{\Omega}$. В действительности, эти дифференциалы получаются умножением мероморфных дифференциалов на характер-автоморфные функции на $\hat{\Omega}$. Векторное пространство κ-автоморфных мероморфных дифференциалов будет обозначаться через $\mathfrak{N}_\kappa$, а

$$\mathfrak{N}_\kappa(\mathfrak{a}) = \{\omega \in \mathfrak{N}_\kappa : (\omega) \geq \mathfrak{a}\}, i^\kappa[\mathfrak{a}] = \dim \mathfrak{N}_\kappa(\mathfrak{a}),$$

где через (ω) мы снова обозначаем дивизор ω. Вариант теоремы Римана–Роха для характер-автоморфных функций и дифференциалов утверждает, что для любого дивизора $\mathfrak{a}$ на $\hat{\Omega}$

$$r^\kappa[\mathfrak{a}] = -deg(\mathfrak{a}) - g + 1 + i^{-\kappa}[-\mathfrak{a}].$$

В этих обозначениях, очевидно, имеем

$$\mathfrak{M}_\kappa = L_\kappa(J(a) - Z^* - J(Z^*)),$$

и, следовательно, $r^\kappa[J(a) - J(Z^*)] = 0$, поскольку иначе ненулевая функция из $L_\kappa(J(a) - J(Z^*))$ принадлежала бы $\mathfrak{M}_\kappa$ и $H^2_{+,\kappa}$ одновременно.

Ниже мы используем два технических факта, доказанные в [23].

Лемма 2.1. *Для любого положительного дивизора Z порядка g на $\hat{\Omega}$, $\varphi(Z) = \mu + \tau\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, существует положительный дивизор T порядка g, $T = t_1 + \cdots + t_g$, $t_1 \in \Gamma_1, \ldots, t_g \in \Gamma_g$, такой, что $\varphi(T) = (1, 1, \ldots, 1)^t + \tau\nu$. Таким образом, $\operatorname{Im}\varphi(T - Z) = 0$ и, по* *теореме Абеля для характер-автоморфных функций, существует $((1,\dots,1)-\mu)$-автоморфная функция с дивизором $T-Z$.*

Лемма 2.2. *Для любого положительного дивизора Z порядка g на $\hat{\Omega}$, $\varphi(Z)=\mu_Z+\tau\nu_Z$, $\mu_Z,\nu_Z\in\mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, существует положительный дивизор T порядка g, содержащийся полностью внутри области Ω_+, для которого $\varphi(T)=\mu_T+\tau\nu$. Таким образом, $\operatorname{Im}\varphi(T-Z)=0$ и, по теореме Абеля для характер-автоморфных функций, существует $(\mu_T-\mu_Z)$-автоморфная функция с дивизором $T-Z$.*

2.5. Пусть L, M – подпространства гильбертова пространства H и $L\cap M=\{0\}$. Тогда на сумме $L+M$ можно определить оператор

$$\mathcal{P}_{L\|M}: l+m\longrightarrow l,\ \ l\in L,\ \ m\in M,$$

– так называемый косой проектор на L параллельно M. По теореме о замкнутом графике, ограниченность этого оператора эквивалентна тому, что $L+M=\operatorname{Clos}(L+M)$. Угол между подпространствами L и M определяется следующим образом:

$$\angle(L,M)\in[0,\pi/2],\ \cos(L,M)=\sup_{x\in L,y\in M}\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

Легко видеть, что

$$\cos(L,M)=\sup_{x\in L}\frac{\|P_Mx\|}{\|x\|}=|P_MP_L|,$$
$$\sin(L,M)=\inf_{x\in L}\frac{\|(I-P_M)x\|}{\|x\|}=|\mathcal{P}_{L\|M}|^{-1},$$

где P_L, P_M – ортогональные проекции на L и M соответственно.

3. Характер-автоморфные аналоги теорем Сегё и Хельсона–Сегё и условия Маккенхоупта

3.1. Классическая теорема Сегё для единичного круга утверждает, что если $d\mu=h\frac{d\varphi}{2\pi}+d\mu_s$ – конечная положительная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$ с абсолютно непрерывной и сингулярной компонентами $h\frac{d\varphi}{2\pi}$ и $d\mu_s$ соответственно, то

$$\{\operatorname{dist}_{L_2(d\mu)}(\mathbf{1},A_0)\}^2=\inf_{p\in A_0}\int_{\mathbb{T}}|\mathbf{1}-p|^2d\mu=$$
$$\inf_{p\in A_0}\int_{\mathbb{T}}|\mathbf{1}-p|^2h\frac{d\varphi}{2\pi}=\exp\int_{\mathbb{T}}\log h\frac{d\varphi}{2\pi},$$

где A – равномерная алгебра всех функций, аналитических в единичном круге D и непрерывных вплоть до границы, $A = \mathrm{Clos}_{L^\infty} \bigvee_{j=0}^{\infty} \{z^j\}$, а $A_0 = zA$ – подалгебра A, состоящая из функций, равных нулю в начале координат.

Таким образом, если $d\mu$ – сингулярная мера, то $\mathbf{1} \in \mathrm{Clos}_{L_2(d\mu)} A_0$ и $\mathrm{Clos}_{L_2(d\mu)} A_0 = L_2(d\mu)$.

Отметим, что теорема Сегё допускает следующее обобщение.

Для нормализованного воспроизводящего ядра $\tilde{k}_\lambda = k_\lambda / \|k_\lambda\|_2 = k_\lambda / \sqrt{k_\lambda(\lambda)} = \sqrt{1 - |\lambda|^2}/(1 - \bar{\lambda}\zeta)$, $\lambda \in D$, выполняется

$$\{\mathrm{dist}_{L_2(d\mu)}(\tilde{k_\lambda}, A_\lambda)\}^2 = \inf_{p \in A_\lambda} \int_{\mathbb{T}} |\tilde{k_\lambda} - p|^2 d\mu =$$

$$\inf_{p \in A_\lambda} \int_{\mathbb{T}} |\tilde{k_\lambda} - p|^2 h \frac{d\varphi}{2\pi} = \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\lambda|^2}{|1 - \bar{\lambda}\zeta|^2} \log h \frac{d\varphi}{2\pi},$$

здесь A_λ – подалгебра A, состоящая из функций, обращающихся в нуль в точке λ. Если указанное расстояние больше нуля, то $\log h \in L_1(\mathbb{T})$. Поэтому последнее выражение равняется $|h^{out}(\lambda)|^2$ – квадрату модуля значения в точке λ внешней функции $h^{out} \in H^2_+$, $|h^{out}|^2 \,|_{\mathbb{T}} = h$.

3.2. Мы начинаем с обсуждения аналога теоремы Сегё для области Ω_+. Нам нужен будет аналог алгебры A для нашей ситуации, и этот аналог – пространство $\mathcal{B}^\kappa(\Omega_+) \subset \mathcal{H}_\kappa$, состоящее из κ-автоморфных функций в Ω_+, непрерывных вплоть до границы Γ. Благодаря векторному (через свободный модуль) представлению с некоторой фиксированной, скажем, $(g+1)$-листной внутренней функцией θ в Ω_+ и соответствующей системой порождающих функций $\{\chi_j^\kappa\}_{j=1}^{g+1}$ (см. [10, теоремы 4.1, 4.2, замечание 4.1]), $\mathcal{B}^\kappa(\Omega_+)$ есть в точности свободный $(g+1)$-модуль над A, т.е.

$$\forall f \in \mathcal{B}^\kappa(\Omega_+) \quad f = \sum_{j=1}^{g+1} \chi_j^\kappa f_j(\theta), \quad f_j \in A,\ j = 1, \dots, g+1.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{B}^\kappa_\lambda(\Omega_+) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f : f \in \mathcal{B}^\kappa(\Omega_+), f(\lambda) = 0\} = b_\lambda \mathcal{B}^{\kappa - \kappa(\lambda)}(\Omega_+),$$

где b_λ, как и выше, – элементарный фактор Бляшке с единственным нулем в точке λ, соответствующий характеру $\kappa(\lambda)$. Пусть также $\tilde{k_\lambda^\kappa} = k_\lambda^\kappa / \sqrt{k_\lambda^\kappa(\lambda)}$ – нормализованное воспроизводящее ядро в точке $\lambda \in \Omega_+$ в $H^2_{+,\kappa}$.

