В. М. Бабич

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН ВДОЛЬ СЛАБО НЕОДНОРОДНОГО В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ И СЛАБО ИЗОГНУТОГО АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

1. Введение.

В работе результаты статьи [1] распространяются на случай анизотропной упругой среды, что потребовало более сложной, чем в работе [1] тензорной техники. По сравнению с работой [2] (см. также [3–4]), посвященной волнам в слабо изогнутом анизотропном слое, в настоящем исследовании допускается большая изогнутость слоя, что приводит к появлению в соответствующей фазе Берри дополнительных слагаемых, зависящих от кривизны слоя. Изменение амплитуды волны удается выразить явной формулой через геометрическое расхождение лучей. Эта формула является следствием сохранения потока энергии в лучевой трубке. Анализ соответствующих уравнений естественно приводит к восходящей к Н. А. Умову (см. [6]) концепции, согласно которой энергия наподобие жидкости льется в физических телах, подчиняясь гидромеханическому уравнению неразрывности. В рассматриваемом случае поток энергетической "жидкости" двумерен. Современная трактовка подобных явлений по-существу предложена Уиземом [7], а в случае волноводного распространения колебаний Брезертоном [8]. О связи фазы Берри с соответствующим вариационным принципом см. [9].

Как указал автору С. Ю.Доброхотов, возможен подход к этому кругу задач на базе теории уравнений с операторными коэффициентами.

2. Исходные уравнения.

Для дальнейших рассмотрений нам потребуются выражения для уравнений теории упругости и тензора деформаций в произвольных, вообще говоря, неортогональных координатах. Мы кратко наметим вывод этих известных формул.

Пусть q^j, $j = 1, 2, 3$ криволинейные координаты, связанные с декартовыми x^i, $i = 1,2,3$ формулами: $x^i = x^i(q^1, q^2, q^3)$, $(i = 1,2,3)$ и однозначно в рассматриваемой области разрешимые относительно q^j, $j = 1,2,3$. Предполагается, что все функции, рассматриваемые здесь и в дальнейшем – гладкие. Квадрат длины между двумя бесконечно близкими точками – $\Sigma(dx^i)^2$ – выразим через q^j и dq^j

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3}(dx^i)^2 = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}dq^j\frac{\partial x^i}{\partial q^h}dq^h = G_{jh}(q^l)dq^j\,dq^h. \tag{2.1}$$

По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Здесь (G_{jh}) – так называемый метрический тензор $(G_{jh} = \frac{\partial x^i}{\partial q^j}\frac{\partial x^i}{\partial q^h})$.

Мы будем считать, что смещения и их производные малы. Пусть каждая точка x^j $(j = 1,2,3)$ упругой среды сместится на вектор (вектор смещения) $u^j(x^h)$ $(j,h = 1,2,3)$ и ее координатами станут $x^j + u^j$. Точка $x^j + dx^j$ после деформации будет иметь координаты: $x^j + dx^j + u^j(x^h + dx^h)$. Квадрат расстояния между этой точкой и $x^j + u^j$ равен с точностью до главных членов:

$$(ds')^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(x^j + dx^j + u^j(x^h) + \frac{\partial u^j}{\partial x^h}dx^h - x^j - u^j\right)^2 \approx$$

$$\approx ds^2 + 2\varepsilon_{hl}dx^h dx^l, \quad \varepsilon_{hl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^l}{\partial x^h} + \frac{\partial u^h}{\partial x^l}\right),$$

(ε_{hl}) – тензор деформаций в декартовой системе координат.

Чтобы получить выражение для тензора деформаций в системе координат q^j предположим, что точка q^j получила смещение u^j. Как смещение u^j, так и его производные считаются малыми. В тензорном исчислении векторы задаются своими контрвариантными координатами u^j (с верхними индексами) или ковариантными. Та точность, которая принята здесь, позволяет считать u^j – контрвариантными координатами вектора смещений.

Рассмотрим разность $(ds')^2 - (ds)^2$, где ds^2 квадрат расстояния между точками q^j и $q^j + dq^j$, $(ds')^2$ – квадрат расстояния между этими точками после деформации. Очевидно, что

$$ds'^{\,2} - ds^2 = G_{ij}(q^h + dq^h)d\left(q^i + u^i(q^1, q^2, q^3)d(q^j + u^j(q^1, q^2, q^3)\right) -$$

$$-G_{ij}(q^h)dq^i dq^j \approx 2\varepsilon_{lh}dq^l dq^r, \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{lh} = \frac{1}{2}\left(G_{lr}\frac{\partial u^r}{\partial q^h} + G_{rh}\frac{\partial u^r}{\partial q^l} + \frac{\partial G_{lh}}{\partial q^r}u^r \right). \tag{2.3}$$

Формула (2.3) и дает выражение для тензора деформаций в координатах q^j.

Для вывода выражения для уравнений движения удобно исходить из принципа Гамильтона

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{q} (E_c - E_p) dx dt = 0, \quad dx = dx^1 dx^2 dx^3, \tag{2.4}$$

E_c и E_p – плотности соответственно кинетической и потенциальной энергий. Мы предполагаем, что в декартовой системе координат

$$E_c = \frac{\rho}{2}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad E_p = \frac{1}{2}\Lambda^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}, \tag{2.5}$$

$$\left(\Lambda^{ijkl} = \Lambda^{klij} = \Lambda^{jikl} = \Lambda^{ijlk}\right). \tag{2.6}$$

Здесь Λ^{ijkl} – тензор Гука: компоненты тензоры напряжений σ^{ij} и тензора деформаций ε_{kl} связаны линейным соотношением (закон Гука):

$$\sigma^{ij} = \Lambda^{ijkl}\varepsilon_{kl}. \tag{2.7}$$

Соотношение (2.4) с учетом формул (2.5) можно записать в виде:

$$\delta \int \left(\frac{\rho}{2}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{1}{2}\Lambda^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \right) dx dt = 0. \tag{2.8}$$

