А. В. Бакулин

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ОБЪЕМНЫЕ СИЛЫ ДЛЯ СКАЧКОВ СМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В МОДЕЛИ БИО АНИЗОТРОПНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Введение

В упругих средах внутренние сейсмические источники могут задаваться двумя способами [1, 2] – как объемные силы в волновых уравнениях и как скачки напряжений и смещений на границах (возможно фиктивных). Для упругой среды между этими двумя заданиями установлена связь следующего вида [2]: любому распределению скачков смещений и напряжений могут быть сопоставлены объемные силы в волновом уравнении, возбуждающие в точности такое же поле. Формулы для эквивалентных сил приведены в [2].

Указанная эквивалентность является полезной, т.к., во-первых, позволяет получать так называемые формулы Стокса (Грина) различными способами; во-вторых, дает возможность анализировать поля источников, заданных скачками смещений и напряжений, представляя их как суперпозицию элементарных источников в виде объемных сил. Второе особенно важно при анализе волновых полей, возбуждаемых землетрясениями, моделью которых является подвижка (скачки смещений) по разрыву (поверхности) [2].

Аналогичными способами [3, 4] задаются источники и в более сложной модели горных пород – модели Био, которая часто используется в сейсмической практике при рассмотрении распространения волн в пористых и трещиноватых средах. Поэтому представляет интерес установить связь между двумя способами задания источников для модели Био.

В настоящей работе, используя схему, приведенную в [2] для упругой среды, выводятся выражения для объемных сил эквивалентных скачкам напряжений и смещений в модели Био произвольно анизотропной насыщенной пористой среды.

§1. Тождество Бетти и теорема взаимности

Уравнение закона Гука для модели Био произвольно анизотропной пористой среды запишем в виде [5]

$$\sigma_{ij} = A_{ij}^{\mu\nu} e_{\mu\nu} + Q_{ij}\theta, \quad \sigma = Q_{ij} e_{ij} + R\theta. \tag{1.1}$$

Здесь σ и σ_{ij} – осредненные по объему компоненты тензора напряжений соответственно в жидкой (первой) и упругой (второй) фазах, e_{ij} – деформации скелета, выражаемые формулами

$$e_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_i}, & i = j, \\ \dfrac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j^{(2)}}{\partial x_i}, & i \neq j, \end{cases} \tag{1.2}$$

θ – дивергенция смещений жидкой фазы. Как отмечено в [6], $\vec{u}^{\,(2)}$ является вектором смещений скелета осредненным только по объему упругой фазы, а $\vec{u}^{\,(1)}$ – вектором смещения жидкости осредненным только по объему жидкой фазы. В формулах (1.1) и в дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3. Упругие коэффициенты $A_{ij}^{\mu\nu}$, Q_{ij}, R образуют положительно определенную матрицу 7×7 и удовлетворяют условиям симметрии

$$A_{ij}^{\mu\nu} = A_{ji}^{\mu\nu} = A_{ij}^{\nu\mu} = A_{\nu\mu}^{ij}, \quad Q_{ij} = Q_{ji}. \tag{1.3}$$

При выполнении условий (1.3) легко проверяется тождество Бетти для среды Био

$$\sum_{i\leqslant j} \sigma_{ij} e_{ij}^0 + \sigma\theta^0 = \sum_{i\leqslant j} \sigma_{ij}^0 e_{ij} + \sigma^0\theta, \tag{1.4}$$

в котором σ_{ij}, σ, e_{ij}, θ и σ_{ij}^0, σ^0, e_{ij}^0, θ^0 – два набора напряжений и деформаций, созданных различными внешними силами в одном и том же пористом материале.

