В. А. Боровиков

ПОЛЕ НА БОЛЬШОМ РАССТОЯНИИ, ВОЗБУЖДЕННОЕ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ КОЛЕБАНИЙ В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА

1. Общая теория волновых полей, возбужденных движущимся источником колебаний, была разработана в [1] (см. также книгу [2]). Предполагается, что стационарные колебания, возбужденные источником с частотой ω_0 описываются интегралом Фурье

$$q = \exp(i\omega_0 t) \int\int \frac{F(\lambda,\mu)\exp-(i\lambda x + \mu y)d\lambda d\mu}{B(\omega_0,\lambda,\mu)} \tag{1}$$

(мы изучаем двумерную задачу). Здесь $B(\omega,\lambda,\mu) = 0$ – дисперсионное уравнение. Другими словами, мы предполагаем, что в изучаемых средах волновое поле в виде плоской волны $\exp(i(\omega t - \lambda x - \mu y))$ существует тогда и только тогда, когда $B(\omega,\lambda,\mu) = 0$. Если колеблющийся источник движется с постоянной скоростью $\vec{v}(v_x, v_y)$, то стационарное поле описывается тем же интегралом (1) в системе координат $\widehat{x} = x - v_x t$; $\widehat{y} = y - v_y t$, которая движется с источником, когда мы заменяем x, y на $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ и левую часть дисперсионного уравнения $B(\omega_0,\lambda,\mu)$ на выражение $B(\omega_0,\lambda,\mu) = B(\omega_0 - v_x\lambda - v_y\mu,\lambda,\mu)$.

При оценке интеграла (1) возникает проблема регуляризации: как следует понимать интеграл (1) вблизи нулей функции $B(\omega_0, \lambda,\mu)$. В соответствие с принципом излучения интеграл понимается как предел ([1]–[2])

$$q = q(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to+0} \exp(i\omega_0 t) \int\int \frac{F(\lambda,\mu)\exp-i(\lambda x + \mu y)d\lambda d\mu}{B(\omega_0 - i\epsilon,\lambda,\mu)}. \tag{2}$$

Но, если кривая $B = 0$ имеет особые точки, в которых $B'_\lambda = B'_\mu = 0$, то предел (2) не существует; $q(\epsilon)$ растет при $\epsilon \to 0$ как $\ln\epsilon$. Стационарные колебания не существуют в этом случае. Если источник начинает излучать и двигаться в некоторый момент t_0, то поле не стремится к выражению вида $\exp(i\omega_0 t)q(\widehat{x},\widehat{y})$ при $t\to\infty$, а растет до бесконечности. Следовательно, исследования в работах [1] и [2], имеющие дело со стационарными колебаниями, нуждаются в исправлениях. Разъясним причину этого роста. Если дисперсионная кривая имеет особую точку $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$, то групповая скорость колебаний с частотой ω_0 (в движущейся системе координат принимая во внимание сдвиг Допплера) равна нулю. Следовательно, для некоторого $t = t_1 > t_0$ колебания, возбужденные при всех t между значениями t_0 и t_1, приходят к некоторой фиксированной точке наблюдения $\widehat{x} = \mathrm{const}$, $\widehat{y} = \mathrm{const}$ с той же фазой и их абсолютные значения суммируются. Другими словами, мы имеем резонанс. Ниже мы найдем асимптотику поля на больших расстояниях при больших t в резонансном случае и дадим точные выражения для растущей компоненты поля.

Такая же проблема обсуждалась в [3]. Но в этой работе рассматривались поля q, для которых спектральная плотность $F(\lambda,\mu)$ равна нулю в особой точке λ_0, μ_0 дисперсионной кривой. Следовательно, эффекты накапливания здесь достаточно малы и поле стремится к конечной величине, когда $t \to \infty$.

В конце работы мы кратко обсудим трехмерную задачу. Здесь поле стремится к конечной величине, когда $t \to \infty$, но тем не менее эффекты резонанса приводят к качественному изменению поля в дальней зоне.

