В. С. Булдырев, А. В. Соколов, А. С. Старков

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ВЫСОКОЧАСТНОГО ИСТОЧНИКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ВОЛНОВОДЕ

1. В декартовой системе координат (x, y, z), связанной с неподвижной средой, задачу о точечном источнике колебаний, который движется по траектории $S : \vec{r} = \vec{r}_0(t)$, $\vec{r}_0 = (x_0(t), y_0(t), z_0(t))$, t – время, поставим следующим образом: найти решение уравнения

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A(t) e^{-i\zeta(t)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad 0 < z < \pi, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям излучения и условиям на границе

$$u\big|_{z=0} = u\big|_{z=\pi} = 0. \tag{2}$$

Здесь u – звуковой потенциал, $A(t)$ и $\zeta(t)$ – гладкие функции, характеризующие зависимость амплитуды и фазы источника от времени. Скорость распространения звука считается постоянной и равной 1. Единица измерения длины выбрана таким образом, что толщина волновода равна π.

Предполагается, что при $t \leqslant 0$ источник движется равномерно с дозвуковой скоростью $v < 1$ параллельно оси абсцисс, его частота постоянна, а амплитуда равна 1, т.е. $A(t) = 1$, $\zeta(t) = \omega t$, $\vec{r}_0(t) = (vt, 0, z_0)$. Для таких времен решение задачи (1), (2) легко находится методом Фурье и имеет вид ([1])

$$u = \frac{i}{2\pi\sqrt{1 - v^2}} \exp\left(i\omega \frac{vx - t}{1 - v^2}\right)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} H_0^{(1)}\big(\varkappa_m \sqrt{(x - vt)^2 + y^2(1 - v^2)}\big) \sin mz \sin mz_0, \quad t \leqslant 0, \tag{3}$$

где $\varkappa_m = \sqrt{\omega^2 - m^2(1 - v^2)}(1 - v^2)^{-1}$ и $\operatorname{Re}\varkappa_m > 0$ при $\omega > m\sqrt{1 - v^2}$ и $\operatorname{Im}\varkappa_m > 0$ при $0 < \omega < m\sqrt{1 - v^2}$. Для критических частот, когда $\varkappa_m = 0$, соответствующую функцию Ханкеля в ряду (3) следует заменить на $\ln((x - vt)^2 + y^2(1 - v^2))$.

Условиями (1)–(3) звуковой потенциал определяется однозначно.

Будем также предполагать, что при $t \geqslant 0$ мгновенная частота источника $\zeta'(t)$, его скорость $\vec{r}_0{}'(t)$ и амплитуда медленно меняются с течением времени, т.е. зависят от переменной εt, где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Тогда фазовая функция и координаты источника при $t \geqslant 0$ могут быть записаны в виде $\varepsilon^{-1}\widetilde{\zeta}(\varepsilon t)$ и $\varepsilon^{-1}\vec{\widetilde{r}}_0(\varepsilon t)$.

Аналогичная задача о поле движущегося источника рассматривалась ранее в [2, 3], но, в отличие от настоящей работы, при условии малости вертикальной составляющей скорости. Кроме того, в этих работах не был рассмотрен эффект преобразования волн на критических частотах, исследование которого и составляет главную цель нашей работы.

2. В качестве первого шага решения поставленной задачи перейдем к "медленному" времени $\sigma = \varepsilon t$ и разложим потенциал в ряд Фурье по вертикальной координате

$$u(\vec{r}, \vec{r}_0, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, y, \sigma) \sin mz.$$