Теорема 3.1. *Пусть $d\mu = wd\eta_a + d\mu_s$ – конечная положительная мера на Γ с абсолютно непрерывной компонентой $wd\eta_a$ и сингулярной компонентой $d\mu_s$. Тогда*

$$\operatorname{dist}_{L_2(d\mu)}(\tilde{k_\lambda^\kappa}, \mathcal{B}_\lambda^\kappa) = \inf_{p \in \mathcal{B}_\lambda^\kappa} \int\limits_\Gamma |\tilde{k_\lambda^\kappa} - p|^2 d\mu =$$

$$\inf_{p \in \mathcal{B}_\lambda^\kappa} \int\limits_\Gamma |\tilde{k_\lambda} - p|^2 wd\eta_a = \frac{k_\lambda^\kappa(\lambda)}{k_\lambda^{\kappa+\kappa_0}(\lambda)} \exp \int\limits_\Gamma \log wd\eta_\lambda$$

при некотором конкретном значении $\kappa_0 \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$. Более того, если рассматриваемое расстояние больше нуля, то последнее выражение равно

$$\frac{k_\lambda^\kappa(\lambda)}{k_\lambda^{\kappa+\kappa_0}(\lambda)} |h^{out}(\lambda)|^2,$$

где h^{out} κ_0-автоморфная внешняя функция из H^2_{+,κ_0}, $|h^{out}|^2 \ |_\Gamma = w$.

Замечание 3.1. Из [10, лемма 5.2] немедленно следует, что

$$0 < \inf_{\substack{\kappa,\kappa' \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g \\ \lambda \in \Omega_+}} \frac{k_\lambda^\kappa(\lambda)}{k_\lambda^{\kappa'}(\lambda)} \le \sup_{\substack{\kappa,\kappa' \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g \\ \lambda \in \Omega_+}} \frac{k_\lambda^\kappa(\lambda)}{k_\lambda^{\kappa'}(\lambda)} < \infty;$$

это означает, что

$$\{\operatorname{dist}_{L_2(d\mu)}(\tilde{k_\lambda^\kappa}, \mathcal{B}_\lambda^\kappa)\}^2 = \frac{k_\lambda^\kappa(\lambda)}{k_\lambda^{\kappa+\kappa_0}(\lambda)} |h^{out}(\lambda)|^2 \sim |h^{out}(\lambda)|^2.$$

Доказательство. Заметим, что если $\log w \in L_1(\Gamma)$, то существует характер-автоморфная функция $h^{out} \in H^2_{+,\kappa_0}$ при некотором характере κ_0. Это – хорошо известный факт, который немедленно получается из рассмотрения поднятия w на $\mathbb{T}$ – границу универсальной накрывающей области Ω_+. Теперь

$$\{\operatorname{dist}_{L_2(d\mu)}(\tilde{k_\lambda^\kappa}, b_\lambda \mathcal{B}^{\kappa-\kappa(\lambda)})\}^2 = \inf_{p\in\mathcal{B}^{\kappa-\kappa(\lambda)}} \int_\Gamma |\tilde{k_\lambda^\kappa} - b_\lambda p|^2 |h^{out}|^2 d\eta_a =$$

$$\inf_{p\in H^2_{+,\kappa+\kappa_0-\kappa(\lambda)}} \int_\Gamma |\tilde{k_\lambda} h^{out} - b_\lambda p|^2 d\eta_a = \|P_{\{\tilde{k}^{\kappa+\kappa_0}\}} \tilde{k}^\kappa h^{out}\|^2$$

$$= \left| \left\langle \frac{k_\lambda^\kappa}{\sqrt{k_\lambda^\kappa(\lambda)}} h^{out}, \frac{k_\lambda^{\kappa+\kappa_0}}{\sqrt{k_\lambda^{\kappa+\kappa_0}(\lambda)}} \right\rangle \right|^2 = |h^{out}(\lambda)|^2 \frac{k_\lambda^\kappa(\lambda)}{k_\lambda^{\kappa+\kappa_0}(\lambda)}.$$

Поэтому мы доказали теорему для мер, абсолютно непрерывных относительно меры $d\eta_a$ и имеющих суммируемый логарифм плотности.

Чтобы доказать теорему для всех конечных положительных мер на Γ, мы должны показать, что

$$\operatorname{dist}_{L_2(d\mu)}(\tilde{k_\lambda^\kappa}, \mathcal{B}_\lambda^\kappa) = \operatorname{dist}_{L_2(w\,d\eta_a)}(\tilde{k_\lambda^\kappa}, \mathcal{B}_\lambda^\kappa)$$

и если указанное расстояние больше нуля, то $\log w \in L_1(\Gamma)$. Это может быть сделано точно так же как в случае единичного круга (см. [29]) с использованием следующего аналога соответствующего результата для случая единичного круга.

Предложение 3.1. *Пусть $d\mu = w d\eta_a + d\mu_s$ – конечная положительная мера на Γ и пусть $\tilde{k}_\lambda^\kappa$ не содержится в замкнутом подпространстве $L_2(\Gamma, d\mu)$, натянутом на функции из $\mathcal{B}_\lambda^\kappa$. Пусть F – ортогональная проекция $\tilde{k}_\lambda^\kappa$ на это замкнутое подпространство. Тогда:*

(1) *Мера $|\tilde{k}_\lambda^\kappa - F|^2 d\mu$ – абсолютно непрерывна относительно гармонической меры, $|\tilde{k}_\lambda^\kappa - F|^2 d\mu = \alpha_0 d\eta_\lambda + \sum_{j=1}^g \alpha_j \omega_j$; здесь, как и выше, ω_j, $j = 1, \ldots, g$, – нормализованные голоморфные дифференциалы на $\hat{\Omega}$ и $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$.*

(2) *Функция $\tilde{k}_\lambda^\kappa - F$ равна нулю п.в. по мере $d\mu_s$ – сингулярной части меры $d\mu$.*

(3) $\inf\limits_{p\in\mathcal{B}_\lambda^\kappa} \int\limits_\Gamma |\tilde{k}_\lambda^\kappa - F|^2 d\mu = \inf\limits_{p\in\mathcal{B}_\lambda^\kappa} \int\limits_\Gamma |\tilde{k}_\lambda^\kappa - F|^2 w d\eta_a$.

3.3. Теперь мы приступаем к первой проблеме, описанной в начале работы. Мы обозначаем через $\mathcal{B}_-^\kappa$ подпространство $\{\bar{f} :\ f \in \mathcal{B}^{-\kappa}, f(a) = 0\} \subset H^2_{-,\kappa}$. Благодаря теореме 4.2 и замечанию 4.1 в

[10] и симметрии этих утверждений для пространств функций на Ω_+ и Ω_-, пространство $\{\mathcal{B}_-^\kappa + \mathfrak{M}_\kappa\}$ – свободный $(g+1)$-модуль над алгеброй $\overline{A_0} = \{\bar{f} : f \in A_0\}$ (через представление (9) из [10] с фиксированной $(g+1)$-листной внутренней функцией θ и соответствующей системой порождающих функций χ_j^κ, $j = 1, \dots, g+1$):

$$\{\mathcal{B}_-^\kappa + \mathfrak{M}_\kappa\} = \{f = \sum_{j=1}^{g+1} \chi^\kappa f_j(\theta) : f_j \in \overline{A_0}, j = 1, \dots, g+1\}.$$

Это пространство плотно в $H^2_{-,\kappa} + \mathfrak{M}_\kappa$. По той же причине пространство $\hat{\mathcal{B}}_\kappa \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\mathcal{B}_-^\kappa + \mathfrak{M}_\kappa + \mathcal{B}_\kappa\}$ – свободный $(g+1)$-модуль над $\overline{A_0} + A$ и плотно в пространствах $L_2(\Gamma)$ и $L_2(d\mu)$, что можно увидеть из [10, теорема 4.4, следствие 4.3] или заключить на основании плотности $\overline{A_0} + A$ в $C(\mathbb{T})$. Это пространство $\hat{\mathcal{B}}_\kappa$ будет играть в нашем случае роль $\overline{A_0} + A$ или пространства $\mathcal{P}$ всех тригонометрических полиномов на $\mathbb{T}$. Следующее предложение может быть доказано использованием доказательства соответствующего результата из [4].