Перейдем в равенстве (2.8) к координатам q^h, $h = 1, 2, 3$. Пусть $\lambda^{ijkl} = \lambda^{ijkl}(q^h)$ – тензор Гука в ситеме координат q^h. Соотношения типа (2.6) сохраняются:

$$\lambda^{ijkl} = \lambda^{klij} = \lambda^{jikl} = \lambda^{ijlk}. \tag{2.9}$$

Перейдем в вариационном равенстве (2.4) к координатам q^h:

$$\delta \int \left(\frac{\rho}{2}\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial u_i}{\partial t} G_{ij} - \frac{1}{2}\lambda^{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \right) \sqrt{G}\, dq dt, \tag{2.10}$$

$$G = \det(G_{ij}), \ dq = dq^1 dq^2 dq^3.$$

Здесь ε_{ij} имеют вид (2.3). Подставим в равенство (2.10) выражение для ε_{ij}. После небольших преобразований получим:

$$\delta\int\Big(\frac{1}{2}\rho\frac{\partial u^h}{\partial t}\frac{\partial u^m}{\partial t}G_{hm}-\frac{1}{2}\lambda^{ijkl}G_{ih}\frac{\partial u^h}{\partial q_j}G_{km}\frac{\partial u^m}{\partial q^l}-$$
$$-\frac{1}{4}\lambda^{ijkl}G_{ih}\frac{\partial u^h}{\partial q^j}\frac{\partial G_{kl}}{\partial q^m}u^m-\frac{1}{8}\lambda^{ijkl}\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^h}\frac{\partial G_{kl}}{\partial q^m}u^h u^m\Big)\sqrt{G}\,dqdt=0$$

или

$$\delta\int\mathcal{L}dqdt\equiv\delta\int\Big(\frac{1}{2}A^{00}_{hm}\frac{\partial u_h}{\partial t}\frac{\partial u_m}{\partial t}-\frac{1}{2}A^{jl}_{hm}\frac{\partial u^h}{\partial q^j}\frac{\partial u^m}{\partial q^l}-$$
$$-A^j_{hm}\frac{\partial u^h}{\partial q^j}u^m-\frac{1}{2}A_{hm}u^h u^m\Big)dqdt, \tag{2.11}$$

где

$$A^{00}_{hm}=\rho G_{hm}\sqrt{G},\quad A^{jl}_{hm}=\lambda^{ijkl}G_{ih}G_{km}\sqrt{G},$$
$$A^j_{hm}=\frac{1}{2}\lambda^{ijkl}G_{ih}\frac{\partial G_{kl}}{\partial q^m}\sqrt{G}, \tag{2.12}$$
$$A_{hm}=\frac{1}{4}\lambda^{ijkl}\frac{\partial G_{ij}}{\partial q^h}\frac{\partial G_{kl}}{\partial q^m}\sqrt{G}.$$

Уравнения движения – это уравнения Эйлера для функционала (2.11):

$$(\mathcal{L}u)_h=A^{00}_{hm}\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial q^j}\Big(A^{jl}_{hm}\frac{\partial u^m}{\partial q^l}+A^j_{hm}u^m\Big)+$$
$$+A^j_{mh}\frac{\partial u^m}{\partial q^j}+A_{hm}u^m=0. \tag{2.13}$$

В дальнейшем краевые условия, с которыми мы будем иметь дело – это свободные границы и жесткий контакт на границых раздела. Условия на свободной границе – это естественные граничные условия для функционала (2.11). Если свободная граница Σ описывается уравнением $\Psi(q^h)=0$, то на ней выполняется краевое условие:

$$(lu)_h=\Big(A^{jl}_{hm}\frac{\partial u^m}{\partial q^l}+A^j_{hm}u^m\Big)\frac{\partial\Psi}{\partial q^j}=0,\quad h=1,2,3 \tag{2.14}$$

физический смысл которого – отсутствие напряжений. Если Σ граница раздела, на которой выполняются условия жесткого контакта, то вектор смещения u на Σ – непрерывен и скачок компонент вектора u^h равен нулю

$$[u^h] = 0. \tag{2.15}$$

Кроме равенства (2.15) на Σ должны обращаться в нуль скачки компонент вектора поверхностных сил. Это условие, при выполнении (2.15) тоже является естественным и имеет вид:

$$[(lu)_h] = \left[A^{jl}_{hm}\frac{\partial u^m}{\partial q^n} + A^{j}_{hm}u^m\right]\frac{\partial \Psi}{\partial q^j} = 0, \quad h = 1,2,3. \tag{2.16}$$

(предполагается, что Σ как и ранее имеет уравнением $\Psi(q^h) = 0$).

3. Об аналитическом описании слабо неоднородного анизотропного упругого слоя.

Предположим, что упругий слой слабо изогнут. Это выражается в том, что параметрическое уравнение одной из поверхностей (Σ_0), ограничивающих слой, имеет вид:

$$x^j = x^j(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime})\frac{1}{\varepsilon}, \quad q^{\alpha\,\prime} = \varepsilon q^\alpha, \quad j = 1,2,3; \quad \alpha = 1,2. \tag{3.1}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – малый параметр задачи. Пусть третья координата $q^3 = n$ равна расстоянию рассматриваемой точки M от Σ_0. Границы раздела и вторая поверхность (Σ), ограничивающая слой, пусть имеют в координатах q^h –уравнения соответственно:

$$q^3 = h_r(q^{\prime\,\alpha}) \quad r = 1,2,\dots,N, \quad q^3 = h(q^{\prime\,\alpha}), \quad \alpha = 1,2, \quad q^{\prime\,\alpha} = \varepsilon q^\alpha \tag{3.2}$$

(N – число границ раздела).

Наши геометрические предположения о слое по-существу те же, что и в работе [1].

Радиус вектор $\vec{R}$ произвольной точки x^1, x^2, x^3 в координатах q^h $(h = 1,2,3)$ выражается формулой

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime})}{\varepsilon} + \vec{n}(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime})q^3. \tag{3.3}$$

Здесь $\vec{n}$ единичная нормаль к “нижней” границе слоя, направленная в ту сторону, где расположен слой. Квадрат элемента длины, как следует из формулы (3.3), равен:

$$(d\vec{R})^2 = \frac{\partial x^l}{\partial q^i}dq^i\frac{\partial x^l}{\partial q^j}dq^j = G_{ij}\,dq^i dq^j. \tag{3.4}$$

Метрический тензор (G_{ij}) имеет вид:

$$(G_{ij}) = (g_{ij}) - 2\varepsilon(\beta_{ij})q^3 + \varepsilon^2 c_{ij}. \tag{3.5}$$

Здесь матрица (g_{ij}) имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}), \quad \alpha, \beta = 1, 2. \tag{3.6}$$

Матрица $(g_{\alpha\beta})$ $\alpha, \beta = 1, 2$ – матрица первой квадратичной формы Гаусса, $\beta_{3i} = \beta_{i3} = 0$ при $i = 1, 2, 3$, а $\varepsilon\beta_{ij}(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime})$ при $i, j = 1, 2$ коэффициенты второй квадратичной формы Гаусса, выражения для коэффициентов c_{ij} нам не потребуются.