Для получения соотношений теоремы взаимности воспользуемся тождеством [7]

$$\operatorname{div}\left(u_k^{(2)}\vec{\sigma}_k\right) + \operatorname{div}\left(\sigma\vec{u}^{\,(1)}\right) = \\ = \vec{u}^{\,(2)} \operatorname{Div}\sigma_{ik} + \sum_{i\leqslant k} \sigma_{ik} e_{ik} + \sigma\theta + \vec{u}^{\,(1)} \operatorname{grad}\sigma, \tag{1.5}$$

которое справедливо для произвольных векторов $\vec{u}^{\,(1)}$, $\vec{u}^{\,(2)}$, сформированных из них деформацией e_{ik}, θ по правилам (1.2) и $\vec{\sigma}_k = \sigma_{kj}\vec{i}_j$, где σ_{kj} – симметричная таблица, $\vec{i}_j$ – j-ый координатный орт декартовой системы. В соотношении (1.5) использовано обозначение из работы [7]

$$\operatorname{Div}\sigma_{ik} = \vec{i}_j \operatorname{div}\vec{\sigma}_j. \tag{1.6}$$

Пусть $\vec{u}^{(1)}$, $\vec{u}^{\,(2)}$ – поля смещений в объеме V, вызванные объемными силами, граничными условиями на поверхности S окружающей V и начальными условиями при $t = 0$. Пусть также $\vec{v}^{\,(1)}$, $\vec{v}^{\,(2)}$ – поля смещений, порожденные другими силами, граничными и начальными условиями в том же объеме V. σ_{ik}, σ и σ^0_{ik}, σ^0 – напряжения из (1.1), отвечающие полям $\vec{u}^{\,(1)}$, $\vec{u}^{\,(2)}$ и $\vec{v}^{\,(1)}$, $\vec{v}^{\,(2)}$ соответственно. Запишем тождества (1.5) для двух комплектов σ_{ik}, σ, $\vec{v}^{\,(1)}$, $\vec{v}^{\,(2)}$ и σ^0_{ik}, σ^0, $\vec{u}^{\,(1)}$, $\vec{u}^{\,(2)}$, вычтем из первого второе и после использования формулы Бетти (1.4) получим

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(v_k^{(2)}\vec{\sigma}_k - u_k^{(2)}\vec{\sigma}^{\,0}_k\right) + \operatorname{div}\left(\sigma\vec{v}^{\,(1)} - \sigma^0\vec{u}^{\,(1)}\right) = \\ = \vec{v}^{\,(2)}\operatorname{Div}\sigma_{ik} - \vec{u}^{\,(2)}\operatorname{Div}\sigma^0_{ik} + \vec{v}^{\,(1)}\operatorname{grad}\sigma - \vec{u}^{\,(1)}\operatorname{grad}\sigma^0.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Для преобразования правой части (1.7) используем уравнения равновесия среды Био, которые в использованных обозначениях имеют вид

$$\begin{aligned}\operatorname{Div}\sigma_{ik} + \vec{f}^{\,(2)} &= \rho_{11}\frac{\partial^2\vec{u}^{\,(2)}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\vec{u}^{\,(1)}}{\partial t^2},\\ \operatorname{grad}\sigma + \vec{f}^{\,(1)} &= \rho_{12}\frac{\partial^2\vec{u}^{\,(2)}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\vec{u}^{\,(1)}}{\partial t^2},\end{aligned} \tag{1.8}$$

где ρ_{11}, ρ_{22}, ρ_{12} – матрицы 3×3. Будем полагать, что полям $\vec{u}^{\,(1)}$, $\vec{u}^{\,(2)}$ и $\vec{v}^{\,(1)}$, $\vec{v}^{\,(2)}$ отвечают объемные силы $\vec{f}^{\,(1)}$, $\vec{f}^{\,(2)}$ и $\vec{g}^{\,(1)}$, $\vec{g}^{\,(2)}$ соответственно. Выражая $\operatorname{Div}\sigma_{ik}$, $\operatorname{grad}\sigma$ из (1.8) и подставляя в (1.7), запишем первое дифференциальное соотношение взаимности