Тогда коэффициент Фурье u_m удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial \sigma^2} - m^2 u_m = \\ &= \frac{iA(\sigma)}{\pi} \left(e^{-i\varepsilon^{-1}\zeta_1(\sigma)} - e^{-i\varepsilon^{-1}\zeta_2(\sigma)} \right) \cdot \\ &\cdot \delta\left(x - \varepsilon^{-1}\widetilde{x}_0(\sigma)\right) \delta\left(y - \varepsilon^{-1}\widetilde{y}_0(\sigma)\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\zeta_{1,2}(\sigma) = \widetilde{\zeta}(\sigma) \pm m\widetilde{z}_0(\sigma)$. Таким образом, наличие вертикальной составляющей у скорости движения источника приводит к расщеплению мгновенной частоты на две. В соответствии с этим представим u_m в виде разности $u_m = u_{m1} - u_{m2}$, где каждое слагаемое u_{mi}, $i = 1, 2$ является решением уравнения (4), в правой части которого оставлена только одна экспонента с показателем $-i\zeta_i(\sigma)$. В дальнейшем индекс i будем опускать.

3. В трехмерном пространстве (t, x, y) введем метрику Минковского

$$dT^2 = \varepsilon^{-2} d\sigma^2 - dx^2 - dy^2.$$

Пусть s – длина кривой S в этой метрике, отсчитываемая от точки $t = 0$:

$$s = \int_0^\sigma \sqrt{1 - v^2(a)}\, da,$$

где $v(\sigma) = \sqrt{(x_0'(\sigma))^2 + (y_0'(\sigma))^2} < 1$ – абсолютная величина горизонтальной скорости. Далее, пусть $\vec{n}$ – единичный вектор главной нормали, а $\vec{b}$ – бинормали; $\varepsilon k(s)$ – кривизна кривой S, а $\varepsilon^2 l(s)$ – ее кручение. Малость кривизны и кручения является следствием предположения о медленности изменения скорости.

Радиус-вектор $\vec{R}(\mu)$ произвольной точки μ вблизи S будем задавать равенством

$$\vec{R}(\mu) = \vec{R}(s) + n_1\vec{e}_1(s) + n_2\vec{e}_2(s).$$

Здесь $\vec{e}_1(s)$ и $\vec{e}_2(s)$ – единичные вектора, ортогональные к S и друг к другу, связанные с векторами нормали $\vec{n}$ и бинормали $\vec{b}$ формулами

$$\vec{e}_1 = \vec{n}\cos\theta - \vec{b}\sin\theta, \quad \vec{e}_2 = \vec{n}\sin\theta + \vec{b}\cos\theta.$$

Угол θ зададим формулой $\theta = \varepsilon \int_0^s l(s) ds$.

Для равномерно движущегося источника (при $t < 0$) связь старых координат (x, t, y) и новых (n_1, n_2, s) задается соотношениями

$$s = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad n_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad n_2 = y, \quad x = \frac{n + vs}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad t = \frac{s + vn}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Введем теперь цилиндрические координаты (n, φ) по формулам

$$n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}, \quad n_1 = n\cos\varphi, \quad n_2 = n\sin\varphi.$$

Система координат (s, n, φ) ортогональна, причем для элемента длины имеет место формула (ср. [5], гл. 9)

$$dT^2 = \varepsilon^{-2} H^2 ds^2 - dn^2 - n^2 d\varphi^2,$$

где введено обозначение $H(s, n, \varphi) = 1 - \varepsilon k(s) n \cos(\theta - \varepsilon)$.

Теперь можно выписать уравнение (4) в координатах (s, n, φ):

$$\frac{1}{H}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial n} H n \frac{\partial u_m}{\partial n} + \frac{1}{n^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} H \frac{\partial u_m}{\partial \varphi} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{H}\frac{\partial u_m}{\partial s}\right) - m^2 u_m = \\ = B(s)\exp(-i\varepsilon^{-1}\zeta(s))\delta(n_1)\delta(n_2). \qquad (5)$$

Здесь $B(s) = iA(s)\sqrt{1 - v^2(s)}/\pi$ есть амплитуда волны в системе координат, движущейся с источником.

