Н. Я. Кирпичникова

ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛУЧЕВОГО МЕТОДА ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Введение.

Лучевой метод давно стал классическим методом вычисления главного члена асимптотического разложения решения задач о распространении волн в акустических, электромагнитных, упругих и др. средах. Во многих задачах лучевой метод – это единственно возможный и достаточно универсальный аналитический метод решения. Особенно это относится к волновым процессам в неоднородных средах, для которых число точно решенных задач мало и ограничено одномерными, либо двумерными случаями. Однако нахождение только главного члена лучевого ряда для неоднородных сред приводит к сложному и громоздкому процессу вычислений (см. формулы работ [1, 2, 3]). Определение же последующих членов лучевого асимптотического разложения в неоднородной трехмерной среде эти трудности увеличивает многократно. Ввиду этого так необходимо найти наиболее эффективный способ вычисления высших приближений лучевого метода и, в частности, следующего за главным члена лучевого ряда в асимптотическом разложении решения. Последующие приближения важны не только для уточнения главного члена асимптотического разложения, но и для обоснования области применимости лучевого метода.

Данная статья продолжает исследования работ [4–12] об алгоритмах вычисления высших членов лучевого ряда. Здесь предложен алгоритм построения следующего за главным члена лучевого ряда для продольного вектора смещений в неоднородной изотропной упругой среде. Методика вычисления компонент вектора смещений проводится путем, подобным разработанному в статьях автора [4, 5, 12], и будет сравнена с методикой, предложенной в совместных статьях автора с М. М. Поповым [10, 11].

В работе предлагается более оптимальный (по мнению автора) путь, который дает возможность уменьшить численный процесс при нахождении решений поставленной задачи.

1. Метод вычисления высших приближений, аналогичный работе [10].

Рассмотрим неоднородную изотропную упругую среду с параметрами Ламе $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$ и плотностью $\rho(\mathbf{x})$, причем λ, μ, ρ считаются достаточно гладкими функциями x, z и не зависят от y. Рассматривается точечный источник типа центра расширения, причем как источник, так и наблюдатель расположены в плоскости (x, z).

Лучевое разложение вектора смещений $\mathbf{u}$ выбираем в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \exp\left[i\omega\big(t - \tau(\mathbf{x})\big)\right] \sum_{k=0}^{\infty} (i\omega)^{-k} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t), \tag{1.1}$$

где ω – частота, τ – эйконал, t – время, $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Главному (первому) члену лучевого ряда (1.1) соответствует $k = 0$, а следующему за главным (второму) члену, о котором будет идти речь в статье, соответствует $k = 1$. Мы будем исследовать случай продольных колебаний $\mathbf{u}_a$. Поперечная составляющая вектора смещений $\mathbf{u}_b$ может быть вычислена аналогично.

В большинстве работ [3 – 8] при вычислении следующих приближений лучевого разложения использовались ставшими уже классикой (см. работы [13, 14]) рекуррентные формулы лучевого метода. Эти формулы являлись отправной точкой для вычисления второго ($k = 1$) члена лучевого разложения вектора смещений $\mathbf{u}_1$.

Для того, чтобы легче было сравнивать алгоритмы нахождения $\mathbf{u}_1$ настоящей статьи и работы [10], приведем формулы лучевого метода для продольной составляющей вектора смещений $\mathbf{u}_a$, причем нижний индекс a будем всюду опускать.

Главное приближение лучевого разложения (1.1) равно

$$\mathbf{u}_0 = \varphi_0 \nabla\tau, \quad \varphi_0 = \psi_0(\gamma_1, \gamma_2)\sqrt{\frac{a}{\rho J}}, \quad J = \frac{1}{a}\left|\frac{\mathcal{D}(x, y, z)}{\mathcal{D}(\tau, \gamma_1, \gamma_2}\right|. \tag{1.2}$$

Формулы для следующего за главным членом $\mathbf{u}_1$ в разложении

(1.1) имеют вид:

$$\mathbf{u}_1 = \varphi_1 \nabla\tau + \mathbf{u}_1^{(0)}, \quad \left(\mathbf{u}_1^{(0)}, \nabla\tau\right) = 0,$$
$$\mathbf{u}_1^{(0)} = -\frac{a^2}{(\lambda+\mu)} M(\tau, \varphi_0 \nabla\tau), \tag{1.3}$$