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\vec{\sigma}\,{}^0_k\vec{u}^{\,(2)}-\vec{\sigma}_k\vec{v}^{\,(2)}+\sigma^0 u_k^{(1)}-\sigma v_k^{(1)}\right)+\\
&\quad+\rho_{11}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(2)}}{\partial t}-\vec{u}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(2)}}{\partial t}\right)+\\
&\quad+\rho_{12}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(1)}}{\partial t}-\vec{u}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(2)}}{\partial t}\right)+\\
&\quad+\rho_{12}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(1)}}{\partial t}-\vec{v}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(2)}}{\partial t}\right)+\\
&\quad+\rho_{22}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(1)}}{\partial t}-\vec{u}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(1)}}{\partial t}\right)=\\
&=\vec{f}^{\,(2)}\vec{v}^{\,(2)}-\vec{g}^{\,(2)}\vec{u}^{\,(2)}+\vec{f}^{\,(1)}\vec{v}^{\,(1)}-\vec{g}^{\,(1)}\vec{u}^{\,(1)}.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

При преобразовании левой части (1.9) было использовано соотношение $\vec{\sigma}_k=\sigma_{kj}\vec{i}_j$ и симметрия σ_{kj}. После интегрирования по объему V и учета соотношения

$$\vec{\sigma}_n\vec{u}=(\vec{\sigma}_1u_1+\vec{\sigma}_2u_2+\vec{\sigma}_3u_3)\,\vec{n},\tag{1.10}$$

в котором $\vec{\sigma}_n$ – вектор напряжения, действующий в точке поверхности с нормалью $\vec{n}$, (1.9) перепишется в интегральной форме

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_S\left(\vec{\sigma}\,{}^0_n\vec{u}^{\,(2)}-\vec{\sigma}_n\vec{v}^{\,(2)}+\sigma^0\vec{n}\vec{u}^{\,(1)}-\sigma\vec{n}\vec{v}^{\,(1)}\right)dS=\\
&=\int\!\!\int\limits_V\!\!\int\Big\{\vec{f}^{\,(2)}\vec{v}^{\,(2)}-\vec{g}^{\,(2)}\vec{u}^{\,(2)}+\vec{f}^{\,(1)}\vec{v}^{\,(1)}-\vec{g}^{\,(1)}\vec{u}^{\,(1)}-\\
&\quad-\rho_{11}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(2)}}{\partial t}-\vec{u}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(2)}}{\partial t}\right)-\\
&\quad-\rho_{12}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(1)}}{\partial t}-\vec{u}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(2)}}{\partial t}\right)-\\
&\quad-\rho_{12}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{u}^{\,(2)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(1)}}{\partial t}-\vec{v}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(2)}}{\partial t}\right)-\\
&\quad-\rho_{22}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{u}^{\,(1)}}{\partial t}-\vec{u}^{\,(1)}\frac{\partial\vec{v}^{\,(1)}}{\partial t}\right)\Big\}\,dV.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Формула (1.11) не использует начальных данных для полей $\vec{u}^{\,(1)}$, $\vec{u}^{\,(2)}$ и $\vec{v}^{\,(1)}$, $\vec{v}^{\,(1)}$. Она верна и в случае, если величины $\vec{\sigma}_n$, σ, $\vec{u}^{\,(1)}$,

$\vec{u}^{(2)}$, $\vec{f}^{(1)}$, $\vec{f}^{(2)}$ оцениваются в момент времени t_1, а величины $\vec{\sigma}_n^{\,0}$, σ^0, $\vec{v}^{(1)}$, $\vec{v}^{(2)}$, $\vec{g}^{(1)}$, $\vec{g}^{(2)}$ – в момент t_2. Пусть, кроме того, $t_1 = t$, $t_2 = \tau - t$. Если положить, что все поля смещений таковы, что при $t \leqslant t_0$ они равны нулю во всем V, то свертки всех членов вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{lm} \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{v}^{(j)}(\tau - t)\frac{\partial \vec{u}^{(i)}}{\partial t}(t) - \vec{u}^{(i)}(t)\frac{\partial \vec{v}^{(j)}}{\partial t}(\tau - t)\right) dt$$