4. Так как коэффициенты в уравнении (5) зависят только от переменных s и εn, то перейдем к растянутой координате $\nu = \varepsilon n$. В координатах (σ, ν, φ) решение уравнения (5) будем отыскивать в виде разложения, аналогичного разложению, использованному в [6],

$$u_m = \sum_{j=0}^{\infty} \big(a_j\, g_j(\varepsilon, P) + ib_j \varepsilon^{-1} g_{j+1}(\varepsilon, P)\big) e^{i\varepsilon^{-1}Q},$$

где a_j, b_j, P, Q – искомые функции. Функции $g_j(\varepsilon, P)$ имеют вид

$$g_j(\varepsilon, P) = i\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-2\varepsilon P)^j H_j^{(1)}(P/\varepsilon).$$

Способ построения a_j, b_j, P, Q указан в [6], поэтому ограничимся нахождением главных членов. Определим функции $\tau^{\pm} = P \pm Q$ как решения задачи Коши для уравнения эйконала

$$\frac{\partial \tau^{\pm}}{\partial \nu} = \pm\sqrt{\frac{1}{H}\left(\frac{\partial \tau^{\pm}}{\partial s}\right)^2 - m^2 - \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \tau^{\pm}}{\partial \varphi}\right)^2}, \quad \tau^{\pm}\big|_{\nu=0} = -\zeta(s), \tag{6}$$

которые являются 2π-периодическими функциями угла φ. Уравнение (6) записано в форме Ковалевской и его решение можно искать в виде разложения по ν.

Простые вычисления дают

$$\tau^{\pm} = -\zeta(s) \pm \nu \varkappa_m(s) \pm \frac{R(s)\cos(\theta - \varphi)\zeta'(s)}{\varkappa_m(s)}\nu^2 + O\left(\frac{\nu^3}{\varkappa_m^2}\right),$$

где $\varkappa_m(s) = \sqrt{(\zeta'(s))^2 - m^2}$.

Аналогичным образом, в виде разложений по ν можно искать коэффициенты a_j, b_j как решения уравнения переноса (см. [6]). Для конечных значений координаты n эти разложения есть ряды по степеням малого параметра ε. Ограничиваясь только главными при $n = O(1)$ слагаемыми, имеем

$$u_m = B(s)H_0^{(1)}\big(\varepsilon^{-1}\big(\varkappa_m \nu + O(\nu^2)\big)\big) \exp\big[-i\varepsilon^{-1}\big(\zeta(s) + O(\nu^3)\big)\big] \cdot \\ \cdot \big[1 + O(\nu) + O(\varepsilon)\big]. \tag{7}$$

Если коэффициент $\varkappa_m$ обращается в 0, то полученное разложение не существует и должно быть заменено на новое, поискам которого и посвящен следующий пункт.

5. Предположим, что мгновенная частота $\zeta'(s)$ уменьшается так, что в некоторой точке траектории $s = s_0$ выполнены соотношения $\zeta'(s_0) = m$, $\varkappa_m(s_0) = 0$ и разложение $\varkappa_m^2(s)$ в ряд Тейлора в окрестности $s = s_0$ начинается с линейного слагаемого $\varkappa_m^2(s) = \varkappa_{m0}(s - s_0) + \ldots$, где $\varkappa_{m0} < 0$. Плоскость $s = s_0$ назовем критической. Вдали от критической плоскости при $s < s_0$ аргумент у функции Ханкеля действителен и выражение (7) описывает распространяющуюся волну, а при $s > s_0$ функция $\varkappa_m(s)$ мнимоположительна и происходит экспоненциальное убывание звукового поля при удалении от траектории. Описание поля в переходной области малых $s - s_0$ и является основной целью настоящей работы. Случай "рождения" распространяющейся волны из затухающей при увеличении мгновенной частоты рассматривается аналогично.