Предложение 3.2. *Пусть* $d\mu = wd\eta_a + d\mu_s$ *– конечная положительная мера на* Γ *такая, что пространства* $\mathrm{Clos}_{L_2(d\mu)}\{\mathcal{B}_-^\kappa + \mathfrak{M}_\kappa\}$ *и* $\mathrm{Clos}_{L_2(d\mu)}\{\mathcal{B}^\kappa\}$ *лежат под ненулевым углом в* $L_2(d\mu)$. *Тогда* $d\mu$ *абсолютно непрерывна* ($d\mu_s = 0$) *и* $\log w \in L_1(\Gamma, d\eta_a)$.

С этого момента мы обозначаем через h характер-автоморфную внешнюю функцию в H^2_{+,κ_0} с некоторым характером κ_0 такую, что $|h|^2 \,|_\Gamma = w$, $d\mu = |h|^2 \, d\eta_a$.

3.4. Так же как в случае единичного круга, для точки $\lambda \in \Omega_+$ и функции $f \in L_1(\Gamma)$ мы обозначаем через $f(\lambda)$ значение в точке λ гармонического расширения f внутрь Ω_+, $f(\lambda) = \int_\Gamma f d\eta_\lambda$. Следующая теорема дает ответ на интересующий нас вопрос.

Теорема 3.2. *Пусть* $w \in L_1(\Gamma)$ *– положительный вес на* Γ *и* $d\mu = wd\eta_a$.

Следующие утверждения равносильны.

(1) *Пространства* $\mathcal{D}_+^\kappa = \mathrm{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}^\kappa$ *и* $\mathcal{D}_-^\kappa = \mathrm{Clos}_{L_2(d\mu)}\{\mathcal{B}_-^\kappa + \mathfrak{M}_\kappa\}$ *лежат под ненулевым углом.*

(2) *"Проектор Рисса"* $P_+^\kappa|\{\mathcal{B}^\kappa + \mathcal{B}_-^\kappa + \mathfrak{M}_\kappa\}$ *может быть продолжен как ограниченный оператор на все пространство* $L_2(d\mu)$.

(3) *Поднятие веса w на границу $\mathbb{T}$ универсальной накрывающей области Ω_+ удовлетворяет обычному условию Маккенхоупта $A_2(\mathbb{T})$ (или $A_2'(\mathbb{T})$).*

(4)
$$\sup_{\lambda\in\Omega_+} w(\lambda)\cdot(1/w)(\lambda)<\infty \qquad (\mathrm{A}_2'(\Gamma))$$

Замечание 3.2. Поскольку мы знаем, что мера $d\mu = wd\eta_a = |h|^2 d\eta_a$ абсолютно непрерывна относительно гармонической меры $d\eta_a$, то легко видеть, что вместо пространств $\mathcal{B}^\kappa, \mathcal{B}^\kappa_-$ можно использовать пространства $H^\infty_{+,\kappa}$, $H^\infty_{-,\kappa} \subset L_2(d\mu)$. Действительно, $\mathcal{B}^\kappa \subset H^\infty_{+,\kappa}$, $\mathcal{B}^\kappa_- \subset H^\infty_{-,\kappa}$ и

$$\mathcal{D}^\kappa_+ = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)} H^\infty_{+,\kappa} = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}^\kappa = \frac{1}{h}H^2_{+,\kappa+\kappa_0},$$

$$\mathcal{D}^\kappa_- = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\{H^\infty_{-,\kappa}+\mathfrak{M}_\kappa\} = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\{\mathcal{B}^\kappa_- + \mathfrak{M}_\kappa\} = \frac{1}{h}\{H^2_{-,\kappa-\kappa_0}+\mathfrak{M}_{\kappa-\kappa_0}\}.$$

Чтобы увидеть, например, что первая из этих цепочек равенств имеет место, надо просто заметить, что, по свойствам внешних функций, $h\mathcal{B}^\kappa$ (наряду с $hH^\infty_{+,\kappa}$) плотно в $H^2_{+,\kappa+\kappa_0}$ и сходимость последовательности функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ к функции f в $L_2(d\mu)$ эквивалентна сходимости последовательности $\{hf_n\}_{n=1}^\infty$ к функции hf в L_2.

Доказательство импликации $(1),(2) \implies (3)$ основывается на оценивании снизу нормы “проектора Рисса” на $L_2(d\mu)$ через выражения, содержащие воспроизводящие ядра, с использованием теоремы 3.1. Обратная импликация $(3),(4) \implies (1)$ доказывается применением соответствующего результата для единичного круга, являющегося универсальной накрывающей области, и затем использованием того факта, что наши пространства являются подпространствами соответствующих пространств в единичном круге (см. § 2).

Следствие 3.1. *Если по крайней мере одно из утверждений теоремы 3.2 выполняется хотя бы для одного значения $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, то то же верно и для всех значений κ.*

Как и в случае единичного круга, справедлива

Теорема 3.3. *Условие A_2' в области Ω_+ эквивалентно условию A_2 в следующей форме:*

$$\sup_I \frac{1}{m(I)} \int_I w d\eta_a \cdot \frac{1}{m(I)} \int_I \frac{1}{w} d\eta_a < \infty. \qquad (\mathrm{A}_2(\Gamma))$$

где I – любой сегмент ("интервал") границы Γ гармонической меры $\int_I d\eta_a = m(I)$.

Мы суммируем результаты этого параграфа в следующем аналоге теоремы Хельсона–Сегё.

Теорема 3.4. *Пусть $d\mu$ – конечная положительная мера на Γ. Тогда следующие условия равносильны.*

(1) *Существует характер $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, для которого κ-автоморфный "проектор Рисса" $P_+^\kappa|B^\kappa$ может быть продолжен как ограниченный оператор на все пространство $L_2(d\mu_\theta)$ или, что то же самое, имеет место неравенство $(1')$ для норм в весовых пространствах.*

(2) *Для некоторого $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ пространства $\mathrm{Clos}_{L_2(d\mu_\theta)} B^\kappa$ и $\mathrm{Clos}_{L_2(d\mu_\theta)}\{B_-^\kappa + \mathfrak{M}_\kappa\}$ лежат под ненулевым углом в $L_2(d\mu_\theta)$.*

(3) *Утверждения (1) и (2) имеют место при всех $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$.*

(4) *Мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры $d\eta_a$, $d\mu = w d\eta_a$, $\log w \in L_1(\Gamma)$ и $w = |h|^2$, где h – характер-автоморфная внешняя функция, $h \in H^2_{+,\kappa_0}$,*

$$\mathrm{dist}\left(\frac{\bar{h}}{h}, H^\infty_{+,-2\kappa_0}\right) < 1.$$

(5) *Мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры $d\eta_a$ и существуют две вещественно-значные ограниченные функции u, v на Γ такие, что функция $\tilde{v}$, гармонически сопряженная к v, однозначна в Ω_+ и*

$$d\mu/d\eta_a = e^{u+\tilde{v}}, \ \|v\|_\infty < \pi/2.$$

(6) *$d\mu = w d\eta_a, w \in L_1(\Gamma)$, и w удовлетворяет условию Маккенхоупта в форме $A_2(\Gamma)$ или $A_2'(\Gamma)$.*

Единственное новое для нас утверждение – утверждение (5), но доказательство эквивалентности (4) $\iff$ (5) в точности такое же как в доказательстве теоремы Хельсона–Сегё в [2] или [4].