2. Мы будем изучать среды, в которых поле g источника с временной зависимостью $\delta(t)$ имеет вид

$$q(t,x,y) = \int\int F(\lambda,\mu)\exp i\big(-\lambda x - \mu y + t\omega(\lambda,\mu)\big)d\lambda d\mu. \qquad (3)$$

Функции $F(\lambda,\mu)$ и $\omega(\lambda,\mu)$ зависят от рассматриваемой задачи. Например, в случае поверхностных волн поле является суммой двух составляющих, которые имеют вид (3) с $\omega = \pm\sqrt{kg + k^3\gamma}$, где $k = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$; здесь g есть ускорение силы тяжести и γ есть коэффициент поверхностного натяжения.

Поле $W(t,x,y)$, возбужденное источником, который начинает двигаться при $t = 0$ со скоростью $\vec{v} = (v_x, v_y)$ и частотой ω_0, имеет вид: $W(t,x,y) = \exp(i\omega_0 t)\widehat{W}(t,\widehat{x},\widehat{y})$, где $\widehat{x} = x - v_x t$, $\widehat{y} = v_y t$ есть система координат движущаяся с источником и

$$\widehat{W}(t,\widehat{x},\widehat{y}) = \int\limits_0^t dt \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda,\mu)\exp\big(i\big(-\lambda\widehat{x} - \mu\widehat{y} + \widehat{\omega}(\lambda,\mu)\tau\big)\big)d\lambda d\mu$$

с $\widehat{\omega}(\lambda,\mu) = \omega(\lambda,\mu) - \lambda v_x - \mu v_y - \omega_0$. Мы будем изучать асимптотику $\widehat{W}$ при больших t, $r = \sqrt{\widehat{x}^2+\widehat{y}^2}$. Особые точки функций $\widehat{\omega}(\lambda,\mu)$ и $F(\lambda,\mu)$ дают вклад в асимптотику. Например, в случае поверхностных волн функция $\omega(\lambda,\mu)$ ведет себя как $\sqrt{k}$, когда $k = \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \to 0$. Таким образом, вклад этой особой точки в асимптотику поля в дальней зоне для фиксированных t и $r \to \infty$ имеет порядок $r^{-3/2}$. Мы пренебрежем этими вкладами и будем рассматривать компоненты асимптотики, которые определяются особыми точками поверхности $\widehat{\omega} = 0$, т.е. значениям λ и μ, для которых $\widehat{\omega}$ регулярно, но $\widehat{\omega} = \partial\widehat{\omega}/\partial\lambda = \partial\widehat{\omega}/\partial\mu = 0$.

Пусть $\lambda = \lambda_0 + \eta$, $\mu = \mu_0 + \zeta$. Тогда разложение $\widehat{\omega}$ по степеням η и ζ имеет вид

$$\widehat{\omega}(\lambda_0+\eta,\mu_0+\zeta) = \omega_2(\eta,\zeta) + \omega_3(\eta,\zeta) + O(\eta^2+\zeta^2)^2,$$

где можно предположить, что

$$\omega_2(\eta,\zeta) = A\eta^2 + B\zeta^2;\ \omega_3(\eta,\zeta) = C\eta^3 + D\eta^2\zeta + E\eta\zeta^2 + F\zeta^3. \tag{4}$$

Пусть $\widehat{W}(t,\widehat{x},\widehat{y}) = \exp i(-\lambda_0\widehat{x} - \mu_0\widehat{y})\widehat{W}(t,\widehat{x},\widehat{y})$. Тогда

$$\widetilde{W}(t,\widehat{x},\widehat{y}) \int_0^t dt \int\int_{-\infty}^{\infty} G(\eta,\zeta)\exp\big(i\big(-\eta\widehat{x} - \zeta\widehat{y} + \widetilde{\omega}(\eta,\zeta)\tau\big)\big)d\eta d\zeta \tag{5}$$