Перейдем в растянутую систему координат $q = (-\varepsilon^{-1} m\varkappa_{m0})^{1/4} n$, $r = (-\varepsilon\varkappa_{m0}/m)^{1/2}(s - s_0)$ и выделим у потенциала наиболее осциллирующий в окрестности $s = s_0$ множитель $\exp(-i\zeta(s)\varepsilon^{-1})$, т.е. будем отыскивать решение уравнения (5) в виде

$$u_m = \exp\left(-i\zeta(s)\varepsilon^{-1}\right) \sum_{j=0}^{\infty} v_j(r, q, \varphi) \epsilon^{j/4}. \tag{8}$$

При подстановке анзаца (8) в уравнение (5) и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/4}$, получаем рекуррентную последовательность уравнений, самое старшее из которых имеет вид

$$2i\frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial q} q \frac{\partial v_0}{\partial q} - r v_0 = \widetilde{B}(s_0)\frac{\delta(q)}{q} \tag{9}$$

$$\widetilde{B}(s) = B(s)(1 - v^2)^{-1/2}$$

Масштабы растяжения координат выбраны из условия, чтобы в полученном уравнении (9), учитывающем в главном приближении изменение поля вдоль по траектории и в поперечном направлении, все слагаемые имели одинаковый порядок по ε.

Решение уравнения (9) легко может быть найдено методом Фурье и имеет вид

$$v_0(q,r) = \frac{-\widetilde{B}(s_0)}{2\pi} \int\limits_0^\infty \exp\left[\frac{i}{2}\left(\frac{p^2}{2} - rp + \frac{q^2}{p}\right)\right]\frac{dp}{p}. \tag{10}$$

Таким образом, звуковое поле в окрестности критического сечения выражается интегралом специального вида (10), отличающегося от интегрального представления функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(q\sqrt{-r}) = -\frac{i}{\pi} \int\limits_0^\infty \exp\left[\frac{i}{2}\left(-rp + \frac{q^2}{p}\right)\right]\frac{dp}{p}, \quad r < 0,$$

только дополнительным слагаемым в подынтегральной экспоненте, которое и обеспечивает ограниченность интеграла (10) при $r = 0$, $q \neq 0$.

6. Исследуем теперь асимптотику интеграла (10) вдали от критической точки $r = q = 0$. Вначале рассмотрим случай, когда точка наблюдения находится не очень далеко от траектории, т.е. будем считать координату $r > 0$ большой величиной, а поперечную координату q конечной, $q = O(r^{1/2})$. При этом предположении подынтегральная экспонента в (10) содержит одну особую точку $p = 0$ и одну стационарную точку $p = r$, которые отделены друг от друга. В комплексной плоскости p продеформируем контур интегрирования с действительной оси к новому контуру, состоящему из отрезка мнимой оси и перевального контура, пересекающего действительную ось в точке $p = r$ под углом $-\pi/4$. В соответствии с такой деформацией асимптотика интеграла (10) будет содержать, во-первых, функцию Макдональда $K_0(\sqrt{r}q) = \pi i H_0^{(1)}(i\sqrt{r}q)/2$, $r > 0$, возникающую при интегрировании по мнимой оси. Это слагаемое просто совпадает с (7) при $\operatorname{Im}\varkappa_m > 0$. И, во-вторых, при интегрировании по перевальному контуру появится слагаемое

$$\frac{\widetilde{B}(s_0)}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{1}{r} \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{r^2}{4} + \frac{q^2}{2r}\right)\right], \tag{11}$$

отвечающее расходящейся от критической точки $r = q = 0$ “сферической” волне

$$\widetilde{B}(s_0) \exp i\left(-\frac{\pi}{4} - mR + \zeta(s_0)\right)/(2\pi^{3/2}R)$$

при $R = \sqrt{(s-s_0)^2 - n^2}$. В этом нетрудно убедиться, если в выражении (11) вернуться к исходным переменным n и s и воспользоваться следующими разложениями

$$R(s) = s - s_0 - n^2/(2(s-s_0)) + \dots$$
$$\zeta(s) = \zeta(s_0) + m(s-s_0) + \varkappa_{m0}(s-s_0)^2/(2m) + \dots .$$