4. Угол между пространствами аналитических и антианалитических функций в весовом пространстве L_2 на границе многосвязной области

4.1. Пусть, как и выше, $\mathcal{B}_+^\kappa$ – пространство всех тех функций из $H_\kappa(\Omega_+)$, которые непрерывны вплоть до границы Γ. Как мы видели в § 3, $\mathcal{B}_+^\kappa$ – плотное множество в $H^2_{+,\kappa}$. Через $\mathcal{B}_-^\kappa$ мы снова обозначаем соответствующее плотное подмножество в $H^2_{-,\kappa}$,

$$\mathcal{B}_-^\kappa = \{\overline{f \circ J} : f \in \mathcal{B}_+^{-\kappa}, f(a) = 0\}.$$

Интересующий нас вопрос состоит в следующем. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы для конечной положительной меры $d\mu$ на Γ угол между пространствами $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_-^\kappa$ и $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_+^\kappa$ был ненулевым?

Эквивалентный вопрос состоит в том, когда (для каких мер $d\mu$) оператор ортогонального проектирования P_+^κ в $L_2(\Gamma, d\eta_a) = L_2(\Gamma)$ на $H^2_{+,\kappa}$ может быть продолжен с $\mathcal{B}_-^\kappa + \mathcal{B}_+^\kappa$ на $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_-^\kappa + \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_+^\kappa$ как ограниченный оператор?

Следующее предложение повторяет предложение 3.2 как по формулировке, так и по доказательству.

Предложение 4.1. *Если угол в $L_2(d\mu)$ между $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_-^\kappa$ и $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_+^\kappa$ ненулевой, то мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно $d\eta_a$, $d\mu = w d\eta_a$ и $\log w \in L_1(\Gamma)$.*

С этого момента мы обозначаем через h характер-автоморфную внешнюю функцию из H^2_{+,κ_0} с некоторым характером κ_0 такую, что $|h|^2 \,|_\Gamma = w$, $d\mu = |h|^2 \, d\eta_a$.

4.2. Как и в § 3, для $\lambda \in \Omega_+, f \in L_1(\Gamma)$ мы обозначаем через $f(\lambda)$ значение в точке λ гармонического расширения функции f внутрь Ω_+, $f(\lambda) = \int_\Gamma f d\eta_\lambda$.

Замечание 4.1. Поскольку мы знаем, что мера $d\mu = w d\eta_a = |h|^2 d\eta_a$ абсолютно непрерывна относительно гармонической меры $d\eta_a$, то легко видеть, что вместо пространств $\mathcal{B}_+^\kappa, \mathcal{B}_-^\kappa$ можно использовать пространства $H^\infty_{+,\kappa}, H^\infty_{-,\kappa} \subset L_2(d\mu)$. Действительно, $\mathcal{B}_+^\kappa \subset H^\infty_{+,\kappa}$, $\mathcal{B}_-^\kappa \subset H^\infty_{-,\kappa}$ и

$$\mathcal{D}_+^\kappa = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)} H^\infty_{+,\kappa} = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_+^\kappa = \frac{1}{h} H^2_{+,\kappa+\kappa_0},$$

$$\mathcal{D}_-^\kappa = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)} H^\infty_{-,\kappa} = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_-^\kappa = \frac{1}{\bar h} H^2_{-,\kappa-\kappa_0} + .$$

Предложение 4.2. *Если "проектор Рисса" P_+^κ может быть продолжен с $\mathcal{B}_-^\kappa + \mathcal{B}_+^\kappa$ на $\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_-^\kappa + \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}_+^\kappa$ как ограниченный оператор, то имеет место следующая альтернатива.*

(1) *$1/h$ есть $(-\kappa_0)$-автоморфная внешняя функция и $|h|^2$ удовлетворяет условию Маккенхоупта $A_2'(\Gamma)$ (см. [22]):*

$$\sup_{\lambda\in\Omega_+} (|h|^2)(\lambda)\cdot(1/|h|^2)(\lambda) < \infty.$$

(2) *Существует положительный дивизор $U_h = u_1 + \cdots + u_k$ порядка $k \le g$, лежащий полностью на Γ и такой, что $1/h$ локально квадратично суммируема (как функция из L_2^{loc}) в любой точке из $\Gamma \setminus U_h$, не квадратично суммируема в каждой из точек u_j, $1 \le j \le k$, но в каждой из этих точек функция $(z-u_j)^{\nu_j}/h$ локально квадратично суммируема, где $\nu_j = degU_h|_{u_j}$ – порядок дивизора U_h в точке u_j (следует иметь ввиду, что некоторые из точек u_j могут совпадать). Более того, U_h – минимальный дивизор, обладающий указанными свойствами, в том смысле, что, если U – любой другой дивизор с этими же свойствами, то $U_h \le U$.*

Следствие 4.1.

(1)
$$r^\kappa[U_h + J(a) - Z^* - J(Z^*)] = g - degU_h,$$

и для всякой функции $\varphi_{\mathfrak{M}_\kappa} \in L_\kappa(U_h + J(a) - Z^* - J(Z^*))$

$$\frac{\varphi_{\mathfrak{M}_\kappa}}{h} \in \mathfrak{M}_{\kappa-\kappa_0} + H^2_{+,\kappa-\kappa_0},\ \frac{\varphi_{\mathfrak{M}_\kappa}}{\bar h} \in \mathfrak{M}_{\kappa+\kappa_0} + H^2_{+,\kappa+\kappa_0}.$$

(2) *Всякая функция $\varphi_{\mathfrak{M}_\kappa} \in \mathfrak{M}_\kappa$, для которой*

$$\frac{\varphi_{\mathfrak{M}_\kappa}}{h} \in \mathfrak{M}_{\kappa-\kappa_0} + H^2_{+,\kappa-\kappa_0},\ \frac{\varphi_{\mathfrak{M}_\kappa}}{\bar h} \in \mathfrak{M}_{\kappa+\kappa_0} + H^2_{+,\kappa+\kappa_0},$$

принадлежит $L_\kappa(U_h + J(a) - Z^* - J(Z^*))$

4.3. Поскольку лишь случай (2) альтернативы из предложения 4.2 представляет для нас интерес, то в нижеследующем изложении мы предполагаем, что $0 < degU_h \le g$. Наша ближайшая цель – изучить функцию h и U_h – дивизор ее "плохого поведения" на Γ. Для этого мы используем подход, сходный с подходом в [2, 6, 8] и основанный на привлечении операторов Ганкеля и Теплица.