и

$$\widetilde{\omega}(\eta,\zeta) = \widehat{\omega}(\lambda_0+\eta,\mu_0+\zeta), \quad G(\eta,\zeta) = F(\lambda_0+\eta,\mu_0+\zeta).$$

Будем предполагать, что стационарная точка $O = (0,0)$ функции $\widetilde{\omega}$ невырождена, т.е., $A \neq 0$, $B \neq 0$. Если $AB > 0$, то O изолированная точка кривой $\Omega : \widetilde{\omega}(\eta,\zeta) = 0$. Если $AB < 0$, то O – точка самопересечения кривой Ω. Будем предполагать в этом случае, что ветви кривой Ω имеют не нулевые кривизны в точке O, т.е. на касательных $\zeta = \pm\eta\sqrt{-B/A}$ к ветвям кривой Ω кубический полином $\omega_3(\eta,\zeta)$ не равен нулю.

3. Асимптотика интеграла (5) при $r = \sqrt{\widehat{x}^2+\widehat{y}^2} \gg 1$, $t = O(r)$ определяется, во-первых, стационарными точками фазовой функции $\Phi(\tau,\eta,\zeta) = -\eta x - \zeta y + \tau\widehat{\omega}(\eta,\zeta)$ в трехмерном интеграле (5) и, во-вторых, асимптотикой внутреннего интеграла в (5) при $\tau \to \infty$. Стационарные точки $P = (\eta,\zeta)$ фазовой функции определяются уравнениями $\widehat{\omega}'_\eta = \widehat{x}/\tau$; $\widehat{\omega}'_\zeta = \widehat{y}/\tau$; $\widehat{\omega} = 0$. Следовательно, эти точки являются точками кривой Ω, в которых $\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}$ параллелен вектору $(\widehat{x},\widehat{y})$. Если направления этих векторов противоположны , то и стационарные точки отсутствуют в области интегрирования по t в интеграле (5). Если векторы $(\widehat{x},\widehat{y})$ и $\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}$ направлены одинаково, то значение τ в стационарной точке равно $\tau_0 = \epsilon r/|\,\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}(P)|$. Здесь r, φ – полярные координаты на плоскости $\widehat{x}$, $\widehat{y}$

$$\widehat{x} = r\cos\varphi, \quad \widehat{y} = r\sin\varphi, \tag{6}$$

при этом $\epsilon = 1$, когда направления векторов $(\widehat{x},\widehat{y})$ и $\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}$ совпадают и $\epsilon = -1$ в противоположном случае. Если начало O есть точка самопересечения дисперсионной кривой Ω (т.е., если $AB < 0$ в разложении (4)) и если направление φ стремится к направлению, нормальному к некоторой ветви кривой Ω в точке O, (т.е. $\tan\varphi \to \pm\sqrt{-B/A}$), то точка P стремится к началу, величина $|\,\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}(P)|$ стремится к нулю и τ_0/r стремится к бесконечности. Мы будем рассматривать этот случай позднее, а теперь ограничимся рассмотрением направлений φ, отличными от $\pm\,\arctan\sqrt{-B/A}$ и $\pi \pm \arctan\sqrt{-B/A}$, и величинами $t = O(r)$.

При этих условиях асимптотика интеграла (5) есть сумма вклада U_1 границы $\tau = t$ области интегрирования и вклада U_2 стационарной точки (τ_0, P) (если эта точка принадлежит области интегрирования, т.е., если $\tau_0 > 0$ и $t > \tau_0 = r/|\,\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}(P)|$).

$$\widehat{W} = U_2\chi\big(\epsilon t|\,\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}| - r\big) + U_1,$$

где $\chi\big(\epsilon t|\,\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}| - r\big) = \chi(t/\tau_0 - 1) = 1$ при $0 < \tau_0 < t$ (т.е., когда точка (τ_0, P) лежит в области интегрирования) и $\chi = 0$ в противоположном случае. Здесь функция U_2 имеет порядок $r^{-1/2}$ и функция U_1 порядка t^{-1}.