обращаются в ноль. После интегрирования по t формула (1.11) для полей смещений в среде, покоившейся в прошлом, принимает вид

$$\begin{gathered}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \iiint_V \Big\{\vec{f}^{(2)}(t)\vec{v}^{(2)}(\tau - t) - \vec{g}^{(2)}(\tau - t)\vec{u}^{(2)}(t) + \\ + \vec{f}^{(1)}(t)\vec{v}^{(1)}(\tau - t) - \vec{g}^{(1)}(\tau - t)\vec{u}^{(1)}(t)\Big\}\, dV = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iint_S \Big\{\vec{\sigma}_n^{\,0}(\tau - t)\vec{u}^{(2)}(t) - \vec{\sigma}_n(t)\vec{v}^{(2)}(\tau - t) + \\ + \sigma^0(\tau - t)\vec{n}\vec{u}^{(1)}(t) - \sigma(t)\vec{n}\vec{v}^{(1)}(\tau - t)\Big\}\, dS.\end{gathered} \tag{1.12}$$

§2. Теорема представления и эквивалентные объемные силы

Для получения теоремы представления, позволяющей установить эквивалентные объемные силы, необходимо в (1.12) в качестве одного из полей смещений взять функцию Грина. Для анизотропной пористой среды ее удобно представить в виде суммы двух слагаемых $G_{il}^{(1,2)}(\vec{x}, t; \vec{\xi}, t_0)$ и $W_i^{(1,2)}(\vec{x}, t; \vec{\xi}, t_0)$. Каждое слагаемое ($u_i^{(1)} = G_{il}^{(1)}$, $u_i^{(2)} = G_{il}^{(2)}$ и $u_i^{(1)} = W_i^{(1)}$, $u_i^{(2)} = W_i^{(2)}$) удовлетворяет в объеме V уравнениям (1.1), (1.8) с разными силами $\vec{f}^{(1)}$, $\vec{f}^{(2)}$, приложенными в точке $\vec{\xi}$ и имеющими временную зависимость $\delta(t - t_0)$. Эти функции и их первые производные по времени считаются равными нулю при $t \leqslant t_0$ и $\vec{x} \neq \vec{\xi}$. На границе S с нормалью $\vec{n}$ предполагаются выполненными однородные граничные условия. Для пористой среды это означает удовлетворение двух равенств по одному из каждой пары

$$\vec{u}^{\,(2)} = 0, \quad \vec{\sigma}_n = 0;$$
$$\vec{u}^{\,(1)}\vec{n} = 0, \quad \sigma = 0. \tag{2.1}$$

Первое слагаемое $G_{il}^{(1,2)}(\vec{x},t;\vec{\xi},t_0)$ соответствует полю смещений, вызванному единичной силой $\vec{f}^{\,(1)} = 0$, $f_i^{(2)} = \delta_{il}\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\delta(t-t_0)$, приложенной к скелету в l-ом координатном направлении. Здесь δ_{il} – символ Кронекера. Второе слагаемое $W_i^{(1,2)}(\vec{x},t;\vec{\xi},t_0)$ соответствует полю, возбужденному единичным центром давления в жидкой фазе $\vec{f}^{\,(1)} = \delta(t-t_0)\,\mathrm{grad}(\vec{x}-\vec{\xi})$, $\vec{f}^{\,(2)} = 0$. Подобное определение второго слагаемого функции Грина обусловлено невозможностью задания источника типа точечной направленной силы в жидкой фазе [3]. Источники, задаваемые в жидкой фазе ($\vec{f}^{\,(1)}$) с необходимостью, должны быть безвихревыми, а $\mathrm{grad}\,\delta(\vec{x})$ – выбран в качестве элементарного безвихревого воздействия.

Взяв в качестве полей $\vec{v}_i^{\,(1)}$, $\vec{v}_i^{\,(2)}$ сначала $G_{il}^{(1,2)}(\vec{x},t;\vec{\xi},t_0)$, а затем $W_i^{(1,2)}(\vec{x},t;\vec{\xi},t_0)$, и, приняв $t_0 = 0$, получим два соотношения теоремы представления