Пусть, как и выше, P_+^ν, $\nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$, – ортогональный "проектор Рисса" из $L_2(\Gamma)$ на $H^2_{+,\nu}$ и пусть $P_-^\nu = I - P_+^\nu$ – ортогональный проектор из $L_2(\Gamma)$ на $H^2_{-,\nu} + \mathfrak{M}_\nu$. Напомним (см., например, [10]), что для любой функции $f \in L_\infty(\Gamma)$ и любых $\mu, \nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ оператор Ганкеля $\mathbf{H}_f^{\nu,\mu}$ с символом f есть оператор, действующий из $H^2_{+,\nu}$ в $H^2_{-,\nu+\mu} + \mathfrak{M}_{\nu+\mu}$ в соответствии с формулой

$$\mathbf{H}_f^{\nu,\mu} g = P_-^{\nu+\mu} fg, \quad \forall g \in H^2_{+,\nu}.$$

Характер-автоморфный оператор Теплица $\mathbf{T}_f^{\nu,\mu}$ с символом f действует из $H^2_{+,\nu}$ в $H^2_{+,\nu+\mu}$,

$$\mathbf{T}_f^{\nu,\mu} g = fg - \mathbf{H}_f^{\nu,\mu} g = P_+^{\nu+\mu} fg, \quad \forall g \in H^2_{+,\nu}.$$

Здесь характер ν описывает пространство Харди, на котором оператор действует, а характер μ предписывает характер символу $f \in L_\infty(\Gamma)$.[2)]

Если f – унимодулярная функция на Γ, то понятно, что для любой $g \in H^2_{+,\nu}$

$$\|\mathbf{H}_f^{\nu,\mu} g\|_2^2 + \|\mathbf{T}_f^{\nu,\mu} g\|_2^2 = \|g\|_2^2,$$

и сопряженный оператор $\left(\mathbf{T}_f^{\nu,\mu}\right)^*$ есть оператор Теплица $\mathbf{T}_{\bar f}^{\nu+\mu,-\mu}$.

Точно также, как и в случае теории в единичном круге, оценка углов между подпространствами в весовом пространстве L_2 на Γ эквивалентна оценке норм соответствующих операторов Ганкеля:

$$\cos(\operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}^\kappa_-, \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)}\mathcal{B}^\kappa_+) = \sup_{f\in\mathcal{B}^\kappa_+, g\in\mathcal{B}^\kappa_-} \frac{|< fh, gh >|}{\|fh\|_2 \cdot \|g\bar h\|_2} =$$

$$\sup_{\substack{f\in H^2_{+,\kappa+\kappa_0}\\ g\in H^2_{-,\kappa-\kappa_0}}} \frac{|< f\frac{\bar h}{h}, g >|}{\|f\|_2 \cdot \|g\|_2} = \sup_{\substack{f\in H^2_{+,\kappa+\kappa_0}\\ g\in \left(H^2_{+,\kappa-\kappa_0+\kappa^*}\right)^\perp}} \frac{|< B_{Z^*}\frac{\bar h}{h} f, g >|}{\|f\|_2 \cdot \|g\|_2} =$$

$$= \left|\mathbf{H}^{\kappa+\kappa_0,-2\kappa_0+\kappa^*}_{B_{Z^*}\frac{\bar h}{h}}\right|.$$

Поэтому случай (1) альтернативы из предложения 4.2 соответствует случаю $\left|\mathbf{H}^{\nu,2\kappa_0}_{\frac{\bar h}{h}}\right| < 1$ для всех $\nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ (см. [22]), что,

[2)]Надо иметь ввиду, что (см. [8]) $L^\infty(\Gamma)$ может быть отождествлено с $L^\infty_\mu(\Gamma)$ любого характера μ.

в частности, означает, что $\left|\mathbf{H}^{\kappa+\kappa_0,-2\kappa_0+\kappa^*}_{B_{Z^*}\frac{\bar h}{h}}\right| < 1$, а случай (2) альтернативы в точности соответствует случаю (см. снова [22]) $\left|\mathbf{H}^{\nu,2\kappa_0}_{\frac{\bar h}{h}}\right| = 1$ для всех $\nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ и $\left|\mathbf{H}^{\kappa+\kappa_0,-2\kappa_0+\kappa^*}_{B_{Z^*}\frac{\bar h}{h}}\right| < 1$. Ниже для упрощения формул мы будем опускать верхние индексы у операторов Ганкеля и Теплица, и читатель должен иметь ввиду, что характеры символов, которые будут произведениями или частными характер-автоморфных функций, могут быть восстановлены из этих выражений для символов, а характеры пространств Харди могут быть восстановлены из контекста. Например, как и выше, характер символа $\bar h/h$ равен разности характеров функций $\bar h$ и h, т.е. $-2\kappa_0$, а характер символа $B_{Z^*}\bar h/h$ таким же образом равен $\kappa^* - 2\kappa_0$.

4.4. Предложение 4.3. *Пусть оператор Теплица* $\mathbf{T}_{B_{Z^*}\frac{\bar h}{h}}$ *действует на пространстве* $H^2_{+,\kappa+\kappa_0}$ *и* $\mathbf{T}_{\overline{B_{Z^*}\frac{\bar h}{h}}}$ *– сопряженный ему оператор, действующий на пространстве* $H^2_{+,\kappa-\kappa_0+\kappa^*}$. *Тогда*

$$\mathcal{M} = \mathbf{T}_{B_{Z^*}\frac{\bar h}{h}}\left(H^2_{+,\kappa+\kappa_0}\right)\bigcap K^{\kappa-\kappa_0+\kappa^*}_{Z^*} \neq \{0\}, \quad \dim\mathcal{M} = \deg U_h,$$

$$\dim\operatorname{Ker}\mathbf{T}_{\bar B_{Z^*}\frac{h}{\bar h}} = r^\kappa[U_h + J(a) - Z^* - J(Z^*)] = g - degU_h,$$

$$\operatorname{Ker}\mathbf{T}_{\bar B_{Z^*}\frac{h}{\bar h}} = \frac{B_{Z^*}}{h}L_\kappa(U_h + J(a) - Z^* - J(Z^*)).$$

Рассмотрим теперь все возможные наборы из $\deg(U_h)$ различных точек из множества $\{z_1^*, \dots, z_g^*\}$ или, что тоже самое, множество $\mathbf{Z}$ всех положительных дивизоров Z порядка $\deg U_h$ таких, что $Z < Z^*$. Для каждого из таких дивизоров Z рассмотрим конечное произведение Бляшке B_Z, для которого Z – дивизор нулей.

Предложение 4.4. *Существует по крайней мере один дивизор* $Z \in \mathbf{Z}$, *для которого норма оператора Ганкеля на* $H^2_{+,\kappa+\kappa_0}$ *с символом* $B_Z\frac{\bar h}{h}$ *строго меньше единицы, т.е.* $|\mathbf{H}_{B_Z\frac{\bar h}{h}}| < 1$.

Перенумеровав, если требуется, нули в области Ω_+ гармонической меры $d\eta_a$, мы можем считать, что для дивизора $Z_h = z_1^* + z_2^* + \dots + z^*_{\deg U_h}$ норма оператора Ганкеля на $H^2_{+,\kappa+\kappa_0}$ с символом $B_{Z_h}\frac{\bar h}{h}$ меньше единицы,

$$|\mathbf{H}_{B_{Z_h}\frac{\bar h}{h}}| < 1 \quad \text{и} \quad \mathcal{M}\cap K^{\kappa+\kappa_0}_{Z^*-Z_h} = \{0\}.$$

Предложение 4.5. *Для дивизора Z_h из предложения 4.4 норма оператора Ганкеля $\mathbf{H}_{\overline{B_{Z_h}\frac{h}{\bar{h}}}}$, действующего на пространстве $H^2_{+,\kappa-\kappa_0+\kappa_h}$, строго меньше единицы. Здесь $\kappa_h = \operatorname{Re}\varphi(Z_h - (\deg U_h)b_0)$ есть характер конечного произведения Бляшке B_{Z_h}.*

Предложение 4.6. *Пусть U_h – дивизор из предложения 4.2. Тогда для $k = \deg U_h|_u$, $u \in \Gamma$, выражение $h/(z-u)^k$ локально квадратично суммируемо в точке u.*

Следствие 4.2. *Для любой характер-автоморфной мероморфной на $\hat{\Omega}$ функции f, чей дивизор на Γ в точности равен U_h, обе функции h/f и f/h квадратично суммируемы на Γ.*

4.5. Теперь все готово для получения необходимых и достаточных условий на вес $w = |h|^2$. Пусть U_h – дивизор "плохого поведения" функции h, а Z_h – соответствующий поддивизор дивизора Z^* порядка $\deg U_h$, рассмотренный в предложениях 4.4 и 4.5. Тогда, по лемме 2.2, можно найти дивизор Q порядка g, содержащийся полностью внутри области Ω_+ и такой, что для некоторого $\nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ существует ν-автоморфная мероморфная на $\hat{\Omega}$ функция ϕ с дивизором $(\phi) = U_h + J(Z^* - Z_h) - J(Q)$. Заметим, что ϕ – внешняя функция из $H^\infty_{+,\nu}$ и, по следствия 4.2, обе функции h/ϕ и ϕ/h – внутренние функции из $H^2_{+,\kappa_0-\nu}$ и $H^2_{+,\nu-\kappa_0}$ соответственно. Напомним, что через B_Q мы обозначаем конечное произведение Бляшке с дивизором нулей, равным Q, соответствующее характеру $\kappa_Q = 2\operatorname{Re}\varphi(q - gb_0)$.