Таким образом, рассматриваемое поле $\widehat{W}$ есть волна, которая распространяется в направлении φ со скоростью $v = |\,\mathrm{grad}\,\widehat{\omega}(P)|$. Это поле совпадает с U_1 и имеет порядок t^{-1} перед волновым фронтом $r = vt$. За фронтом волны главный член асимптотики U совпадает с U_2, имеет порядок $r^{-1/2}$ и не зависит от t. Вблизи волнового фронта поле представляется интегралом Френеля (см. [5]).

4. Чтобы найти асимптотику $\widehat{W}(t,\widehat{x},\widehat{y})$ при $t \to \infty$, мы будем находить асимптотику внутреннего интеграла J в (5) для достаточно больших τ, т.е. для $r \gg 1$, $r/\tau \ll 1$, используя для этого метод стационарной фазы

$$J \approx \frac{2\pi G(Q)}{\tau\sqrt{|D(Q)|}} \exp i\big(\Phi(r,\varphi,\tau) + \pi(\operatorname{sign} A + \operatorname{sign} B)/4\big).$$

Здесь точка $Q = (\eta_Q, \zeta_Q)$ определяется из уравнений $\widetilde{\omega}'_\eta = \widehat{x}/t$, $\widetilde{\omega}'_\zeta = \widehat{y}/t$, функция $D(Q)$ равна $\widetilde{\omega}''_{\eta\eta}(Q)\widetilde{\omega}''_{\zeta\zeta}(Q) - (\widetilde{\omega}''_{\eta\zeta}(Q))^2$ и

$$\begin{aligned}\Phi(r,\varphi,\tau) &= -\eta_Q r\cos\varphi - \zeta_Q r\sin\varphi + \widehat{\omega}(Q)\tau = \\ &= r^2\Phi_2(\varphi)\tau^{-1} + r^3\Phi_3(\varphi)\tau^{-2} + O(r^4/\tau^3),\end{aligned}$$

когда $\tau \to \infty$. Здесь r и φ – полярные координаты (6) и

$$\Phi_2(\varphi) = -\omega_2\left(\frac{\cos\varphi}{2A}, \frac{\sin\varphi}{2B}\right);\ \ \Phi_3(\varphi) = \omega_3\left(\frac{\cos\varphi}{2A}, \frac{\sin\varphi}{2B}\right).$$

Функции $G(Q)$ и $\sqrt{|D(Q)|}$ регулярны при больших τ.

Таким образом, мы получаем

$$\widetilde{W} = \int\limits_0^t C(r/\tau)\exp\big(i\Phi(r,\varphi,\tau)\big)\frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_{r/t}^{\infty} \exp\big(ir\Psi(\xi)\big)C(\xi)\frac{d\xi}{\xi} \qquad (7)$$

с регулярными $C(r/\tau) = C_0 + r/\tau C_1 + \cdots$ и $\Psi(\xi) = \xi\Phi_2(\varphi) + \xi^2\Phi_3(\varphi) + \ldots$

Если модуль $\Phi_2(\varphi)$ ограничен снизу, то стационарная точка $\xi_1 = r/\tau_1$ функции Ψ также ограничена снизу и асимптотика $\widehat{W}$ для больших t есть сумма функции U_1 и компоненты, которая логарифмически растет при $t \to \infty$, и выражается в терминах интегральной экспоненциальной функции E_1 с мнимым аргументом или в терминах интегральных синуса и косинуса

$$\widetilde{W} \approx U_1 + E_1\big(-i\Phi(r,\varphi,t)\big)\cdot C_0 + iH(t)\frac{\exp i\Phi(r,\varphi,t)}{r} + O(r^{-2}),$$

где $H(t)$ регулярна при больших t.