$$u_l^{(2)}(\vec{\xi},\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\!\!\int\limits_V\!\!\int \Big\{ f_i^{(2)}(\vec{x},t)G_{il}^{(2)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0) + $$
$$+ f_i^{(1)}(\vec{x},t)G_{il}^{(1)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0)\Big\}\,dV +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \iint\limits_S \Big\{ G_{il}^{(2)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0)(\vec{\sigma}_n(\vec{x},t))_i + G_{il}^{(1)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0)\sigma(\vec{x},t)n_i -$$
$$-\vec{u}^{\,(2)}(\vec{x},t)\vec{\sigma}^{\,0}_n(\vec{x},\tau-t) - \vec{u}^{\,(1)}(\vec{x},t)\sigma^0(\vec{x},\tau-t)\vec{n}\Big\}\,dS, \tag{2.2}$$

$$\theta(\vec{\xi},\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\!\!\int\limits_V\!\!\int \Big\{ f_i^{(2)}(\vec{x},t)W_i^{(2)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0) +$$
$$+ f_i^{(1)}(\vec{x},t)W_i^{(1)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0)\Big\}\,dV +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \iint\limits_S \Big\{ W_i^{(2)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0)(\vec{\sigma}_n(\vec{x},t))_i + W_i^{(1)}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi},0)\sigma(\vec{x},t)n_i -$$

$$-\vec{u}^{\,(2)}(\vec{x},t)\vec{\sigma}_n^{\,0}(\vec{x},\tau-t) - \vec{u}^{\,(1)}(\vec{x},t)\sigma^0(\vec{x},\tau-t)\vec{n} \Big\} dS. \qquad (2.3)$$

Здесь $(\vec{\sigma}_n)_k = \vec{\sigma}_k\vec{n}$ – k-ая компонента вектора нормальных напряжений $\vec{\sigma}_n = (\vec{\sigma}_k\vec{n})\vec{i}_k$, а $\vec{\sigma}_n^{\,0}$, σ^0 – по-прежнему напряжения, отвечающие полям смещений $G_{il}^{(1)}$, $G_{il}^{(2)}$ в (2.2) и $W_i^{(1)}$, $W_i^{(2)}$ в (2.3).

Соотношения (2.2), (2.3) показывают как смещения скелета $\vec{u}^{\,(2)}$ и расходимость жидкости θ выражаются через объемные силы $\vec{f}^{\,(1)}$, $\vec{f}^{\,(2)}$ внутри V, напряжения $\vec{\sigma}_n$, σ и смещения $\vec{u}^{\,(1)}$, $\vec{u}^{\,(2)}$ на поверхности S.

Применим формулы (2.2), (2.3) для объема V, поверхность которого состоит из внешней поверхности S и двух сторон Σ^+, Σ^- одной и той же внутренней поверхности Σ, на которой имеют место скачки смещений и напряжений. Поскольку уравнения движения не удовлетворяются непосредственно на Σ, то формулы применимы к внутренности поверхности $S+\Sigma^+ +\Sigma^-$. Положим также, что на S выполняются однородные граничные условия (2.1). Тогда теорема представления переписывается в виде двух равенств

$$u_l^{(2)}(\vec{x},t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int\int\limits_V\int \Big\{ f_i^{(2)}(\vec{\eta},\tau)G_{il}^{(2)}(\vec{\eta},t-\tau;\vec{x},0) +$$

$$+ f_i^{(1)}(\vec{\eta},\tau)G_{il}^{(1)}(\vec{\eta},t-\tau;\vec{x},0)\Big\} dV(\vec{\eta}) +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint\limits_\Sigma \Big\{ \Big[\vec{u}^{\,(2)}(\vec{\xi},\tau)\Big]\,\vec{\sigma}_n^{\,0}(\vec{\xi},t-\tau) + \Big[\vec{u}^{\,(1)}(\vec{\xi},\tau)\Big]\,\sigma^0(\vec{\xi},t-\tau)\vec{n} -$$

$$-\Big[\Big(\vec{\sigma}_n(\vec{\xi},\tau)\Big)_i\Big]\,G_{il}^{(2)}(\vec{\xi},t-\tau;\vec{x},0) -$$

$$-\Big[\sigma(\vec{\xi},\tau)\Big]\,n_i G_{il}^{(1)}(\vec{\xi},t-\tau;\vec{x},0)\Big\} d\Sigma(\vec{\xi}), \qquad (2.4)$$