Предложение 4.7. *Если угол в $L_2(|h|^2 d\eta_a)$ между подпространствами D^κ_- и D^κ_+ ненулевой, то для любой характер-автоморфной мероморфной на $\hat{\Omega}$ функции ψ с дивизором на Γ, в точности равным U_h, вес $|h/\psi|^2$ должен удовлетворять условию Маккенхоупта $A'_2(\Gamma)$, т.е.*

$$\sup_{\lambda\in\Omega_+} \int\limits_\Gamma \left|\frac{h}{\psi}\right|^2 d\eta_\lambda \cdot \int\limits_\Gamma \left|\frac{\psi}{h}\right|^2 d\eta_\lambda < \infty. \tag{3}$$

4.6. Отметим (см. утверждение (1) следствия 4.1), что если вес $|h|^2$ обеспечивает ненулевой угол между подпространствами $\mathcal{D}^\kappa_-$ и $\mathcal{D}^\kappa_+$, то по теореме Римана–Роха с необходимостью выполняется соотношение

$$i^{-\kappa}[Z^* + J(Z^*) - J(a) - U_h] = 0.$$

Это условие эквивалентно следующему условию:

$$r^{-\kappa}[a - U_h] = 0, \tag{4}$$

поскольку, деля любой дифференциал из $\mathfrak{N}_{-\kappa}(Z^* + J(Z^*) - U_h - J(a))$ на гармоническую меру $d\eta_a$, которая есть мероморфный ($\mathbf{0}$-автоморфный) дифференциал на $\hat{\Omega}_+$ с дивизором $(d\eta_a) = Z^* + J(Z^*) - a - J(a)$, мы получим функцию из $L_{-\kappa}(a - U_h)$.

Следующее предложение показывает, что условия (3) и (4) в совокупности также и достаточны для нашей проблемы.

Предложение 4.8. *Если внешняя функция $h \in H^2_{+,\kappa_0}$ такова, что существует характер-автоморфная мероморфная на $\hat{\Omega}$ функция ψ с неотрицательным дивизором $U = (\psi)|_\Gamma$ на Γ, $0 \le \deg U \le g$ и*

$$r^{-\kappa}[a - U] = 0, \quad \kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g,$$
$$\sup_{\lambda \in \Omega_+} \int\limits_\Gamma \left|\frac{h}{\psi}\right|^2 d\eta_\lambda \cdot \int\limits_\Gamma \left|\frac{\psi}{h}\right|^2 d\eta_\lambda < \infty,$$

то угол в $L_2(wd\eta_a), w = |h|^2$, между подпространствами $\mathcal{D}^\kappa_- = \mathrm{Clos}_{L_2(wd\eta_a)} H^\infty_{-,\kappa}$ и $\mathcal{D}^\kappa_+ = \mathrm{Clos}_{L_2(wd\eta_a)} H^\infty_{+,\kappa}$ ненулевой.

Теперь, объединяя предложения 4.7 и 4.8, мы получаем следующее необходимое и достаточное условие на вес.

Теорема 4.1. *Пусть $d\mu$ – конечная положительная мера на Γ. Тогда подпространства $\mathcal{D}^\kappa_- = \mathrm{Clos}_{L_2(d\mu)} B^\kappa_-$ и $\mathcal{D}^\kappa_+ = Clos_{L_2(d\mu)} B^\kappa_+$ лежат под ненулевым углом в $L_2(d\mu)$ тогда и только тогда, когда:*

(1) *Мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно гармонической меры $d\eta_a$, $d\mu = wd\eta_a$, $w \in L_1(\Gamma)$, $\log w \in L_1(\Gamma)$, и*
(2) *Существует такая характер-автоморфная мероморфная на $\hat{\Omega}$ функция ψ с неотрицательным дивизором на Γ, $(\psi)|_\Gamma = U_w$, $0 \le degU_w \le g$, что выполняются условия (3) и (4).*

Поскольку условие $A_2'(\Gamma)$ эквивалентно условию $A_2(\Gamma)$, а условие $A_2(\Gamma)$ является локальным, т.е. оно должно выполняться в каждой точке на Γ для достаточно маленьких интервалов границы Γ, содержащих эту точку, мы можем переформулировать предыдущую теорему в следующем виде.

Теорема 4.2. *Пусть $d\mu$ – конечная положительная мера на Γ. Тогда подпространства $\mathcal{D}_-^\kappa = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)} B_-^\kappa$ и $\mathcal{D}_+^\kappa = \operatorname{Clos}_{L_2(d\mu)} B_+^\kappa$ лежат под ненулевым углом в $L_2(d\mu)$ тогда и только тогда, когда:*

(1) *Мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно гармонической меры $d\eta_a$, $d\mu = w d\eta_a$, $w \in L_1(\Gamma)$, $\log w \in L_1(\Gamma)$, и*

(2) *Существует неотрицательный дивизор U_w точек на Γ, $0 \le \deg U_w \le g$, такой, что в любой точке $u \in \Gamma$ вес $w/|z-u|^{2k}$, $k = \deg U_w|_u$, – локально маккенхоуптовский и выполняется условие $r^{-\kappa}[a - U_w] = 0$.*

5. О проекции из одного коинвариантного подпространства на другое

5.1. Пусть B и Θ – две характер-автоморфные внутренние функции на Ω_+, соответствующие характерам κ_B и κ_Θ соответственно. Мы фиксируем характер $\kappa \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ и рассматриваем соответствующие этим внутренним функциям коинвариантные подпространства в $H^2_{+,\kappa}$, $K_B^\kappa = H^2_{+,\kappa} \ominus B H^2_{+,\kappa-\kappa_B}$ и $K_\Theta^\kappa = H^2_{+,\kappa} \ominus \Theta H^2_{+,\kappa-\kappa_\Theta}$.

Нас будет интересовать следующий вопрос. Когда (в терминах необходимых и достаточных условий) оператор ортогонального проектирования $P_{K_\Theta^\kappa}|K_B^\kappa$ в $L_2(\Gamma)$ из K_B^κ на K_Θ^κ есть изоморфизм?[3)]

Мы используем следующее утверждение из леммы о близких подпространствах из [2].

Лемма о близких подпространствах. *Пусть H – гильбертово пространство и L, M – его замкнутые подпространства. Следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *$P_L|M$ есть изоморфизм из M на L.*
(2) *$P_M L = M$, $L \cap M^\perp = \{0\}$.*
(3) *$H = M^\perp + L$, $\operatorname{Clos}(M + L^\perp) = H$.*
(4) *$|P_{L^\perp} P_M| < 1$, $|P_{M^\perp} P_L| < 1$.*

Таким образом, по утверждению (4) последней леммы, $P_{K_\Theta^\kappa}|K_B^\kappa$ есть изоморфизм из K_B^κ на K_Θ^κ тогда и только тогда, когда

$$|P_{(K_\Theta^\kappa)^\perp} P_{K_B^\kappa}| < 1, \ |P_{(K_B^\kappa)^\perp} P_{K_\Theta^\kappa}| < 1.$$

[3)] Здесь снова через P_M мы обозначаем ортогональную проекцию в L_2 на замкнутое подпространство M.