Если $t \to \infty$, то $\widetilde{W}$ логарифмически растет

$$\widehat{W} = U_1 + C_0 \ln\big(r^2\Phi_2(\varphi)/t\big) + H(t)/r + O(r^{-2}) + O(t^{-1}).$$

Если Φ_2 стремится к нулю, т.е. φ стремится к $\pm\arctan\sqrt{-B/A}$ или $\pi \pm \arctan\sqrt{-B/A}$, то стационарная точка фазовой функции

$\Phi : \tau_0 = -2r\Phi_3(\varphi)/\Phi_2(\varphi) + O(1)$ стремится к бесконечности и интеграл (7) является интегралом от быстро осциллирующей функции с тремя близкими критическими точками: полюсом $\xi = 0$ неэкспоненциальной функции, точкой $\xi = r/t$ на границе области интегрирования и стационарной точкой $\xi = r/\tau_0$ фазовой функции $\Psi(\xi)$ со второй производной Ψ'', ограниченной снизу по модулю. Равномерная асимптотика таких интегралов выражаетсч [6] в терминах новой специальной функции Ff-интеграла (см. [6]–[8])

$$Ff(\sqrt{r}\alpha, \sqrt{r}\beta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{\exp(irs^2)ds}{s-\beta+i0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{r}\alpha} \frac{\exp(is^2)ds}{s-\sqrt{r}\beta+i0}.$$

5. Качественное поведение поля $\widehat{W}(t,\widehat{x},\widehat{y})$, когда t, $r \gg 1$, зависит от типа стационарной точки $O=(0,0)$ функции $\widehat{\omega}(\lambda_0+\eta, \mu_0+\zeta)$. Предположим сначала, что эта точка есть экстремальная точка, т.е., что коэффициенты A, B в разложении (4) имеют одинаковый знак и точка O есть изолированная точка кривой $\widehat{\omega}=0$. Тогда, поле в дальней зоне $\widehat{W}(t, r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ для t, $r \gg 1$ состоит из следующих компонент.

1. Компоненты $\Omega(t,r,\varphi)$, обусловленной особыми точками $\omega(\lambda_0,\mu_0)$ и $F(\lambda,\,\mu)$.

2. Компонент $U_i(t,r,\varphi)$, обусловленных регулярными точками P_i кривой $\widehat{\omega}=0$, в которых $\operatorname{grad}\widehat{\omega}$ имеет направление φ. Каждое слагаемое $U_i(t,r,\varphi)$ это волна, распространяющаяся в направлении φ со скоростью $v_i(\varphi) = |\operatorname{grad}\widehat{\omega}(P_i)|$ и для $r > v_i(\varphi)t$ это слагаемое имеет порядок t^{-1}. Для $r \approx v_i(\varphi)t$ функция U_i выражается в терминах интеграла Френеля. За фронтом, т.е., для $r < v_i(\varphi)t$ функция U_i не зависит от t (в главном члене асимптотики) и имеет порядок $r^{-1/2}$. Если P_i является точкой перегиба кривой $\widehat{\omega}=0$, то U_i имеет более сложную асимптотику для $r \leqslant v_i t$.

3. Компоненты $v(t,r,\varphi)$, обусловленной особой точкой $O = (\lambda_0,\mu_0)$ кривой $\widehat{\omega}=0$. Эта компонента порядка единицы для

$$r \leqslant r_z = \mathrm{const}\cdot\sqrt{t/|\Phi_2(\varphi)|}. \tag{8}$$

Другими словами, присутствие изолированной особой точки O кривой $\widehat{\omega}=0$ приводит к появлению резонансной зоны Z вблизи начала координат и в этой зоне поле порядка единицы. Как видно из (8) размер резонансной зоны растет для $t \to \infty$, как $\sqrt{t}$.