$$\theta(\vec{x},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\tau\int\int\limits_{V}\int\Big\{f_i^{(2)}(\vec{\eta},\tau)W_i^{(2)}(\vec{\eta},t-\tau;\vec{x},0)+$$
$$+f_i^{(1)}(\vec{\eta},\tau)W_i^{(1)}(\vec{\eta},t-\tau;\vec{x},0)\Big\}dV(\vec{\eta})+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\tau\iint\limits_{\Sigma}\Big\{\Big[\vec{u}^{(2)}(\vec{\xi},\tau)\Big]\,\vec{\sigma}_n^{\,0}(\vec{\xi},t-\tau)+\Big[\vec{u}^{(1)}(\vec{\xi},\tau)\Big]\,\sigma^0(\vec{\xi},t-\tau)\vec{n}-$$
$$-\Big[\Big(\vec{\sigma}_n(\vec{\xi},\tau)\Big)_i\Big]\,W_i^{(2)}(\vec{\xi},t-\tau;\vec{x},0)-$$
$$-\Big[\sigma(\vec{\xi},\tau)\Big]\,n_iW_i^{(1)}(\vec{\xi},t-\tau;\vec{x},0)\Big\}d\Sigma(\vec{\xi}). \qquad (2.5)$$

Для наглядности в формулах (2.4), (2.5) по сравнению с (2.2), (2.3) мы поменяли местами буквы $\vec{x}$ и $\vec{\xi}$, t и τ так, чтобы $(\vec{x},t)$ соответствовало произвольному положению в пространстве и времени. При этом, при интегрировании по V для произвольной точки объема V введено обозначение $\vec{\eta}$, а $\vec{\xi}$ обозначает произвольную точку поверхности Σ при интегрировании по Σ. Квадратными скобками обозначена разность значений на Σ^+ и Σ^-.

Анализ выражений (2.4), (2.5) позволяет сразу установить объемные силы, эквивалентные скачкам напряжений и смещений, т.е. силы, дающие такой же вклад в $u_l^{(2)}$ и θ в формулах (2.4), (2.5).

1) Скачкам напряжений в скелете соответствует объемная сила, приложенная только к скелету

$$\vec{f}^{(1)}=0,\quad \vec{f}^{(2)}(\vec{\eta},\tau)=-\iint\limits_{\Sigma}\Big[\vec{\sigma}_n(\vec{\xi},\tau)\Big]\,\delta(\vec{\eta}-\vec{\xi})d\Sigma(\vec{\xi}). \qquad (2.6)$$

2) Скачкам давления в жидкой фазе соответствует сила в жидкой фазе

$$\vec{f}^{(1)}(\vec{\eta},\tau)=-\iint\limits_{\Sigma}\Big[\sigma(\vec{\xi},\tau)\Big]\,\vec{n}\delta(\vec{\eta}-\vec{\xi})d\Sigma(\vec{\xi}),\quad \vec{f}^{(2)}=0. \qquad (2.7)$$

3) Скачкам смещений в скелете отвечают силы

$$
\begin{gathered}
\vec{f}^{\,(1)}(\vec{\eta},\tau) = \operatorname{grad}\Phi(\vec{\eta},\tau),\\
\Phi(\vec{\eta},\tau) = -\iint\limits_{\Sigma}\left[u_k^{(2)}(\vec{\xi},\tau)\right]Q_{ik}n_i\delta(\vec{\eta}-\vec{\xi})d\Sigma(\vec{\xi}),\\
f_j^{(2)}(\vec{\eta},\tau) = -\iint\limits_{\Sigma}\left[u_k^{(2)}(\vec{\xi},\tau)\right]A_{ik}^{jl}n_i\frac{\partial}{\partial\eta_l}\delta(\vec{\eta}-\vec{\xi})d\Sigma(\vec{\xi}).
\end{gathered}\tag{2.8}
$$

При получении (2.8) кроме соотношений (2.4), (2.5) мы использовали выражение закона Гука (1.1).