Теперь, поскольку для любой внутренней функции S, соответствующей характеру κ_S, $P_{SH^2_{+,\kappa-\kappa_S}} = SP_+^{\kappa-\kappa_S}\overline{S}$, то последние неравенства эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} |P_{(K^\kappa_\Theta)^\perp} P_{K^\kappa_B}| &= |\Theta P_+^{\kappa-\kappa_\Theta}\overline{\Theta}|K^\kappa_B| = |P_+^{\kappa-\kappa_\Theta}\overline{\Theta}|K^\kappa_B| < 1, \\ |P_{(K^\kappa_B)^\perp} P_{K^\kappa_\Theta}| &= |BP_+^{\kappa-\kappa_B}\overline{B}|K^\kappa_\Theta| = |P_+^{\kappa-\kappa_B}\overline{B}|K^\kappa_\Theta| < 1. \end{aligned} \tag{5}$$

5.2. Следуя идеям из [2, 6], мы сведем эти два неравенства для операторных норм к эквивалентной паре неравенств для норм соответствующих характер-автоморфных операторов Ганкеля (см. § 4).

Лемма 5.1. *Неравенства* (5) *эквивалентны неравенствам*

$$|\mathbf{H}_{\frac{B}{\Theta}}| < 1 \quad \textit{на} \quad H^2_{+,\hat\kappa}, \qquad |\mathbf{H}_{\frac{\Theta}{B}}| < 1 \quad \textit{на} \quad H^2_{+,\hat\kappa-\kappa_\Theta+\kappa_B}, \tag{6}$$

где $\hat\kappa = \kappa^* + \kappa_\Theta - \kappa - \kappa_a$.

Обозначим унимодулярную на Γ функцию B/Θ через ψ и пусть $\kappa_\psi = \kappa_B - \kappa_\Theta$. Следуя подходу в [2, 6], мы рассматриваем свойства соответствующих операторов Теплица

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\psi &= \mathbf{T}_\psi^{\kappa_\psi,\hat\kappa} = P_+^{\hat\kappa+\kappa_\psi}\psi|H^2_{+,\hat\kappa}, \\ \mathbf{T}_{\bar\psi} &= (\mathbf{T}_\psi)^* = P_+^{\hat\kappa}\overline{\psi}|H^2_{+,\hat\kappa+\kappa_\psi}, \end{aligned}$$

чтобы получить следующее

Предложение 5.1. *Если выполняется* (6), *то:*

(1) *Существуют две характер-автоморфные внешние функции* h_0, χ_0 *такие, что*

$$\frac{B}{\Theta} = \psi = \frac{\overline{h_0}}{h_0}\frac{B_{Z^*}}{v_0 v_0'} = \frac{\chi_0}{\overline{\chi_0}}\frac{w_0 w_0'}{B_{Z^*}},$$

где v_0, v_0', w_0, w_0' *– конечные характер-автоморфные произведения Бляшке с дивизорами нулей* V_0, V_0', W_0, W_0' *соответственно,* $\deg V_0 + \deg V_0' \le g$, $\deg W_0 + \deg W_0' \le g$.

(2) *Функция* $h_0\chi_0$ *– характер-автоморфная мероморфная на* $\hat\Omega$ *функция из пространства* $L_{2\hat\kappa+\kappa_\psi-\kappa^*}(V_0 + J(V_0') + W_0 + J(W_0') - Z^* - J(Z^*))$ *и существуют два неотрицательных дивизора* U_H, U_X, *содержащиеся полностью в* Γ *и такие, что*

$$\deg V_0 + \deg V_0' + \deg U_H = g, \deg W_0 + \deg W_0' + \deg U_X = g,$$

$$(h_0\chi_0) = V_0 + J(V_0') + U_H + W_0 + J(W_0') + U_X - Z^* - J(Z^*).$$

(3) *Для любой точки* $u \in \Gamma$ *выражения* $(z-u)^{k_u}/h_0, h_0/(z-u)^{k_u}$ *и* $(z-u)^{k'_u}/\chi_0, \chi_0/(z-u)^{k'_u}$ *локально квадратично суммируемы в точке* u, *здесь* $k_u = \deg U_H|_u, k'_u = \deg U_X|_u$.

Теперь, используя лемму 2.1, мы можем свести нашу проблему к проблеме из § 4 (см. также [26]) об оценке угла между подпространствами в весовом пространстве L_2 на Γ.

Предложение 5.2. *Если выполняется* (6), *то существует характер-автоморфная внешняя функция* $h^* \in H^2_{+,\nu^*}$ *для некоторого характера* ν^* *такая, что*

$$\frac{B}{\Theta} = \psi = \frac{\overline{h^*}}{h^*} B_{Z^*}.$$

Таким образом,

$$|\mathbf{H}_{\frac{\overline{h^*}}{h^*}B_{Z^*}}| < 1 \quad \text{на} \quad H^2_{+,\hat{\kappa}}$$

или, что то же самое, угол в $L_2(|h^*|^2 d\eta_a)$ *между подпространствами* $\mathrm{Clos}_{L_2(|h^*|^2 d\eta_a)} H^\infty_{-,\hat{\kappa}-\nu^*}$ *и* $\mathrm{Clos}_{L_2(|h^*|^2 d\eta_a)} H^\infty_{+,\hat{\kappa}-\nu^*}$ *ненулевой.*

Следствие 5.1. *Вес* $|h^*|^2$ *на* Γ *есть в точности вес из утверждения* (2) *альтернативы из предложения* 4.2 *и его дивизор* U^* *"плохого поведения" на* Γ *имеет порядок, в точности равный* g.

Следующая теорема дает ответ на интересующий нас вопрос.

Теорема 5.1. *Пусть* B *и* Θ – *внутренние функции, соответствующие характерам* κ_B *и* κ_Θ *соответственно. Тогда оператор ортогонального проектирования* $P_{K^\kappa_\Theta}|K^\kappa_B$ *из коинвариантного пространства* $K^\kappa_B = H^2_{+,\kappa} \ominus BH^2_{+,\kappa-\kappa_B}$ *на коинвариантное подпространство* $K^\kappa_\Theta = H^2_{+,\kappa} \ominus \Theta H^2_{+,\kappa-\kappa_\Theta}$ *есть изоморфизм тогда и только тогда, когда*

(1)
$$\frac{B}{\Theta} = \frac{\overline{h^*}}{h^*} B_{Z^*},$$

где h^* – *внешняя функция из* H^2_{+,ν^*} *для некоторого характера* $\nu^* \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$.

(2) *Функция* $1/h^*$ *локально квадратично суммируема в любой точке на* Γ, *за исключением* g *точек* $u_1^* \in \Gamma_1, \ldots, u_g^* \in \Gamma_g$, *и в*

каждой из этих точек u_j^* выражения $(z-u_j^*)/h^*$ и $h^*/(z-u_j^*)$ локально квадратично суммируемы.

(3) *Для всякой характер-автоморфной мероморфной на $\hat{\Omega}$ функции ϕ с дивизором $(\phi)|_\Gamma = u_1^* + \cdots + u_g^*$*

$$\sup_{\lambda\in\Omega_+} \int_\Gamma \left|\frac{h^*}{\phi}\right|^2 d\eta_\lambda \cdot \int_\Gamma \left|\frac{\phi}{h^*}\right|^2 d\eta_\lambda < \infty.$$

(4)

$$r^{\hat{\kappa}-\nu^*}[J(a) - \sum_{j=1}^{g} u_j^*] = \dim L_{\hat{\kappa}-\nu^*}(J(a) - \sum_{j=1}^{g} u_j^*) = 0,$$

где $\hat{\kappa} = k^* - \kappa_\Theta - \kappa - \kappa_a$.