а φ_1 представлена формулой

$$\varphi_1 = \tag{1.4}$$
$$= \sqrt{\frac{a}{\rho J}}\left[\psi_1(\gamma_1,\gamma_2) + \int\limits_0^\tau \frac{a^2}{2\rho}\sqrt{\frac{J\rho}{a}}\left(-M(\tau,\mathbf{u}_1^{(0)}) + L(\mathbf{u}_0), \nabla\tau\right)d\tau\right].$$

В формулах (1.2)–(1.4) функции $\psi_0(\gamma_1,\gamma_2), \psi_1(\gamma_1,\gamma_2)$ – постоянны вдоль луча и описывают начальные данные, зависящие от вида источника; $a = ((\lambda+2\mu)/\rho)^{1/2}$ – скорость продольных волн; (τ,γ_1,γ_2) – лучевые координаты; J – геометрическое расхождение лучевой трубки; а $M(\tau,\mathbf{u})$ и $L(\mathbf{u})$ дифференциальные операторы первого и второго порядка соответственно, явный вид которых приведен в обобщенных координатах, используемых как здесь, так и в сравниваемых работах [4, 5, 10, 11, 12].

Для нахождения поправочного члена $\mathbf{u}_1$ необходимо выражение для операторов M и L вычислить на опорном, (т.е. на данном, фиксированном) луче.

Будем считать, что известен опорный луч и задано его уравнение $\mathbf{R} = \mathbf{r}(s)$, где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки $\mathbf{x}$, s – длина дуги луча. Рассматривая этот луч как центральный или опорный луч лучевой трубки, введем в его окрестности нормальные римановы координаты $s = q^0$, q^1, $q^2 = y$ по формуле

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(s) + q^1\mathbf{e}_1(s) + q^2\mathbf{e}_2, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ – радиус-вектор точки $\mathbf{x}$ в окрестности опорного луча $\mathbf{R} = \mathbf{r}(s)$; $\mathbf{e}_1(s)$, $\mathbf{e}_2$ – взаимно ортогональные единичные векторы, при каждом s лежащие в нормальной к $\mathbf{r}(s)$ плоскости. Эта система координат связана с ортонормированным базисом $\left\{\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{e}_0(s),\ \mathbf{e}_1(s),\ \mathbf{e}_2\right\}$, дифференцирование $\mathbf{e}_1(s)$ по s дает

$$\frac{d}{ds}\mathbf{e}_1(s) = \varkappa_1(s)\mathbf{e}_0(s), \quad \varkappa_1(s) = \frac{\partial \ln a}{\partial q^1}\Big|_{q^1=0}, \quad \varkappa_2(s) = 0,$$

вектор $\mathbf{e}_2$ не зависит от s.

Ввиду того, что все рассмотрения проведены для квазидвумерного случая, метрический тензор $\{G_{ij}\}$ и определитель $g = \det(G_{ij})$ в системе $(q^0 = s,\ q^1,\ q^2 = y)$ равны

$$G_{00} = h^2; \quad G_{ij} = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2; \quad G_{0i} = 0, \quad i \neq 0;$$
$$h = 1 + \varkappa_1(s) q^1; \quad G_{ij} G^{jk} = \delta_i^k, \quad i, j, k = 0, 1, 2;$$
$$g = h^2, \quad G^{00} = h^{-2}.$$

Перейдем теперь к нахождению неизвестных функций, определяющих первое приближение лучевого ряда (1.1) вектора продольных смещений $\mathbf{u}_1$.

Амплитуда φ_0, входящая в выражения (1.3), (1.4) и определенная формулой (1.2), содержит скорость a и плотность ρ, которые можно считать известными функциями координат q^1, q^2. Что касается функции ψ_0 и геометрического расхождения J, то их естественно считать зависящими от лучевых координат γ_1, γ_2, связанных с рассматриваемым источником. Следовательно, производные от них по q^1 и q^2 нужно пересчитать через производные по γ_1, и γ_2. Связь между производными по q и γ находится из следующих тождеств

$$q^i = q^i\big(s, \gamma_1(s, q^1, q^2), \gamma_2(s, q^1, q^2)\big), \quad i = 1, 2.$$

Опорному лучу $q^1 = q^2 = 0$ соответствует $\gamma_j = \gamma_j^0$, $j = 1, 2$. Определим новые функции $Q_{i,j}$, $P_{i,j}$, и $\det Q$ следующим образом

$$\left.\frac{\partial q^i}{\partial \gamma^j}\right|_{\gamma_1 = \gamma_1^0, \gamma_2 = \gamma_2^0} = Q_{i,j}, \ \left.\frac{\partial p^i}{\partial \gamma^j}\right|_{\gamma_1 = \gamma_1^0, \gamma_2 = \gamma_2^0} = P_{i,j},$$
$$\det Q = \begin{vmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

где p^i – обобщенные импульсы, соответствующие обобщенным координатам q^i.