4) Скачкам смещений в жидкости соответствуют силы

$$
\begin{gathered}
\vec{f}^{\,(1)}(\vec{\eta},\tau) = \operatorname{grad}\Phi(\vec{\eta},\tau),\\
\Phi(\vec{\eta},\tau) = -\iint\limits_{\Sigma}R\left[\vec{u}^{\,(1)}(\vec{\xi},\tau)\right]\vec{n}\delta(\vec{\eta}-\vec{\xi})d\Sigma(\vec{\xi}),\\
f_j^{(2)}(\vec{\eta},\tau) = -\iint\limits_{\Sigma}\left[u_k^{(1)}(\vec{\xi},\tau)\right]n_kQ_{jl}\frac{\partial}{\partial\eta_l}\delta(\vec{\eta}-\vec{\xi})d\Sigma(\vec{\xi}).
\end{gathered}\tag{2.9}
$$

§3. Физические следствия и примеры

Соотношения (2.7)–(2.9) позволяют установить следующие физические следствия:

I. Точечный скачок нормальных напряжений в скелете при переходе через плоскость $\xi_3 = 0$

$$
[\sigma_{33}] = F(t)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2), \quad [\sigma_{13}] = [\sigma_{23}] = 0 \tag{3.1}
$$

дает такой же вклад в поле смещений как и единичная объемная сила в скелете

$$
\vec{f}^{\,(1)} = 0, \quad \vec{f}^{\,(2)}(\vec{\eta},\tau) = -(0,0,F(\tau))^T\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3) \tag{3.2}
$$

аналогично упругой среде.

II. Сосредоточенный скачок давления в жидкой фазе при переходе через плоскость $\xi_3 = 0$

$$
[\sigma] = F(t)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2) \tag{3.3}
$$

задавать нельзя. Докажем это от противного. Допустим, что он задан. В соответствии с (2.7) он эквивалентен силе в жидкой фазе

$$\vec{f}^{(1)}(\vec{\eta},\tau) = -(0,0,F(\tau))^T\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3). \tag{3.4}$$

Сила $\vec{f}^{(1)}$ имеет вихревую составляющую ($\mathrm{rot}\,\vec{f}^{(1)} \neq 0$) и согласно работе [3] не может быть задана в качестве источника в жидкой фазе.

Вышесказанное, однако, не означает, что нельзя задавать скачки давления в жидкой фазе вообще. В качестве примера приведем физически корректные источники, задаваемые как постоянный скачок давления на сфере малого радиуса или бесконечной плоскости, которые соответствуют центру давления в жидкой фазе и поршневому воздействию. Для них эквивалентные силы $\vec{f}^{(1)}$ являются безвихревыми.

III. Скачки смещений имеют безвихревые эквивалентные объемные силы $\vec{f}^{(1)}$, как следует из формул (2.8) и (2.9). Таким образом, задание любых скачков смещений всегда является физически корректным в отличие от задания скачков давления в жидкой фазе.

VI. Ненулевой вклад в поле смещений вносит только нормальная к границе составляющая скачка смещений в жидкой фазе, что следует из формулы (2.9), где стоит множитель $[\,\vec{u}^{(1)}]\vec{n}$.

В качестве примера использования формул (2.6)–(2.9) получим эквивалентные силы для трех следующих источников в изотропной среде Био, которые задаются скачками смещений при переходе через плоскость $\xi_3 = 0$

$$[u_3^{(2)}] = F(t)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2), \quad [u_1^{(2)}] = [u_2^{(2)}] = [u_3^{(1)}] = 0; \tag{3.5}$$

$$[u_3^{(1)}] = F(t)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2), \quad [u_1^{(2)}] = [u_2^{(2)}] = [u_3^{(2)}] = 0; \tag{3.6}$$

$$[u_1^{(2)}] = F(t)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2), \quad [u_2^{(2)}] = [u_3^{(2)}] = [u_3^{(1)}] = 0. \tag{3.7}$$

Дополнительные условия

$$[\sigma] = [\sigma_{13}] = [\sigma_{23}] = [\sigma_{33}] = 0 \tag{3.8}$$

предполагаются выполненными для каждого из источников (3.5)–(3.7).