Мы предполагаем, что плотность ρ и компоненты тензора Гука λ^{ijml} являются медленно меняющимися функциями q^1, q^2. Ни медленности, ни быстроты изменения ρ и λ^{ijml} как функций q^3 не предполагается:

$$\rho = \rho(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}, q^3), \quad \lambda^{ijml} = \lambda^{ijml}(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}, q^3).$$

На границах раздела ρ и λ^{ijml} могут иметь скачки.

Для дальнейшего нам нужно будет ввести новые обозначения. Как следует из (2.12) и (3.5), коэффициенты $A^{00}_{hm}, A^{jl}_{hm} \dots$ разлагаются по степеням ε:

$$\begin{aligned} A^{00}_{hm} &= a^{00}_{hm} + \varepsilon b^{00}_{hm} + \dots, \quad & A^{jm}_{hm} &= a^{jm}_{hm} + \varepsilon b^{im}_{hm} + \dots \\ A^{j}_{hm} &= \varepsilon b^{j}_{hm} + \dots, & A_{hm} &= O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Точками обозначены члены порядка ε^2 и выше. Коэффициенты a и b с разными индексами – функции $q^{1\,\prime}$, $q^{2\,\prime}$, q^3 и не зависят от ε непосредственно. Легко видеть, что

$$a^{00}_{hm} = \rho g_{hm}\sqrt{g}, \quad a^{jl}_{hm} = \lambda^{ijkl} g_{ih} g_{km}\sqrt{g}, \tag{3.8}$$

$$g = \det(g_{ij}),$$

$$\begin{aligned} b^{00}_{hm} &= -2\rho\beta_{hm}\sqrt{g}q^3 - \rho g_{hm} g^{kl}\beta_{kl}\sqrt{g}\, q^3, \\ b^{jl}_{hm} &= -\lambda^{ijkl}\left[2\beta_{ih}g_{km} + 2g_{ih}\beta_{km} + g_{ih}g_{km}g^{nr}\beta_{nr}\right]\sqrt{g}\, q^3, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$b^{j}_{hm} = \frac{1}{2}\lambda^{ijkl} g_{ih}\sqrt{g} \begin{cases} \dfrac{\partial g_{kl}}{\partial q^{m'}}, & m = 1, 2 \\ -2\beta_{kl}, & m = 3. \end{cases} \tag{3.10}$$

Здесь (g^{ij}) – матрица, обратная к (g_{ij}), $\varepsilon(\beta_{hm})$ – матрица второй квадратичной формы Гаусса. По определению $\beta_{3m} = \beta_{m3} = 0$ $(m = 1, 2, 3)$. Нетрудно подсчитать, что

$$\varepsilon g^{nr}\beta_{nr} = 2K,$$

K – средняя кривизна поверхности.

4. Анзац и связанные с ним формулы.

Анзац – т.е. аналитический вид искомого формального решения уравнения (2.13) аналогичен анзацу работ [1–5, 8–9]:

$$u^j = U^j \exp\left(\frac{i\theta(t', q^{\alpha\,\prime})}{\varepsilon}\right), \quad \alpha = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \tag{4.1}$$

$$U^j = \sum_{r=0}^{\infty} U_r^j (i\varepsilon)^r, \quad U_r^j = U_r^j(t', q^{\alpha\,\prime}, q^3). \tag{4.2}$$

Подставляя разложение (4.1)–(4.2) в (2.13), получаем рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}U_0 = 0, && U_r = U_r^1 U_r^2, U_r^3 \\ &\mathcal{N}U_1 + \mathcal{M}U_0 = 0, && r = 0, 1, 2, \ldots \\ &\mathcal{N}U_2 + \mathcal{M}U_1 + LU_0 = 0, && \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$, $L \ldots$ дифференциальные операторы, содержащие производные по t', $q^{\alpha\,\prime}$, q^3. Коэффициенты этих операторов зависят от $q^{\alpha\prime}$, q^3 и не содержат "свободного" ε – не входящего в $q^{\alpha\prime}$. Чтобы выписать компактнее $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$, а также соответствующие краевые условия, удобно ввести обозначения:

$$d_l = \begin{cases} \theta_l, & l = 1, 2 \\ \dfrac{1}{i}\dfrac{d}{dq^3}, & l = 3. \end{cases} \tag{4.4}$$

С учетом формул (2.13) и (3.7) нетрудно подсчитать, что h-ая компонента $(\mathcal{N}U)_h$ вектора $\mathcal{N}U$ равна:

$$(\mathcal{N}U)_h = -a_{hm}^{00}\theta_0^2 U^m + d_j\left(a_{hm}^{jl} d_l U^m\right).$$

Вектор $\mathcal{M}U$ – естественно разбивается на два слагаемых:

$$MU = M_1U + M_2U, \tag{4.6}$$

где

$$(M_1U)_h = i\Big(b^{00}_{hm}\theta_0^2U^m - d_j(b^{jl}_{hm}d_lU^m)\Big) - \\ -d_j(b^j_{hm}U^m) + b^j_{hm}d_jU^m, \tag{4.7}$$

$$(M_2U)_h = 2a^{00}_{hm}\frac{\partial U^m}{\partial t'}\theta_0 + a^{00}_{hm}U^m\theta_{00} - \\ -\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\prime}}(a^{\alpha l}_{hm}d_lU^m) - d_l\left(a^{l\alpha}_{hm}\frac{\partial U^m}{\partial q^{\alpha\prime}}\right) \tag{4.8}$$

$$\theta_0 = \frac{\partial\theta}{\partial t'}, \quad \theta_{00} = \frac{\partial^2\theta}{(\partial t')^2}, \quad \alpha = 1,2, \quad h,l,m = 1,2,3.$$

Обратимся к краевым условиям (2.14)–(2.16). Функция Ψ в нашем случае равна

$$\Psi = q^3 - h_r(q^{1\prime}, q^{2\prime}), r = 1,2,\dots,N, \quad \text{или} \quad \Psi = q^3 - h(q^{1\prime}, q^{2\prime}). \tag{4.9}$$

Подставляя выражение (4.1) в (2.14), получим:

$$\left(l_2Ue^{i\frac{\theta}{\varepsilon}}\right)_h e^{-i\frac{\theta}{\varepsilon}} = i(nU)_h + \varepsilon(mU)_h, \tag{4.10}$$

где

$$(nU)_h = a^{3l}_{hm}d_lU^m, \tag{4.11}$$

$$(mU)_h = ib^{3l}_{hm}d_lU^m + b^3_{hm}U^m + a^{3\alpha}_{hm}\frac{\partial U^m}{\partial q^{\alpha\,\prime}} - ia^{\alpha l}_{hm}d_lU^m\frac{\partial h}{\partial q^{\alpha\,\prime}}. \tag{4.12}$$