Перейдем теперь к исследованию области больших значений координаты q и малых значений $r = O(q^{-2/3})$. В этом случае показатель подынтегральной экспоненты в (10) имеет одну стационарную точку $p = q^{2/3}$, а вклад от интегрирования по окрестности нуля экспоненциально мал. Асимптотика интеграла (10) имеет вид

$$\frac{\widetilde{B}(s_0)}{\sqrt{5\pi}} \exp\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}q^{4/3} - rq^{2/3}\right)\frac{1}{q^{2/3}},$$

т.е. звуковое поле убывает с увеличением расстояния как $q^{-2/3}$. Отметим, что до критического сечения звуковое поле в направлении, перпендикулярном траектории, убывает как $n^{-1/2}$, а за критическим сечением как R^{-1}.

Если же и q и r одновременно велики и $q = O(r^{3/2})$, то все слагаемые в показателе подынтегральной экспоненты в (10) являются большими величинами и уравнение для определения стационарных точек имеет вид

$$p^3 - rp^2 - q^2 = 0. \tag{12}$$

У уравнения (12) имеется 3 корня, один из которых (p_1) в рассматриваемой области действителен, а два других комплексно сопряженные. Стандартные вычисления по методу перевала приводят к следующей асимптотике звукового поля

$$u_m(q,r) \sim$$
$$\sim \frac{\widetilde{B}(s_0)}{2\pi^{3/2}}\left[\frac{\exp(ih(p_1) - i\pi/4)}{p_1\sqrt{h''(p_1)}} + \frac{\exp(ih(p_2) - i\pi/4)}{p_1\sqrt{h''(p_2)}} \cdot \eta\big(r - cq^{2/3}\big)\right].$$

Здесь введены обозначения $h(p) = \frac{1}{2}(\frac{p^2}{2} - rp + \frac{q^2}{p})$ – показатель экспоненты в интеграле (10); $\eta(a) = 1$ при $a > 0$ и $\eta(a) = 0$ при $a < 0$; p_2 – корень уравнения (12), для которого $\operatorname{Im} h(p_2) > 0$; c – некоторая числовая постоянная.

Таким образом, полученные в работе асимптотические формулы описывают звуковое поле движущегося источника как вблизи критической точки, так и на некотором расстоянии от нее.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 95–01–01285а.

Литература

1. K. E. Hawker, *A normal mode theory of acoustic Dopler effect in the oceanic wavequide.* — J. of Acoust. Soc. Am **65, No. 3** (1979), 675–681.
2. В. С. Булдырев, *Звуковое поле источника, движущегося в неоднородном слое, лежащем на однородном полупростанстве.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **156** (1986), 35–48.
3. В. И. Ильичев, В. С. Рабинович, Е. А. Ривелис, Ю. В. Хоха, *Об акустическом поле движущегося узкополосного источника в океанических волноводах.* — ДАН СССР **304, No. 5** (1989), 1123–1127.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод.* Изд-во ЛГУ, Л., 1985 272 с.
5. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, Москва, 1972 456 с.
6. Н. С. Григорьева, *Коротковолновая асимптотика решения задачи о движущемся точечном источнике в неоднородной нестационарной среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 42–51.

Buldyrev V. S., Sokolov A. V., Starkov A. S. High-frequency wave field of the source moving in the wavequide.

The problem of the moving source wave field is considered in the regular waveguide with perfectly reflected boundaries. It is supposed that the acceleration of the source is small. The asymptotics of acoustical field is constructed in the special moving coordynate system. It is shown, that in the case when Dopler frequency of the source is equal to the critical frequency of mode under consideration this asymptotics is invalid. New asymptotics in the neighbourhood of such critical cross-section is constructed.

С.-Петербургский
государственный университет

Академия холода
и пищевых технологий

Поступило 15 ноября 1996 г.