В дальнейшем все производные по поперечным к лучу координатам выразятся через новые функции $\frac{\partial^2 q^i}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} = Qi, jk$ и $\frac{\partial^2 q^i}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k \partial \gamma_e} = Qi, jkl$, i, j, k, $l = 1, 2$. Основное содержание статьей [10, 11] состоит как раз в том, чтобы найти уравнения и начальные данные, определяющие эти неизвестные функции. Приведем сводку формул из этих статей в квазидвумерном случае неоднородной упругой среды, чтобы по возможности сравнить два пути получения вектора $\mathbf{u}_1$.

Для получения функций $Q_{i,jk}$ и $Q_{i,jkl}$ в более компактном виде введем дополнительные обозначения. Обозначим через $\mathbf{X}_k$ вектор-столбец, составленный из производных от q и p по лучевым параметрам γ_1, γ_2

$$\mathbf{X}_k = \Big(Q_{1,k},\, Q_{2,k},\, P_{1,k},\, P_{2,k}\Big)^T, k = 1, 2, \tag{1.7}$$

где символ "T" означает транспонирование. Аналогично через $\mathbf{X}_{kl}$ и $\mathbf{X}_{kln}$ обозначены векторы-столбцы типа $\mathbf{X}_k$, но составленные из производных по лучевым параметрам второго и третьего порядков соответственно. Тогда система уравнений в вариациях для $\mathbf{X}_k$ может быть записана в виде

$$\frac{d}{ds}\mathbf{X}_k - \mathcal{H}\mathbf{X}_k = 0, \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & aE \\ -a^{-2}A & 0, \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

где E – единичная матрица второго порядка, все элементы матрицы второго порядка A, кроме A_{11}, равны нулю, а ненулевой элемент определяется по формуле

$$A_{11} = \frac{\partial^2 a}{\partial q^1 \partial q^1}\bigg|_{q^1 = q^2 = 0}.$$

Уравнения для векторов $\mathbf{X}_{kl}$ и $\mathbf{X}_{kln}$ отличаются от однородной системы уравнений для $\mathbf{X}_k$ появлением неоднородностей в правых частях

$$\frac{d}{ds}X_{kl} - \mathcal{H}\mathbf{X}_{kl} = F_{kl}; \quad \frac{d}{ds}X_{kln} - \mathcal{H}\mathbf{X}_{kln} = F_{kln}. \tag{1.9}$$

Здесь F_{kl} и F_{kln} – полиномы относительно произведения неизвестных функций $Q_{i,j}, Q_{i,jk}$, $P_{i,j}, P_{i,jk}$ с коэффициентами, вычисленными на опорном луче.

Начальные данные (при $s = 0$) для $\mathbf{X}_{kl}$ и $\mathbf{X}_{kln}$ обозначим соответственно $\mathbf{X}_{kl}(0)$ и $\mathbf{X}_{kln}(0)$. Тогда решение систем (1.9) с начальными данными может быть записано а форме

$$\mathbf{X}_{kl}(s) = M(s)\Big[\mathbf{X}_{kl}(0) + \int_0^s M^{-1}(t)F_{kl}(t)dt\Big],$$
$$\mathbf{X}_{kln}(s) = M(s)\Big[\mathbf{X}_{kln}(0) + \int_0^s M^{-1}(t)F_{kln}(t)dt\Big]. \tag{1.10}$$

Матрица $M(s)$ $(M(0) = E)$ – фундаментальная (4×4)-матрица системы (1.8).

В дальнейшем будем считать, что волновое поле возбуждается точечным источником, помещенным для определенности в начале координат $x = y = z = 0$. В качестве лучевых координат γ_1, γ_2 выберем углы $\vartheta = \gamma_1$ и $\varphi = \gamma_2$ сферической системы координат, в плоскости опорных лучей x, z угол ϑ изменяется в пределах $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, а угол φ равен 0 и π.