Учитывая формулы (4.2), мы приходим к рекуррентной системе краевых задач:

$$NU_0 = 0$$

$$nU_0 = 0 \quad q^3 = 0 \qquad \text{и} \quad q^3 = h(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}) \tag{4.13}$$

$$[U_0] = 0, \quad [nU_0] = 0 \quad \text{при} \quad q^3 = h_r(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}). \tag{4.14}$$

Краевые задачи для U_1, U_2 – неоднородные. Для U_1 краевая задача имеет вид

$$\mathcal{N}U_1 + \mathcal{M}U_0 = 0 \tag{4.15}$$

$$nU_1 - mU_0 = 0 \quad \text{при} \quad q^3 = 0 \quad \text{и} \quad q^3 = h(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}) \tag{4.16}$$

$$[U_1] = 0, \ [nU_1 - mU_0] = 0 \quad \text{при} \quad q^3 = h_r(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}), \quad r = 1,2,\dots,N.$$

Для U_2, $U_3\dots$ краевые задачи аналогичны.

5. О краевой задаче (4.13)–(4.14).

Операторы $\mathcal{N}$ и n содержат дифференцирования только по q^3, поэтому (4.13)–(4.14) – это одномерная краевая задача на отрезке $0 \leqslant q^3 \leqslant h$, зависящая от $q^{\alpha\,\prime}$, $\alpha = 1, 2$ как от параметров. Если координаты q^α $\alpha = 1, 2$ на поверхности $q^3 = 0$ в данной точке выбрать так, чтобы матрица (g_{ij}) стала в этой точке единичной, то легко видеть, что краевая задача совпадает с задачей о нахождении волн, распространяющихся вдоль упругого слоя, однородного в горизонтальных направлениях.

Задав θ_α $\alpha = 1, 2$, мы получили задачу (4.13)–(4.14) на отыскании собственной вектор-функции U_0, причем роль собственного числа играет θ_0^2, Задача (4.13)–(4.14) оказывается самосопряженной, оператор – положительно определенным, поэтому $\theta_0^2 > 0$. Мы будем считать, что собственное число θ_0^2 однократно, отрицательно и гладко зависит от $q^{\alpha\,\prime}$ и θ_α:

$$\theta_0 = -H(\theta_\alpha, q^\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \quad H > 0. \tag{5.1}$$

На равенство (5.1) можно смотреть как на уравнение в частных производных для нахождения эйконала $\theta = \theta(t', q^{\alpha\,\prime})$.

По форме уравнение (5.1) является классическим уравнением Гамильтона–Якоби. Как известно его решение можно найти, если задано начальное значение

$$\theta\big|_{t'=0} = \theta^0(q_1', q_2'). \tag{5.2}$$

Начальное условие (5.2) определяет начальные значения $\theta_\alpha|_{t'=0}$ $\alpha = 1, 2$, после чего θ вычисляется, если проинтегрировать каноническую систему

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dq^\alpha}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}, \quad \frac{\partial \theta_0}{ds} = 0, \quad \frac{d\theta_\alpha}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \tag{5.3}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -H + \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2)$$

с начальными условиями

$$t'\big|_{s=0} = 0, \quad q^{\alpha\,\prime}\big|_{s=0} = a^\alpha, \quad \theta\big|_{s=0} = \theta^0(a^1, a^2),$$
$$\theta_\alpha\big|_{s=0} = \theta_\alpha^0(a^1, a^2).$$

В результате мы приходим к типичной для пространственно-временного лучевого метода зависимости t и $q^{\alpha\,\prime}$ от s и a^α:

$$\begin{aligned} t' &= s \\ q^{\alpha\,\prime} &= q^{\alpha\,\prime}(s, a^1, a^2) = q^{\alpha\,\prime}(t, a^1, a^2). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Равенства (5.4) определяют "поток" точек движущихся по поверхности Σ – своеобразный аналог потока жидкости, скорость которой в каждой точке равна

$$\frac{dq^{\alpha\,\prime}}{dt'} = \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \tag{5.5}$$

Вектор $(\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha})$ ($\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}$ – контрвариантные координаты вектора на поверхности $q^3 = 0$) играет в дальнейшем фундаментальную роль. Он называется вектором групповой скорости. Соотношение (5.4) – это, по-существу, замена координат t', $q^{1\,\prime}$, $q^{2\,\prime}$ на s, a^1, a^2. Координаты s, a^1, a^2 – аналог классических лагранжевых координат в гидромеханике. В лагранжевых координатах уравнение (5.1) при начальном значении (5.2) легко решается:

$$\theta(s, a_1, a_2) = \theta(a_1, a_2) + \int\limits_0^s \Big(- H + \theta_\alpha \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha}\Big) ds. \tag{5.6}$$

Решение $t = s$, $q^{\alpha\,\prime} = q^{\alpha\,\prime}(s)$ – естественно назвать пространственно временным лучом.

6. Усреднения и первое гидроэнергетическое равенство.

В наших дальнейших построениях большую роль играет усреднение (здесь мы следуем известной методике (см. [1–5, 8–9]), восходящей к Уизему [7]).

Если $f(\zeta)$–a-периодическая ($a > 0$) функция, то усреднением $\langle f \rangle$ функции f называется интеграл

$$\langle f \rangle = \frac{1}{a} \int\limits_0^a f(\zeta) d\zeta. \tag{6.1}$$

Функция $f(-\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2)$ (ω, k_1, k_2 – вещественные отличные от нуля числа) периодична по t и x_1, x_2 (периоды $\frac{a}{|\omega|}$, $\frac{a}{|k_1|}$, $\frac{a}{|k_2|}$). Усреднене $f(-\omega t + k_1 x_1 + k_2 x_2)$ по t или x_j ($j = 1, 2$) дает одно и то же значение (6.1). Отметим еще важное, хотя и элементарное соотношение: пусть $y_j = \mathrm{Re}(a_j e^{-i\omega t})$, $j = 1, 2$, $\omega > 0$, тогда

$$\langle\, y_1, y_2 \,\rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, a_1 \overline{a_2}. \tag{6.2}$$