После применения формул (2.8) и (2.9) находим, что первому источнику отвечают следующие эквивалентные силы

$$
\begin{aligned}
\vec{f}^{\,(1)}(\vec{\eta},\tau) &= -MF(\tau)\,\mathrm{grad}\{\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3)\},\\
f_1^{(2)}(\vec{\eta},\tau) &= -AF(\tau)\delta'(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3),\\
f_2^{(2)}(\vec{\eta},\tau) &= -AF(\tau)\delta(\eta_1)\delta'(\eta_2)\delta(\eta_3),\\
f_3^{(2)}(\vec{\eta},\tau) &= -(A+2L)F(\tau)\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta'(\eta_3).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Здесь $A = A_{33}^{11}$, $A+2L = A_{33}^{33}$, $L = A_{13}^{13}$, $M = Q_{33}$ – упругие коэффициенты для изотропной модели Био. Таким образом, источник в виде скачка $[u_3^{(2)}]$ эквивалентен наложению: а) центра давления в упругой фазе с множителем A; б) центра давления в жидкой фазе с множителем M; в) безмоментной пары противоположно направленных сил вдоль оси x_3, приложенных к скелету, с множителем $2L$.

Точно так же для второго источника эквивалентные силы

$$
\left.\begin{aligned}
\vec{f}^{\,(1)}(\vec{\eta},\tau)\\
\vec{f}^{\,(2)}(\vec{\eta},\tau)
\end{aligned}\right\} = -\left\{\begin{matrix} R \\ M \end{matrix}\right\}\mathrm{grad}\{\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3)\}.
\tag{3.10}
$$

Здесь, как и ранее $M = Q_{33}$, R – коэффициенты закона Гука (1.1). Другими словами, источник (3.6) эквивалентен наложению центра давления в упругой фазе с множителем M и центра давления в жидкой фазе с множителем R.

Для третьего источника (3.7) эквивалентные объемные силы выражаются соотношениями

$$
\begin{aligned}
\vec{f}^{\,(1)} &= 0,\\
f_2^{(2)} &= 0,\\
f_1^{(2)} &= -LF(\tau)\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta'(\eta_3)\\
f_3^{(2)} &= -LF(\tau)\delta'(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3),
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

в которых $L = A_{13}^{13}$. Источник в виде точечного скачка касательных смещений в скелете эквивалентен наложению двух моментных пар единичных сил в скелете: в первой паре силы действуют вдоль оси x_3 и имеют плечо вдоль оси x_1, а во второй паре силы действуют вдоль оси x_1 и имеют плечо вдоль оси x_3. Такая комбинация по аналогии с упругой средой [2] может быть названа двойной парой без момента в скелете.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. М. Бабичу и Л. А. Молоткову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–05–65904) и фонда Сороса (A96–378).

Литература

1. Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис, *Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах.* Л., 1982 288 с.
2. К. Аки, П. Ричардс, *Количественная сейсмология: Теория и методы.* т. 1, Пер. с англ., М., Мир, 1980, 520 с.
3. G. Bonnet, *Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range.* — J. Acoust. Soc. Am. **82,** No. 5 (1987), 1758–1762.
4. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Об источниках типа центров давления и расширения в модели Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 196–213.
5. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. **33,** No. 4 (1962), 1482–1498.
6. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 172–195.
7. Г. И. Петрашень, *Основы математической теории распространения упругих волн.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн XVIII, Л., 248 с.

Bakulin A. V. Equivalent body forces for jumps of stresses and displacements in Biot model of anisotropic porous medium.

The aim of this paper is to establish formulae for body forces equivalent to jumps of stresses and displacements in anisotropic Biot model. Scheme used follows the scheme typical for elastic medium. We derive Betti identity, reciprocity relations and representation integrals for porous medium. Applying representation integrals to a volume containing discontinuity surfaces we obtain equivalent body forces. Finally, physical consequences and equivalent forces for isotropic Biot model are presented.

С.-Петербургскиий
государственный университет

Поступило 21 июля 1996 г.