Тогда начальные данные можно представить в следующем виде

$$\mathbf{X}_1(0) = \big(0, 0, a^{-1}(0), 0\big)^T; \quad \mathbf{X}_2(0) = \left(0, 0, 0, \frac{\sin\vartheta_0}{a(0)}\right)^T.$$

Для векторов $\mathbf{X}_{kl}(0)$, $\mathbf{X}_{kln}(0)$ эти данные получены ранее (см. формулы (3.7)–(3.8) статьи [10]).

В квазидвумерном случае для фундаментальных векторов $\mathbf{X}_1(s)$ и $\mathbf{X}_2(s)$ из (1.8) и соответствующих начальных данных в этой же статье получены следующие формулы

$$\mathbf{X}_1(s) = \Big(Q_{1,1}(s),\, 0,\, P_{1,1}(s),\, 0\Big)^T, \tag{1.11}$$

$$\mathbf{X}_2(s) = \left(0,\, Q_{2,2}(s) = \frac{\sin\vartheta_0}{a(0)}\int_0^s a(s)\,ds,\, 0,\, P_{2,2}(s) = \frac{\sin\vartheta_0}{a(0)}\right)^T.$$

Модуль определителя матрицы Q, входящий в геометрическое расхождение J, упрощается и имеет вид

$$\det Q = Q_{1,1}(s)\, Q_{2,2}(s).$$

При вычислении вектора продольных смещений $\mathbf{u}_1$ важна формула не только для s-ой составляющей $u_1^s = u_1^0$ этого вектора, уточняющей главную ненулевую составляющую u_0^s, но и так называемые примесные составляющие этого вектора $u_1^{(0)1}$, $u_1^{(0)2}$ (первые неравные нулю составляющие противоположной поляризации к главному приближению). Приведем эти формулы.

$$u_1^{(0)1} = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} Q_{1,1}^{-3/2} Q_{2,2}^{-1/2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \gamma_1} - \frac{\psi_0}{\sqrt{\rho Q_{1,1} Q_{2,2}}} \times$$

$$\left\{ \frac{a^2 - 3b^2}{2(a^2-b^2)} \frac{\partial \ln \rho}{\partial q^1} - \frac{1}{2} \frac{Q_{1,1}Q_{2,21} + Q_{2,2}Q_{1,11}}{Q_{1,1}^2 Q_{2,2}} - \frac{4b^2}{a^2-b^2} \frac{\partial \ln b}{\partial q^1} \right\}, \tag{1.12}$$

$$u_1^{(0)2} = -\frac{1}{\sqrt{\rho}} Q_{1,1}^{-1/2} Q_{2,2}^{-3/2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \gamma_2}. \tag{1.13}$$

Что касается составляющей $\varphi_1 \nabla \tau$ в формуле (1.3), параллельной главному члену лучевого ряда $\mathbf{u}_0 = \varphi_0 \nabla \tau$, неизвестная функция φ_1 которой вычисляется по формуле (1.4), то заново переписывать формулы, в которые входят функции $Q_{i,jk}$, не имеет смысла ввиду их сложности (см. формулы (4.6)–(4.8) статьи [10]).

2. Вычисление $\mathbf{u}_1$ методом разложения в ряд по поперечным к лучу переменным.

Предложим другой подход [4, 5, 12] по сравнению с работами [10, 11]) для нахождения поправочного члена лучевого ряда $\mathbf{u}_1(s, q^1, q^2 = y)$.

Члены лучевого ряда (1.1) и эйконал τ будем искать в виде рядов по степеням локальных координат q^i, $i = 1, 2$, которые предполагаются малыми в рассматриваемой лучевой трубке:

$$\mathbf{u}_k(s, q^1, q^2) = \mathbf{u}_{k0}(s) + q^i \mathbf{u}_{ki}(s) + \frac{1}{2!} q^i q^j \mathbf{u}_{kij}(s) + \dots . \tag{2.1}$$

$$\tau(s, q^1, q^2) = \tau_0(s) + \frac{1}{2} q^i q^j \tau_{ij}(s) + \frac{1}{3!} q^i q^j q^k \tau_{ijk}(s) + \dots \tag{2.2}$$

$$\lambda(s, q^1, q^2) = \lambda(s) + q^1 \frac{\partial \lambda}{\partial q^1} + \frac{1}{2!} q^1 q^1 \frac{\partial \lambda}{\partial q^1 \partial q^1} + \dots . \tag{2.3}$$

Наша задача состоит в определении составляющих u_1^i, $i = 0, 1, 2$ вектора $\mathbf{u}_1$ на опорном луче, а именно $\mathbf{u}_{10}(s)$.