В дальнейшем мы будем прменять операцию усреднения к разложениям (4.1), точнее к частным суммам разложения (4.1), причем усреднения мы будем использовать с точностью до главных членов. Аналоги соответствующих вычислений делались в цитированной литературе, поэтому мы практически все выкладки опустим. Первое равенство, нужное нам – это

$$\int\limits_0^h \langle\, \mathcal{L} \,\rangle dq^3 = 0. \tag{6.3}$$

Здесь необходимы разъяснения. Вернемся к анзацу (4.1). В первом приближении около фиксированной точки он превращается в волноводную моду

$$\begin{gathered} U_0^h(t_0', q_0^{1\prime}, q_0^{2\prime}) \cdot \exp\left(i\frac{1}{\varepsilon}\theta(t_0', q_0^{1\prime}, q_0^{2\prime}) \right) \cdot \\ \cdot \exp\left(-\omega(t - t_0) + k_\alpha (q^\alpha - q_0^\alpha) \right) \end{gathered} \tag{6.4}$$

$$\omega = -\frac{\partial\theta}{\partial t'}, \quad k_\alpha = \frac{\partial\theta}{\partial q^{\alpha\,\prime}}, \quad \alpha = 1, 2 \ \text{ при } \ t' = t_0', \quad q^{\alpha\,\prime} = q_0^{\alpha\,\prime}.$$

Выражение (6.4) – точное решение уравнения (2.13), удовлетворяющее соответствующим краевым условиям, где в коэффициентах оставлены лишь главные не стремящиеся к нулю члены при $\varepsilon \to 0$, а $q^{\alpha\,\prime}$ заменены на $q_0^{\alpha\prime} = \mathrm{const}$, $\alpha = 1, 2$.

Подынтегральное выражение в равенстве (2.11) превращается тогда в

$$\frac{1}{2} a_{hm}^{00}(q_0^{\alpha\prime}, q^3) \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{\partial u^m}{\partial t} - \frac{1}{2} a_{hm}^{jl}(q_0^{\alpha\prime}, q^3) \frac{\partial u^h}{\partial q^j} \frac{\partial u^m}{\partial q^m}. \tag{6.5}$$

Подставим сюда вместо u^h – вещественную часть выражения (6.4). Мы получим вещественную периодическую по t, q^α (периоды соответственно $\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{2\pi}{|k_\alpha|}$, $\alpha = 1, 2$) функцию. Результат ее усреднения, деленный на $\sqrt{g}$, и есть $\langle\, \mathcal{L} \,\rangle$:

$$\langle\, \mathcal{L} \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\langle \frac{1}{2} a_{hm}^{00} \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{\partial u^m}{\partial t} - \frac{1}{2} a_{hm}^{jl} \frac{\partial u^h}{\partial q^j} \frac{\partial u^m}{\partial q^l} \right\rangle. \tag{6.16}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{g}}\left\langle \frac{1}{2}a^{00}_{hm}\frac{\partial u^h}{\partial t}\frac{\partial u^m}{\partial t}\right\rangle = \langle\,\mathcal{E}_c\,\rangle, \\ \frac{1}{\sqrt{g}}\left\langle \frac{1}{2}a^{jl}_{hm}\frac{\partial u^h}{\partial q^j}\frac{\partial u^m}{\partial q^l}\right\rangle = \langle\,\mathcal{E}_p\,\rangle, \end{gathered} \tag{6.17}$$

где $\langle\,\mathcal{E}_c\,\rangle$ и $\langle\,\mathcal{E}_p\,\rangle$ главные части при $\varepsilon \to 0$ усреднений плотностей кинетической и потенциальной энергий, так что равенство (6.3) можно переписать так:

$$\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}_c\,\rangle dq^3 = \int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}_p\,\rangle dq^3. \tag{6.18}$$

Равенство (6.18) является аналогом для рассматриваемой формы колебаний известной в механике теоремы вириала (см. [10]). Элементарная выкладка дает

$$\begin{gathered} \int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}_c\,\rangle dq^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^h a^{00}_{hm}(q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime}, q^3)\theta_0^2 U_0^h \overline{U_0^m} dq^3 = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3,\ \langle\,\mathcal{E}\,\rangle = \langle\,\mathcal{E}_c\,\rangle + \langle\,\mathcal{E}_p\,\rangle. \end{gathered} \tag{6.19}$$

Обратимся теперь к энергетическому тождеству

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = 0, \tag{6.20}$$

где $\mathcal{E}$ – плотность энергии

$$\mathcal{E} = \frac{\rho}{2}{u'}_t^2 + W = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$(S^i) = \vec{S}$ – вектор потока энергии, где в произвольной системе координат составляющая S^i вектора S равна

$$S^i = -\sigma^{ij}\frac{\partial u^h}{\partial t}G_{jh}. \tag{6.21}$$

Перейдем в (6.21) к координатам q^i. Вместо u^h подставим в (6.21) вещественную часть волноводной моды (6.4) и отбросим в выражениях для тензора деформаций и G_{ij} все члены, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Мы придем к функциям S^i, периодическим по t, q^α $\alpha = 1, 2$. Усредняя по этим переменным, получим для главной части $\langle S^i \rangle$:

$$\langle S^i \rangle = -\theta_0 \operatorname{Re}\left(\lambda^{ijml} d_m U^h \overline{U^r} g_{hl} g_{rj}\right) = -\frac{\theta_0}{2g} \operatorname{Re}\left(a^{ik}_{hm} d_k U^h \overline{U^m}\right). \tag{6.22}$$

Черта означает комплексное сопряжение.

Дифференцируя (6.3) по θ_α, $\alpha = 1, 2$, получаем соотношение, которое естественно назвать <u>первым гидроэнергетическим равенством</u>

$$\int_0^h \langle \mathcal{E} \rangle dq^3 \vec{V} = \int_0^h \langle \vec{S} \rangle dq^3. \tag{6.23}$$

Здесь $\vec{V} = (V^\alpha)$, $\alpha = 1, 2$ – вектор групповой скорости. Его контрвариантные компоненты равны:

$$V^\alpha = \frac{\partial(-\theta_0)}{\partial \theta_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{6.24}$$

$\langle \mathcal{E} \rangle$ главна часть усреднения плотности энергии

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \theta_0^2 g_{ij} U_0^i \overline{U_0^j}\, \frac{\rho}{2} = \\ &= \theta_0^2 g_{ij} U_0^i \overline{U_0^j}\, \frac{\rho}{4} + \lambda^{ijkl} g_{ih} g_{lm} d_i U_0^h d_k \overline{U_0^m}\, \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

7. О решении уравнений переноса.

Из (4.12)–(4.13) следует, что

$$U_0^h = \psi_0(t', x_1', x_2') U_{00}^h, \quad h = 1, 2, 3, \tag{7.1}$$

где U_{00}^h – какое-то фиксированное решение этой задачи, ψ_0 пока остается неопределенным.

