А. В. Арефьев, А. П. Киселев

ВЯЗКОУПРУГИЕ ЛЯВОВСКИЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ, СЛАБО НЕОДНОРОДНОЙ ПО ГОРИЗОНТАЛИ

Рассматриваются высокочастотные поверхностные волны в линейной среде с неупругостью Максвелла–Больцмана–Вольтерра. Вертикальная зависимость материальных параметров достаточно произвольна. Слабая латеральная неоднородность и малая для высоких частот неупругость среды учитываются как возмущения. Строится главный член лучевого разложения, отвечающий балансу энергии вдоль вещественных поверхностных лучей, определяемых без учета диссипации. Обсуждаются примесные составляющие, т.е. рэлеевские компоненты смещения, описываемые поправкой следующего порядка малости. Заметка является продолжением [1].

1. Гармонические по времени смещения $\vec{U} = \vec{U}(\vec{r})$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, z)$ вязкоупругого полупространства описываются уравнениями

$$\partial_j \sigma_{mj}(\vec{U}) + \rho\omega^2 U_m = 0, \quad z > 0; \quad m = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\rho = \rho(\vec{r}) > 0$, $\sigma_{mj}(\vec{U}) = M(\vec{r})(\partial_m U_j + \partial_j U_m) + \delta_{mj}\Lambda(\vec{r})\operatorname{div}\vec{U}$, и для высоких частот, $\omega \to \infty$,

$$\Lambda(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) + \frac{l(\vec{r})}{-i\omega} + \dots, \quad M(\vec{r}) = \mu(\vec{r}) + \frac{m(\vec{r})}{-i\omega} + \dots; \tag{2}$$

λ, μ, ρ, l и m вещественны и не зависят от ω; λ, μ и ρ характеризуют эталонную идеальную упругую среду, $\lambda + 2\mu > \mu > 0$, а l и m – диссипацию; $m \leqslant 0$, $l + 2m \leqslant 0$. Граница $x_3 \equiv z = 0$ свободна от напряжений, т.е. там $\sigma_{3j}(\vec{U}) = 0$; $j = 1, 2, 3$. Допускаются скачки Λ и M при $z = h_1, \dots, h_N$; тогда выполнены условия жесткого контакта $[\vec{U}]_k = 0$, $[\sigma_{3j}(\vec{U})]_k = 0$, где $[]_k$ – скачок при $z = h_k$. Поверхностный характер решения означает, что $|\vec{U}| \to 0$ при $z \to \infty$.

2. Поверхностная волна ищется в виде лучевого ряда

$$\vec{U} = \exp\{i\omega\tau(x_1, x_2)\}\left\{\vec{\Psi}^{\,0} + \frac{\vec{\Psi}^{\,1}}{-i\omega} + \dots\right\}, \quad \omega \to \infty. \tag{3}$$

Медленность латеральных изменений параметров среды и амплитудных функций [1] приводит к формальному правилу

$$\partial_{1,2} = O(1); \quad D \equiv \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial z} = O(1), \quad \omega \to \infty. \tag{4}$$

Волны Лява выделяются условием SH поляризации нулевого приближения $\vec{\Psi}^{\,0} \| \vec{e}_\alpha$, где $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_z \times \vec{e}_\tau$. Вектор $\vec{e}_\tau = \nabla\tau(|\nabla\tau|)^{-1}$ имеет смысл единичной касательной к поверхностному лучу, $\vec{e}_z$ – единичный орт оси z, $\vec{e}_\alpha$ – единичный горизонтальный вектор, ортогональный к лучу. Другими словами, для волн Лява можно положить

$$\vec{\Psi}^{\,0} = V\vec{e}_\alpha. \tag{5}$$

3. При подстановке анзаца (3), (5) в уравнение (1) и граничные условия, в старшем порядке по ω возникает спектральная задача

$$\left.\begin{array}{l} \left(D\mu D + \rho - \dfrac{\mu}{c^2}\right) V = 0, \quad z > 0; \\ DV = 0, \quad z = 0; \\ [V]_k = 0, \quad [\mu DV]_k = 0, \quad k = 1, \dots, N; \\ |V| \to 0, \quad z \to \infty, \end{array}\right\} \tag{6}$$

где обозначено

$$(\partial_1\tau)^2 + (\partial_2\tau)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad c = c(x_1, x_2).$$

Здесь V – собственная функция, а $\frac{1}{c^2}$ – собственное число. Это задача о плоской лявовской волне в горизонтально-однородной структуре без диссипации; c имеет смысл фазовой скорости; x_1 и x_2 играют роль параметров. Мы предполагаем, что решение задачи (6) существует, и что V и c гладко зависят от x_1 и x_2.