Замечание 5.1. Используя лемму 2.1, мы свели нашу проблему к проблеме из § 4 для веса $|h^*|^2$ с дивизором $U^* = \sum_{j=1}^{g} u_j^*$ "плохого поведения" на Γ внешней функции h^*, имеющим максимально возможный порядок g. Поэтому на основании теоремы Римана–Роха условие (4) теоремы 5.1 может быть заменено на условие

$$r^{\hat{\kappa}-\nu^*}[\sum_{j=1}^{g} u_j^* + J(a) - Z^* - J(Z^*)] = 0,$$

что означает, что в пространстве $\mathfrak{M}_{\hat{\kappa}-\nu^*}$ нет ненулевых функций с дивизором нулей, большим U^*.

С другой стороны, используя теперь лемму 2.2, мы можем найти характер-автоморфную мероморфную на $\hat{\Omega}$ функцию ϕ с дивизором $(\phi) = U^* - J(Q)$, где Q – положительный дивизор порядка g, содержащийся полностью внутри Ω_+. Поскольку $\phi/\overline{\phi} = B_Q$, где, как и выше, B_Q – конечное произведение Бляшке с дивизором нулей, равным Q, то, вводя функцию $h = h^*/\phi$, мы можем переписать теорему 5.1 в следующем виде.

Теорема 5.2. *Пусть B и Θ – внутренние функции с характерами κ_B и κ_Θ соответственно. Тогда оператор ортогонального проектирования $P_{K_\Theta^\kappa}|K_B^\kappa$ из коинвариантного подпространства*

$K_B^\kappa = H^2_{+,\kappa} \ominus BH^2_{+,\kappa-\kappa_B}$ *на коинвариантное подпространство* $K_\Theta^\kappa = H^2_{+,\kappa} \ominus \Theta H^2_{+,\kappa-\kappa_\Theta}$ *есть изоморфизм тогда и только тогда, когда:*

(1)
$$\frac{B}{\Theta} = \frac{\overline{h}}{h}\frac{B_{Z^*}}{B_Q},$$

где h – *внешняя функция из* $H^2_{+,\nu}$ *для некоторого характера* $\nu \in \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g$ *и* B_Q – *конечное произведение Бляшке с дивизором нулей, равным* Q, $\deg Q = g$.

(2) *Функция* h *удовлетворяет условию Маккенхоупта*
$$\sup_{\lambda\in\Omega_+} \int\limits_\Gamma |h|^2\, d\eta_\lambda \cdot \int\limits_\Gamma \left|\frac{1}{h}\right|^2 d\eta_\lambda < \infty.$$

(3)
$$r^{\hat\kappa-\nu}[Q + J(a) - Z^* - J(Z^*)] = \dim L_{\hat\kappa-\nu}(Q + J(a) - Z^* - J(Z^*)) = 0,$$

таким образом, в пространстве $\mathfrak{M}_{\hat\kappa-\nu}$ *нет ненулевых функций с дивизором, большим либо равным* $Q+J(a)-Z^*-J(Z^*)$. *Здесь* $\hat\kappa = k^* - \kappa_\Theta - \kappa - \kappa_a$.

Замечание 5.2. Можно также сформулировать эквивалентное утверждение даже в том случае, когда порядок дивизора Q из теоремы 5.2 лежит между 0 и g, но тогда дивизор “плохого поведения” на Γ функции h будет иметь порядок $g - \deg Q$ и полученное утверждение будет комбинацией утверждений теорем 5.1 и 5.2.

Литература

1. S. D. Fisher, *Function theory on planar domains. A second course in complex analysis,* A. Wiley-Interscience Publications. J. Wiley & Sons, New York, 1983.
2. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига,* “Наука”, М., 1980.
3. P. Koosis, *Introduction to H^p spaces,* London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **40** Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.
4. J. B. Garnett, *Bounded analytic functions,* Pure and Applied Mathematics, **96** Academic Press, Inc. New York–London, 1981.
5. R. Hunt, B. Muckenhoupt, and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for conjugate function and Hilbert transform,* Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.
6. D. Sarason, *Function theory on the unit circle,* Notes for lectures at a Conf. at Virginia Polytechnic Inst. and State Univ. Preprint, 1978.

7. Б. С. Павлов, *Базисность системы экспонент и условие Макkенхоупта,* Докл. АН СССР **247**, No. 1 (1979), 37–40.
8. S. Chruschev, N. Nikolski, and B. Pavlov, *Complex analysis and spectral theory,* Lecture Notes in Math. **864**, Springer-Verlag, 1981.
9. С. И. Федоров, *Гармонический анализ в многосвязной области I,II,* Мат. сб. **181**, No. 6, 7 (1990), 833–864, 867–909.
10. С. И. Федоров, *О гармоническом анализе в многосвязной области и характер-автоморфных пространствах Харди,* Алгебра и анализ **9**, No. 2 (1997), 192–240.
11. S. Fedorov, V. Vinnikov, *On the Nevanlinna-Pick interpolation problem in multiply connected domain and character,* Auckland Univ. Dep. Math. Report Series No.325, Auckland, N. Z., 1995.
12. M. Voichick, L. Zalcman, *Inner and outer functions on Riemann surfaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 1200–1204.
13. D. Sarason, *The H^p spaces of an annulus,* Mem. Amer. Math. Soc. **127** (1965).
14. M. Voichick, *Invariant subspaces on Riemann surface,* Canad. J. Math. **18** (1966), 399–403.
15. M. Voichick, *Ideals and invariant subspaces of analytic functions,* Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 493–512.
16. M. Hasumi, *Hardy classes on infinitely connected Riemann surfaces,* Lecture Notes in Math. **1027**, Springer-Verlag, Berlin ets., 1983.
17. Б. С. Павлов, С. И. Федоров, *Группа сдвигов и гармонический анализ на римановой поверхности рода один,* Алгебра и Анализ **1**, No. 2 (1989), 132–168.
18. M. B. Abrahamse, R. G. Douglas, *A class of subnormal operators related to multiply connected domains,* Advances in Math. **19** (1976), 106–148.
19. H. Widom, *Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane,* Advances in Math. **3** (1969), 127–232.
20. M. B. Abrahamse, *The Pick interpolation theorem for finitely connected domains,* Michigan Math. J. **26**, No. 2 (1979), 195–203.
21. M. Sodin, P. Yuditskii, *Almost periodic Jacobi matrices with homogeneous spectrum, infinite dimensional Jacobi inversion, and Hardy spaces of character-automorphic functions,* Københavns Universitet, Matematisk Instituts Notetrykkeri, Preprint Series 1994, No. 20.
22. S. Fedorov, *Weighted norm inequalities and the Muckenhoupt condition in a multiply connected domain,* Auckland Univ. Dep. Math. Report Series No. 330, Auckland, N. Z., 1995.
23. S. Fedorov, *Angle between subspaces of analytic and antianalytic functions in weighted L_2 space on a boundary of a multiply connected domain,* Auckland Univ. Dep. Math. Report Series No.368, Auckland, N. Z., 1996.
24. S. Fedorov, *On a projection from one co-invariant subspace onto another in character-automorphic Hardy space on a multiply connected domain,* Auckland Univ. Dep. Math. Report Series No. 375, Auckland, N. Z., 1997.
25. K. F. Clancey, *Representing measures on multiply connected domains,* Illinois J. Math. **35**, No. 2 (1991), 286–311.
26. J. A. Ball, K. F. Clancey, *Reproducing kernels for Hardy spaces on multiply connected domains,* Integral Equations and Operator Theory **25** (1996), 35–57.

27. I. Kra, *Automorphic forms and Kleinian groups,* Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin, Reading, MA, 1972.
28. H. M. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces.* Graduate Texts in Math. **71**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1980.
29. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions,* Prentice-Hall Series in Modern Analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.-J., 1962.

Department of Mathematics
University of Auckland,
Private Bag 92019, Auckland,
New Zeeland

Поступило 18 марта 1997 г.