Уравнение для ψ_0 удается найти, анализируя следующие уравнения переноса (4.14)–(4.15). Задача (4.14)–(4.15) – это задача нахождения вектора U_1. Вообще говоря, найти U_1 из уравнений и краевых условий (4.14)–(4.15) при произвольно заданном U_0 невозможно, так как соответствующая однородная задача (4.12)–(4.13) имеет по условию нетривиальное решение $\vec{U}_{00}$.

Найдем соответствующее условие разрешимости. Уравнение (4.14) запишем в виде:

$$(\mathcal{N}U_1)_h + (\mathcal{M}U_0)_h = \overline{O}. \tag{7.2}$$

Умножим (7.2) на $\vec{U}_0^h$ и проинтегрируем по частям "освобождая" U_1^h от производных. Используя (4.12)–(4.13) и краевые условия (4.15), мы, в конце концов, придем к соотношению, не содержащему U_1^h. Подставляя вместо U_0^h выражение (7.1), мы получим уравнение для $\psi_0(t', x_1', x_2')$. Решение этого уравнения и определяет ψ_0, а, следовательно, и всю "волну" в первом приближении (см. [1–5, 8–9]).

Наметим соответствующие выкладки. В силу того, что коэффициенты дифференциального оператора $\mathcal{N}$ имеют, вообще говоря, скачки в точках $q^3 = h_r$, мы разобьем промежуток интегрирования на отрезки $[\overline{O}, h_1]$, $[h_1, h_2]$, $\ldots$, $[h_N, h]$, на каждом отрезке интегрированием по частям "очистим" U_1 от производных. В силу формальной самосопряженности оператора N и равенства $\mathcal{N}U_{00} = 0$, мы придем к соотношению

$$\begin{gathered}-i(nU_1)_j\overline{U_{00}^j}\,\Big|_0^h + i\sum_{r=1}^{N}\Big([nU_1]_j\overline{U_{00}^j}\Big)_{q^3=h_r} + \\ + \int\limits_0^h (MU_0)_j\overline{U_{00}^j}\,dq^3 = 0.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Пользуясь краевыми условиями (4.16), легко исключить U_1 из равенств (7.3)

$$\begin{gathered}(-i)(mU_0)_j\overline{U_{00}^j}\,\Big|_0^h + i\sum_{r=1}^{N}\Big([mU_0]_j\overline{U_{00}^j}\Big)_{q^3=h_r} + \\ + \int\limits_0^h (MU_0)_j\overline{U_{00}^j}\,dq^3 = 0.\end{gathered} \tag{7.4}$$

Подставим в (7.4) вместо U_0 его выражение (7.1), тогда (7.4) превратится в линейное уравнение для ψ_0.

Немного преобразуем полученное выражение. Обратимся к формулам для M (см. (4.6)–(4.8)) Интеграл

$$-\int\limits_0^h \left(d_3 a_{hm}^{3\alpha} \frac{\partial U_0^m}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\right) \overline{U_{00}^h}\, dq^3 \quad \left(d_3 = \frac{1}{i}\frac{d}{dq^3}\right), \tag{7.5}$$

входящий в равенство (7.4), возьмем по частям, перебрасывая производную на $\overline{U_{00}^h}$. При интегрировании по частям за счет двойной подстановки выделятся члены при $q^3 = 0, h, h_r$. Замечательно, что эти члены сократятся с членом, содержащим $\frac{\partial U^m}{\partial q^{\alpha\,\prime}}$, см. (4.11). В результате слагаемых, содержащих производные по $q^{\alpha\,\prime}$, $\alpha = 1, 2$ во внеинтегральном выражении не будет. Выражение (7.4) – это линейное уравнение в частных производных для $\psi_0(t', q_1', q_2')$:

$$C^0 \frac{\partial \psi_0}{\partial t'} + C^\alpha \frac{\partial \psi_0}{\partial q^{\alpha\,\prime}} + \mathcal{D}\psi_0 = 0. \tag{7.6}$$

Для нахождения C^0, C^1, C^2 и $\mathcal{D}$ следует сделать некоторые вычисления. Обратимся к выражениям (4.7), (4.8). Преобразуем с помощью интегрирования по частям интеграл

$$\int\limits_0^h \left(-d_3\left(b_{hm}^{3l} d_l U_0^m\right) - d_3 b_{hm}^3 U_0^m\right) \overline{U_{00}^h}\, dq^3,$$

$$(d_1 = \theta_1,\ d_2 = \theta_2,\ d_3 = \frac{1}{i}\frac{d}{dq^3})$$

(см. формулу (4.7)). Если учесть формулу (4.11), то все внеинтегральные члены исчезнут, кроме

$$\Phi \equiv -a_{hm}^{\alpha l} d_l U_0^m \frac{\partial h}{\partial q^{\alpha\,\prime}} \overline{U_{00}^h}\Big|_{q^3=h} + \sum_{r=1}^{N} \left[a_{hm}^{\alpha l} d_l U_0^m \frac{\partial h_r}{\partial q^\alpha}, U_{00}^h\right]_{h_r}, \tag{7.7}$$

а выражение (7.4) примет вид:

$$\begin{gathered}
\Phi + i\int\limits_0^h \left(b^{00}_{hm}\theta_0^2 U_0^m \overline{U_{00}^h} - b^{jl}_{hm} d_l U_0^m d_j \overline{U_{00}^h}\right) + \\
+\int\limits_0^h \left(-b^j_{hm} U_0^m \overline{d_j U_{00}^h} + b^j_{mh} d_j U_0^m \overline{U_{00}^h}\right) dq^3 + \\
+\int\limits_0^h \left(2a^{00}_{hm}\frac{\partial U_0^m}{\partial t'}\theta_0 \overline{U_{00}^h} + a^{00}_{hm} U_0^m \theta_{00}\overline{U_{00}^h}\right) - \\
-\left(\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\left(a^{\alpha l}_{hm} d_l U_0^m\right)\right)\overline{U_{00}^h} - a^{l\alpha}_{hm}\frac{\partial U_0^m}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\overline{d_l U_{00}}\Big) dq^3 = 0.
\end{gathered} \tag{7.8}$$

Выражение (7.8) можно упростить:

$$\begin{gathered}
\Phi + \int\limits_0^h \left(-\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}} a^{\alpha l}_{hm} d_l U_0^m\right)\overline{U_{00}^h} - \left(a^{l\alpha}_{hm}\frac{\partial U_0^m}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\overline{d_l U_{00}}\right) dq^3 = \\
= \frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\int\limits_0^h \left(-a^{\alpha l}_{hm} d_l U_0^m \overline{U_{00}^h}\right) dq^3 + \\
+\int\limits_0^h \left(a^{\alpha l}_{hm} d_l U_0^m \frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\overline{U_{00}^h} - a^{\alpha l}_{hm}\overline{d_l U_0^m}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}} U_{00}^h\right) dq^3.
\end{gathered} \tag{7.9}$$