Пусть теперь O является самопересекающейся точкой кривой $\widehat{\omega} = 0$, т.е. пусть координаты A, B в (4) имеют разные знаки. Мы назовем "критическими направлениями" направления φ, для которых Φ_2 равно нулю: $\varphi_{1,2} = \pm \arctan \sqrt{-B/A}$; $\varphi_{3,4} = \pi \pm \arctan \sqrt{-B/A}$. Описание $\widehat{W}$ как суммы компонент Ω, U_i, v применимо вне областей близости критических направлений (переходные области) с границами

$$|\Phi_2(\varphi) = C \cdot r^{-1/2} \sqrt{|\Phi_3(\varphi)|} \tag{9а}$$

или

$$|\varphi - \varphi_k| = C \cdot r^{-1/2} \sqrt{|\Phi_3(\varphi)|} / |\Phi_2'(\varphi_k)| = 2C \cdot r^{-1/2} \sqrt{|AB\Phi_3|}, \tag{9б}$$

где мы можем положить $C = 2\pi$. Размер резонансной зоны (в которой поле $\widehat{W}$ имеет единичный порядок) определяется уравнением (8) вне переходных областей и выражением $r \leqslant r_z \approx \mathrm{const}\, t^{2/3} |\Phi_3|^{-1/3}$ внутри этих областей.

Обсудим некоторые качественные следствия из этих утверждений. Оценка (8) показывает, что пока направление φ стремится к критическому направлению, размер резонансной зоны Z растет от величины порядка $t^{1/2}$ вдали от критических направлений до величины порядка $t^{2/3}$ у границ переходных областей, где $|\Phi_2(\varphi)| = O(r^{-1/2})$. Внутри переходных областей резонансная зона имеет тот же порядок $t^{2/3}$. Эти оценки означают, что пока t растет резонансная зона становится более и более растянутой вдоль критических направлений и ее размер в этих направлениях становится бóльшим, чем в направлениях между критическими в $t^{1/6}$ раз.

Рассмотрим теперь поведение волн U_i вблизи критических направлений. Эти волны распространяются в секторах углов φ, для которых Φ_2 и Φ_3 имеют разные знаки. Расстояние $r_i(\varphi)$ между волновым фронтом волны U_i и началом определяется условием $t = \tau_0$, т.е. $r = r_i(t, \varphi) = -2t\Phi_2(\varphi)/\Phi_3(\varphi)$. Величины $|\Phi_2(\varphi)|$ и $r_i(t, \varphi)$ убывают, приближаясь к критическим направлениям. На границе переходной области $r_i = r_i(t) = (2tC)^{2/3} |\Phi_3|^{-1/3}$, где C – та же константа, как и в (9). Таким образом, хотя расстояние r_i между волновым фронтом и началом имеет порядок t вдали от критических направлений, т.е. много больше, чем размер $r_z = O(\sqrt{t})$ резонансной зоны, величина r_i уменьшается, r_z растет при приближении к границе переходной области и у этой границы r_i и r_z имеют тот же порядок по t, равный $t^{2/3}$. Когда эти величины становятся близкими, т.е. внутри переходных зон, мы не можем отличить волну U_i от резонансной компоненты v в поле $\widehat{W}$.

6. Оценим размер резонансной зоны и порядок роста $\widehat{W}$ при $t \to \infty$ в случае вырожденной стационарной точки. Если мы выделим множитель $|B|^{-1}$ из функции $\widetilde{W}$: $\widetilde{W} = |B|^{-1}\overline{W}$, то $\overline{W}$ будет безразмерной функцией, t, r, φ (r, φ являются полярными координатами (6)), который растет при $t \to \infty$ как $t^{1/6}$.

Пусть $A = 0$ в разложении (4). Тогда направления $\pm\pi/2$ являются критическими. Оценим асимптотику $\overline{W}$ и размер резонансной зоны для фиксированного $\varphi \neq \pm\pi/2$ и для $\varphi = \pm\pi/2$. Более точно, мы выберем некоторое фиксированное M и оценим размер окрестности вблизи начала, в которой $|\overline{W}| \geqslant M$.

Пусть $p = (3C)^{-1/3}$; $q = (EC - D^2)/[4b^2(3C)^{4/3}]$.