4. Зафиксируем собственное число. Зададим поле поверхностных лучей, построим соответствующий эйконал τ и введем в плоскости (x_1, x_2) лучевые координаты [2]. Зависимость V от x_1

и x_2 находится из условия разрешимости возникающей в следующем порядке задачи для $\vec{\Psi}^1$ и имеет вид

$$V = \exp(-B)v^0, \tag{7}$$

где

$$v^0 = c^{1/2}\left(J\int\limits_0^\infty \mu|v|^2dz\right)^{-1/2} vg(\alpha), \tag{8}$$

$$B = -\frac{\omega}{2}\int\frac{d\sigma}{cQ}, \quad \frac{1}{cQ} = \int\limits_0^\infty m(c^2|Dv|^2 + |v|^2)dz\left(\int\limits_0^\infty \mu|v|^2dz\right)^{-1}. \tag{9}$$

Здесь v – произвольно нормированная собственная функция задачи (6), интеграл по $d\sigma$ берется вдоль луча, а $d\sigma$ – элемент длины его дуги, J – геометрическое расхождение лучей, а $g(\alpha)$ – произвольная гладкая функция (начальные данные) характеризующая распределение поля вдоль некоторого начального фронта (или направленность источника). Формулы (7)–(9) выражают условие баланса энергии вдоль лучей.

Отметим, что v^0 описывает отвечающую тем же лучам лявовскую волну в отсутствие диссипации (см., например, [3]).

5. В следующем порядке смещение уже не параллельно, вообще говоря, $\vec{e}_\alpha$, а

$$\vec{\Psi}^1 = U\vec{e}_\tau + \tilde{V}\vec{e}_\alpha + W\vec{e}_z. \tag{10}$$

Примесные компоненты U и W, удовлетворяют следующей неоднородной задаче для рэлеевского оператора

$$\begin{gathered}
\left(D\mu D+\rho-\frac{\nu}{c^2}\right)U+\frac{i}{c}(\lambda D+D\mu)W=\frac{-1}{c^2J}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\mu\right)cV-2\frac{\mu}{c}KV,\\
\left(D\nu D+\rho-\frac{\mu}{c^2}\right)W+\frac{i}{c}(\mu D+D\lambda)U=\frac{i}{cJ}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\mu D+D\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)cV,\\
z>0;
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&\nu DW + \frac{i}{c}\lambda U - \frac{i\lambda}{cJ}\frac{\partial}{\partial\alpha}(cV) = 0, \quad DU + \frac{i}{c}W = 0, \quad z = 0;\\
&\left[\nu DW + \frac{i}{c}\lambda U - \frac{i\lambda}{cJ}\frac{\partial}{\partial\alpha}(cV)\right]_k = 0, \quad \left[\mu\left(DU + \frac{i}{c}W\right)\right]_k = 0, \\
&[U]_k = 0, \quad [W]_k = 0, \quad k = 1,\dots,N;\\
&|U| + |W| \to 0, \quad z \to \infty.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\nu = \lambda + 2\mu$, а $K = \frac{c}{J}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{c}\right)$ – кривизна поверхностного луча. Эта задача выглядит точно так же, как для идеально упругой среды.

6. Как и в [1], нам удалось найти явно U и W для двух специальных типов зависимости λ, μ и ρ от x_1 и x_2 *при любой их зависимости от* z.

6a. Случай латерально однородной эталонной среды, т.е. λ, μ и ρ, не зависящих от $x_{1,2}$; l и m могут зависеть от x_1, x_2 и z. Поле прямолинейных поверхностных лучей произвольно (лишь бы наблюдатель не находился на каустике). Тогда

$$U = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\alpha}(cV), \quad W = 0. \tag{12}$$

В частности, для центрального поля лучей, отвечающего источнику при $x_1 = x_2 = 0$, можно положить $\tau = \frac{r}{c}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}$, $J = r$,

$$B = \frac{\omega}{2c}\int \frac{dr}{Q}. \tag{13}$$

6b. Случай “одномерного” распространения, когда, во-первых, λ, μ и ρ не зависят от x_2, а во-вторых, лучи – прямые, параллельные оси x_1. Допускается зависимость l и m от x_1, x_2 и z. Тогда по-прежнему имеет место (12). В этом случае можно положить $\alpha = x_2$, $J = 1$,

$$\tau = \int \frac{dx_1}{c}, \quad B = \frac{\omega}{2}\int \frac{dx_1}{cQ}. \tag{14}$$

7. Работа частично поддержана грантом 95–0–13.1–66 Госкомитета РФ по высшему образованию.

Литература

1. А. В. Арефьев, А. П. Киселев, *Вязкоупругие рэлеевские волны в слоистой структуре, слабо неоднородной по горизонтали.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **230** (1995), 7–13.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М, Наука, 1972.
3. А. Л. Левшин, Т. Б. Яновская и др., *Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле.* М, Наука, 1986.

Aref'ev A.V. and Kiselev A. P. Viscoelastic Love waves in a layered structure with a weak lateral inhomogeneity.

High frequency Love surface waves are considered in a linear medium with Maxwell–Boltzmann–Volterra anelasticity. Vertical dependecies of the material parameters are rather arbitrary. Weak lateral inhomogeneity as well as anelasticity which is small for high frequencies are treated by perturbation. The leading term of the ray expansion which corresponds to the energy balance along *real* surface rays is given. Additional components, i.e., the Rayleigh-type components of the displacement described by a higher-order correction are discussed.

С.-Петербургский Государственный
университет

Институт Проблем
Машиноведения РАН

Поступило 10 октября 1993 г.