Последний интеграл чисто мнимый. Возвратимся теперь к равенству (7.6). Прямые выкладки, основанные на равенстве (4.8), дают:

$$\begin{gathered}
C^0 = 2\theta_0 \int\limits_0^h U_{00}^m a^{00}_{hm}\overline{U_{00}^h} dq^3 \\
C^\alpha = -\int\limits_0^h a^{\alpha l}_{hm} d_l U_{00}^m \overline{U_{00}^h} dq^3 - \int\limits_0^h a^{l\alpha}_{hm} U_{00}^m \overline{d_l U_{00}^h} dq^3.
\end{gathered}$$

Легко видеть, что выражения для C^γ, $\gamma = 0,1,2$ можно переписать так:

$$C^0 = \frac{4}{\theta_0\sqrt{q}} \int_0^h \langle\, \mathcal{E}_{00}\,\rangle dq^3, \tag{7.10}$$

и

$$C^\alpha = \frac{4}{\theta_0\sqrt{q}} \int_0^h \langle\, S_{00}^\alpha\,\rangle dq^3, \tag{7.11}$$

(см. (6.22) и (6.24)). Индекс $_{00}$ означает, что соответствующие величины сосчитаны для вектора U_{00}. Первое гидроэнергетическое равенство (6.23) дает возможность записать уравнение (7.6) в виде:

$$\frac{4}{\theta_0\sqrt{q}} \int_0^h \langle\, \mathcal{E}_{00}\,\rangle dq^3 \left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t'} + V^\alpha \frac{\partial\psi_0}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\right) + \mathcal{D}\psi_0 = 0. \tag{7.12}$$

Из канонической системы (5.3), если учесть равенство $\frac{\partial H}{\partial\theta_\alpha} = U^\alpha$, следует, что уравнение (7.12) является обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль пространственно временного луча (см. конец пункта 5):

$$\frac{4}{\theta_0\sqrt{q}} \int_0^h \langle\, \mathcal{E}_{00}\,\rangle dq^3 \frac{\partial\psi_0}{\partial s} + \mathcal{D}\psi_0 = 0. \tag{7.13}$$

Таким образом уравнения переноса разрешимы, если лагранжевы координаты s, a^1, a^2 регулярны.

8. Второе гидроэнергетическое равенство.

Выражение для ψ_0 из уравнения (7.13) нетрудно записать в квадратурах, содержащий $\mathcal{D}$. Выражение для $\mathcal{D}$ довольно сложное. Оказывается, здесь возможны некоторые упрощения, связанные с концепцией энергетической "жидкости", сохраняющейся в процессе распространения волны вдоль слоя.

Для вывода соответствующего гидроэнергетического равенства, заменим в равенстве (7.4) U_{00}^j на U_0^j, что, очевидно, законно. Приравняем нулю вещественную часть левой части равенства (7.4), что эквивалентно тому, что левая часть равенства (7.4), сложенная с комплексно сопряженным выражением, равна нулю. Оказывается, полученное соотношение допускает запись в весьма элегантной форме. Выпишем соответствующее равенство. Выкладки показывают, что выражения, содержащие b^{00}_{hm}, b^{jl}_{hm}, b^{j}_{hm} (см. выражение (4.7) для оператора M_1 и равенства (4.11) и (4.7)) чисто мнимы и не внесут вклада в рассматриваемую вещественную часть. Интересующее нас равенство запишется в виде:

$$\int\limits_0^h \Bigg(2a^{00}_{hm}\frac{\partial U^m_0}{\partial t'}\overline{U^h_0}\theta_0+a^{00}_{hm}U^m_0\overline{U^h_0}\theta_{00}+2a^{00}_{hm}\frac{\partial U^m_0}{\partial t'}U^h_0\theta_0+a^{00}_{hm}\overline{U^m_0}U^h_0\theta_{00}-$$
$$-\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\big(a^{\alpha l}_{hm}d_lU^m_0\big)\overline{U^h_0}-a^{l\alpha}_{hm}\frac{\partial U^m_0}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\overline{d_lU^h_0}-$$
$$-\big(\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\big(a^{\alpha l}_{hm}d_lU^m_0\big)U^h_0-a^{l\alpha}_{hm}\frac{\partial\overline{U^m_0}}{\partial q^{\alpha\,\prime}}d_lU^h_0\Bigg)dq^3+\Phi+\overline{\Phi}. \qquad (8.1)$$

Здесь Φ – выражение (7.7), где U^h_{00} заменено на U^h_0, $h=1,2,3$.

Равенство (8.1) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_0^h a^{00}_{hm}U^m_0\overline{U^h_0}\theta_0dq^3+$$
$$+\int\limits_0^h\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\big(-a^{\alpha l}_{hm}d_lU^m_0\overline{U^h_0}-a^{l\alpha}_{hm}d_l\overline{U^m_0}U^h_0\big)dq^3+(\Phi+\overline{\Phi})\frac{1}{2}. \qquad (8.2)$$

Учитывая выражение (7.7) для Φ, мы последнее соотношение запишем в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\int\limits_0^h\big(a^{00}_{hm}U^m_0\overline{U^h_0}\theta_0\big)+\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\int\limits_0^h\mathrm{Re}\,\big(-a^{\alpha l}_{hm}d_lU^m_0\overline{U^h_0}\big)dq^3=0. \qquad (8.3)$$

Внеинтегральные члены $\Phi+\overline{\Phi}$ совпадают с дополнительными слагаемыми, появляющимися за счет дифференцирования интегралов с переменными пределами интегрирования. Формулы (6.19), (6.22) показывают, что (8.3) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\frac{2\sqrt{g}}{\theta_0}\int\limits_0^h\langle\mathcal{E}\rangle dq^3+\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\Bigg(\int\limits_0^h\frac{2}{\theta_0}\langle S^\alpha\rangle\sqrt{g}dq^3\Bigg)=0. \qquad (8.4)$$

Учитывая первое гидроэнергетическое равенство, уравнение (8.4) запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{1}{\theta_0}\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\left(\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3 V^\alpha\frac{\sqrt{g}}{\theta_0}\right)=0. \tag{8.5}$$

Из канонической системы (5.3) следует, что θ_0 – а следовательно и $\frac{1}{\theta_0}$ – постоянно вдоль пространственно временного луча $t=s$, $q^{\alpha\,\prime}=q^{\alpha\,\prime}(s)$, а поэтому

$$\frac{\partial}{ds}\frac{1}{\theta_0}=\frac{\partial\frac{1}{\theta_0}}{\partial t'}+\frac{\partial\frac{1}{\theta_0}}{\partial q^{\alpha\,\prime}}V^\alpha=0. \tag{8.6}$$

Равенство (8.6) показывает, что $\frac{1}{\theta_0}$ можно “вычеркнуть” из формулы (8.5) и она принимает вид гидродинамического уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\left(\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^{\alpha\,\prime}}\left(\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3\sqrt{g}V^{\alpha\,\prime}\right)=0. \tag{8.7}$$

(V^α – компоненты групповой скорости в системе координат q^α).