Если $\varphi \neq \pi/2$ и $r \gg 1$, $t \gg qr\sin^2\varphi/(p\cos\varphi)$, то эта оценка имеет вид

$$|\widehat{x}_z| = r_z|\cos\varphi| \approx \begin{cases} 10 \cdot M^{-4/7}B^{2/7}C^{1/7}t^{3/7}, & \text{для } \operatorname{sign}\widehat{x} = \operatorname{sign} C \\ (3C)^{1/3}t^{1/3}, & \text{для } \operatorname{sign}\widehat{x} = -\operatorname{sign} C. \end{cases}$$

Эта асимптотика неприменима при $\widehat{y} \gg \widehat{x}$. Размер резонансной зоны для $\widehat{x} = 0$, т.е. вдоль оси $\widehat{y}$, оценивается величиной

$$r_z = |\widehat{y}| \sim \begin{cases} 2 \cdot M^{-2/7}|B|^{1/7}|C|^{-2/21}|q|^{-1/2}t^{5/7}, & \text{для} \quad q < 0 \\ |q|^{-1/2}t^{2/3}, & \text{для} \quad q > 0. \end{cases}$$

7. Рассмотрим кратко резонансный случай для трехмерной задачи. Здесь аналогом уравнения (5) является следующее выражение

$$\widetilde{W}(t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}) = \\ = \int_0^t \int\int\int G(\eta, \zeta, \gamma) \exp i\big(-\eta\widehat{x} - \zeta\widehat{y} - \gamma\widehat{z} + \tau\widetilde{\omega}(\eta, \zeta, \gamma)\big)\, d\eta d\zeta d\gamma, \tag{10}$$

где $\widetilde{\omega}(\eta, \zeta, \gamma) = \omega(\lambda_0 + \eta, \mu_0 + \zeta, \xi_0 + \gamma) - \omega(\lambda_0, \mu_0, \xi_0) - \eta v_x - \zeta v_y - \gamma v_z$. Пусть также $\widehat{x} = r\cos\theta$, $\widehat{y} = r\sin\theta\cos\theta$, $\widehat{z} = r\sin\theta\cos\theta$. В отличие от двумерного случая внешний интеграл сходится, когда $t \to \infty$, т.е. стационарное состояние здесь существует. Асимптотика $\widetilde{W}(t, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z})$ в дальней зоне определяется функцией $\widetilde{\omega}$; в резонансном случае эта функция и ее первые производные равны нулю в начале координат. Мы можем предположить, что разложение $\widetilde{\omega}(\eta,\zeta,\gamma)$ по степеням η,ζ,γ имеет вид

$$\widetilde{\omega}(\eta,\zeta,\gamma)=\frac{a\eta^2}{2}+\frac{b\zeta^2}{2}+\frac{c\gamma^2}{2}+\omega_3(\eta,\zeta,\gamma)+\cdots, \tag{11}$$

где ω_3 есть однородный полином третьей степени, а следующие члены разложения обозначаются точками. Тогда внутренний интеграл J в (10) когда $t\to\infty$ имеет асимптотику

$$J(\tau,r,\theta,\varphi)\approx$$
$$\frac{\mathrm{const}}{r^{3/2}}\cdot\exp ir\left(\frac{r}{\tau}\Phi_2(\theta,\varphi)+\frac{r^2}{\tau^2}\Phi_3(\theta,\varphi)+\frac{r^3}{\tau^3}\Phi_4(\theta,\varphi)+O\left(\frac{r^4}{\tau^4}\right)\right),$$

где

$$\Phi_2=-\left(\frac{\cos^2\theta}{2a}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{2b}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{2c}\right);$$
$$\Phi_3=\omega_3\left(\frac{\cos\theta}{a}+\frac{\sin\theta\cos\varphi}{b}+\frac{\sin\theta\cos\varphi}{c}\right),$$

а Φ_4 есть однородный полином четвертой степени от переменных $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$. Асимптотика $\widetilde{W}(\infty,\widehat{x},\widehat{y},\widehat{z})$ при $r\to\infty$ определяется значениями функций Φ_2, Φ_3, Φ_4.

Если начало координат $O=(0,0,0)$ есть точка экстремума функции $\widetilde{\omega}$, т.е. коэффициенты a, b, c в (11) одинакового знака, то $\Phi_2(\theta,\varphi)$ ограничена снизу по модулю для каждого θ, φ. Следовательно, W_2 имеет порядок r^{-1}, когда $r\to\infty$, т.е. имеет тот же порядок, который имеет компонента в дальней зоне, обусловленная регулярными точками поверхности $\widetilde{\omega}=0$, в которых $\operatorname{grad}\widetilde{\omega}$ имеет направления θ, φ (см. [1]–[2]).

Если O седловая точка функции $\widetilde{\omega}$, т.е. коническая точка поверхности $\widetilde{\omega}=0$, то асимптотика W_2 для фиксированных θ, φ и $r\to\infty$ имеет порядок r^{-1} при $\Phi_2\neq 0$, порядок $r^{-3/4}$ при $\Phi_2=0$, но $\Phi_3\neq 0$, и порядок $r^{-2/3}$,если $\Phi_2=\Phi_3=0$, но $\Phi_4\neq 0$. Разъясним геометрический смысл этих условий.

Условие $\Phi_2=0$ определяет конус S критических направлений θ, φ, для которых плоскость $\Sigma:\eta\cos\theta+\zeta\sin\theta\cos\varphi+\gamma\sin\theta\sin\varphi=0$ касательна в точке O к поверхности $\widetilde{\omega}=0$. Если знак Φ_3 изменяется на конусе S, то этот конус содержит направления θ_i, φ_i, для которых $\Phi_3=0$. Назовем эти направления суперкритическими направлениями. Для этих направлений плоскость Σ соприкасается с поверхностью $\widetilde{\omega} = 0$ в точке O. В общем случае функция Φ_4 не равна нулю вдоль суперкритических направлений. Так, W_2 имеет порядок r^{-1} вдоль направлений θ, φ, отличных от критического, порядок $r^{-3/4}$ вдоль критических направлений, которые отличны от суперкритических и порядок $r^{-2/3}$ вдоль суперкритических направлений.

Эта асимптотика неравномерна, т.е. она не имеет места для направлений θ, φ, близких к критическим или суперкритическим. Асимптотика, применимая для направлений, близких к критическим, выражается в терминах интеграла Перси [9]. Асимптотика, применимая вблизи суперкритических направлений, выражается в терминах обобщенных функций Эйри [10].

Литература

1. J. Lighthill, *Studies on Magneto-Hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions.* — Phil. Trans. of Royal Soc. of London, Ser A **252, No. 1014** (1960), 397–430.
2. J. Lighthill, *Waves in fluids.* Cambridge University Press, 1978.
3. L. Chee-Seng, *Water waves generated by an oscillatory surface pressure travelling at critical speed.* — Wave motion **3** (1981), 159–180.
4. M. Yanovitch, *Gravity waves in a heterogeneous incompressible fluid.* Comm. Pure Appl. Math (1962), pp. 45–52.
5. М. В. Федорюк, *Метод Наибыстрейшего Спуска.* М., 1977.
6. V. A. Borovikov, *Uniform stationary phase method.* Peter Peregrinus, 1995.
7. А. П. Анжутин, В. А. Боровиков, *Равномерная Асимптотика Интегралов с Быстро Осциллирующими Подынтегральными Функциями и с Особенностями Неэкспоненциального Множителя.* М., 1984.
8. В. А. Боровиков, В. В. Залтпаев, *О новой специальной функции.* — Журнал Вычисл. Матем. и Матем. Физики (в печати).
9. T. Pearcey, *The structure of electromagnetical field in the neighbourhood of a caustic.* — Phyl. Mag. **37** (1946), 311–317.
10. D. Ludwig, *Uniform asymptotic expansions at a caustic.* — Comm. Pure Appl. Math. **19, No. 2** (1966), 215–250.

Borovikov V. A. Far field excited by moving oscillating source in resonance case.

The wave fields excited by moving oscillating sources are considered. The asymptotics of far field at a lartge t in the resonance case are found and explicit expressions for the growing component of the field are given.

Институт проблем
механики РАН

Поступило 10 октября 1995 г.