Равенство (8.7) мы будем называть вторым гидроэнергетическим равенством.

Теория уравнения неразрывности излагается в учебниках гидромеханики. Там показано (см. [11]), что смысл уравнения заключается в том, что в процессе своего движения жидкость перетекает из одного места в другое, причем масса любого такого текущего объема сохраняется. Применяя это соображение к бесконечно малому объему нетрудно получить уравнение неразрывности в лагранжевых координатах (см. [11], глава 1). В нашем случае это уравнение имеет вид:

$$\left(\sqrt{g}\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3\right)_{M_0}=\left(\left(\sqrt{g}\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3\right)\frac{\mathcal{D}(q^1,q^2)}{\mathcal{D}(a^1,a^2)}\right)_M. \tag{8.8}$$

Здесь $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}$ точки соответственно (a^1,a^2) и (q^1,q^2), соединенные пространственно-временным лучом. Из (8.8) следует, что

$$\left(\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3\right)_M=\frac{\chi_0(a^1,a^2)}{(\sqrt{g}J)_M},\quad J=\frac{\mathcal{D}(q^1,q^2)}{\mathcal{D}(a^1,a^2)}. \tag{8.9}$$

Функция $\chi_0(a^1, a^2)$ зависит только от пространственно-временного луча. Подставим в (8.9) выражение (7.1) для U_0^h. Мы получим

$$|\,\psi_0(t', q^{\alpha\,\prime})\,|^2 \int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}_{00}\,\rangle dq^3 = \frac{\chi_0(a^1, a^2)}{\sqrt{g}J}. \qquad (8.10)$$

Индексы $_{00}$ у $\mathcal{E}$ означают, что эта величина вычислена для вектора U_{00}. Формула (8.10) дает

$$|\,\psi_0(t', q^{\alpha\,\prime})\,| = \frac{\varphi_0(a^1, a^2)}{\sqrt{\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}\,\rangle dq^3 g^{\frac{1}{4}}\sqrt{J}}}, \qquad \begin{array}{c}\varphi_0(a^1, a^2) = \sqrt{\chi_0(a^1, a^2)}\\ g = \det(g_{ij})\end{array}. \quad (8.11)$$

Это и есть та формула для $|\psi_0|$, о которой говорилось ранее.

9. Формула для аргумента $\psi_0(t', q^{\alpha\,\prime})$, фаза Берри и окончательное выражение для U_0.

Подставим в (7.13) $\psi_0 = |\psi_0|e^{i\mu}$. Уравнение для $|\psi_0|$ – это вещественная часть полученного равенства. Его решение дается формулой (8.11). Мнимая часть – уравнение для μ. Оно имеет вид:

$$\frac{4}{\theta_0\sqrt{g}} \int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}_{00}\,\rangle dq^3 \frac{d\mu}{ds} + \operatorname{Im}\mathcal{D} = 0, \qquad (9.1)$$

откуда μ находится квадратурой:

$$\mu = \mu_0 + \frac{\theta_0}{4} \int\limits_0^s \frac{(-\sqrt{g})\operatorname{Im}\mathcal{D}}{\int\limits_0^h \langle\,\mathcal{E}_{00}\,\rangle dq^3} dq^3. \qquad (9.2)$$

Здесь не удается найти сколько-нибудь компактное выражение для μ и $e^{i\mu}$ как для $|\psi_0|$. Там делу помогли энергетические соображения, которые здесь "не работают". Выражение для $\operatorname{Im}\mathcal{D}$ содержится в формулах пункта 7. Оно достаточно громоздкое. Интеграл $\frac{\theta_0}{4}\int\limits_0^s \ldots$, входящий в формулу (9.2) по аналогии с терминологией работы [9] можно было бы назвать фазой Берри.

Собирая воедино результаты работы, мы получаем выражение для искомой волны

$$u \cong e^{ip\theta(t', q^{1\,\prime}, q^{2\,\prime})\frac{1}{\varepsilon}}\,|\,\varphi_0(t', x_1')\,|\,e^{i\mu}U_{00}. \qquad (9.3)$$

Литература

1. В. М. Бабич, Б. А. Чихачев, *Распространение волн Лява и Релея в слабонеоднородной упругой среде.* — Вестник ЛГУ **No. 1** (1975), 2–7.
2. J. Tromp, F. A. Dahlen, *Surface wave propagation in slowly varying waveguide.* — Geophys. J. Int. **113** (1993), 239–249.
3. J. H. Woodhause, *Surface waves in laterally varying layered structures.* — Geophys. J. R. Astr. Soc **37** (1974), 461–490.
4. В. М. Бабич, Б. А. Чихачев, Т. Б. Яновская, *Поверхностные волны в вертикально-неоднородном упругом полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью.* — Изв. АН СССР, Физика Земли **4** (1976), 24–31.
5. В. М. Бабич, Н. С. Григорьева, *Пространственно-временном лучевой метод в слабо неоднородной слоистой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **99** (1980), 5–18.
6. Н. А. Умов, *Избранные труды.* М. (1950).
7. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны.* Мир, М., (1977) с. 568.
8. F. P. Bretherton, *Propagation in slowly varying waveguides.* — Proc. Royal Soc. A. **302** (1968), 555–576.
9. J. Tromp, F. A. Dahlen, *The Berry phase of slowly varying waveguide.* — Proc. Royal Soc. Lond. A. **437** (1992), 329–342.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика.* Физматгиз, М., (1958) с. 206.
11. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Е. М. Розе, *Теоретическая гидромеханика. Часть 1.* М., (1963) с. 583.

Babich V. M. Propagation of waves along weakly nonhomogeneous in the horisontal direction and slowly bent anisotropic elastic layer.

The propagation of a waveguide mode along a slowly bent elastic anisotropic layer is considered. An analytic expression for the amplitude and Berry phase of this oscillation is obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 10 ноября 1996 г.