Перейдем к последовательному нахождению уравнений и условий, определяющих искомые составляющие векторов $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_1$. Приравнивая нулю выражения при одинаковых степенях q^1, q^2 в системе уравнений

$$N_r \mathbf{u}_{k+2} - M_r \mathbf{u}_{k+1} + L_r \mathbf{u}_k = 0, \quad r = 0, 1, 2,$$

$$\mathbf{u}_{-2} = \mathbf{u}_{-1} = 0, \qquad k = -2, -1, 0, 1, \ldots, \tag{2.4}$$

будем получать необходимые равенства и уравнения, определяющие искомые величины. Составляющие L_r, M_r, N_r операторов L, M, N во введенной системе координат q^0, q^1, q^2 определены уравнениями, явный вид которых можно найти в статье [12]. Любой вектор $\mathbf{u}$ в системе $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ имеет вид: $\mathbf{u} = \sum\limits_{i=0}^{2} \mathbf{e}_i u^i$, здесь u^i, $i = 0, 1, 2$, – контравариантные составляющие вектора $\mathbf{u}$.

Вектор-функция $\mathbf{u}_{10}(s)$ будет определена из стандартной фундаментальной системы уравнений (2.4) при $k = 0$. В полученное равенство $N_0\mathbf{u}_2 - M_0(\tau, \mathbf{u}_1) + L_0\mathbf{u}_0 = 0$ подставим разложение векторов и функций (2.1)–(2.3) и, приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях q^1, q^2, имеем при нулевой степени относительно q^i основное уравнение, определяющее $u^0_{10}(s)$:

$$\begin{gathered}
2(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \tau_0}{\partial s}\frac{\partial u^0_{10}}{\partial s} + u^0_{10}\frac{\partial}{\partial s}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \tau}{\partial s}\right] + u^0_{10} \cdot \mu \sum_{k=1}^{2} \tau_{kk} + \\
+\frac{\partial}{\partial s}\left[(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial s}u^0_{00}\right] + \sum_{k=1}^{2}\left\{(\lambda + \mu)\frac{\partial \tau_0}{\partial s}u^k_{1k} + \mu u^0_{0kk} + \mu\frac{\partial}{\partial s}u^k_{0k} + \right. \\
\left. +(\lambda + 3\mu)\frac{\partial \tau_0}{\partial s}u^1_{10}\varkappa_1 + \frac{\partial \tau_0}{\partial s}u^1_{10}\frac{\partial \mu}{\partial q^1} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial q^1} + 3\varkappa_1\mu\right)u^0_{01}\right\} = 0.
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Если мы найдем функции u^k_{10}, u^k_{1k}, u^k_{0k}, u^0_{0k}, u^0_{00}, u^k_{00}, u^0_{0kk}, $k = 1, 2$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение для $u^0_{10}(s)$ вдоль опорного луча.

Итак, чтобы решать дифференциальное уравнение (2.5), необходимо знать составляющие u^0_{00}, u^0_{0i}, u^0_{0ij}, u^k_{0i}; i, j, $k = 1, 2$ вектора $\mathbf{u}_0$ и составляющие u^k_{10}, u^k_{1k}, $k = 1, 2$ вектора $\mathbf{u}_1$.

Для определения коэффициентов разложения (2.2) эйконала τ в случае продольной составляющей вектора смещений $\mathbf{u}$ имеем уравнение эйконала

$$\Delta_a \equiv (\nabla\tau)^2 - \frac{1}{a^2} = h^{-2}\big(\frac{\partial \tau}{\partial q^0}\big)^2 + \big(\frac{\partial \tau}{\partial q^1}\big)^2 + \big(\frac{\partial \tau}{\partial q^2}\big)^2 - \frac{1}{a^2} = 0, \tag{2.6}$$

где $a^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ – квадрат продольной скорости распространения в изотропной среде. Подставляя разложения по степеням q^1 и q^2 эйконала τ (2.2), метрического тензора $G_{00} = h^2$ и вектора $\mathbf{u}_0$ из формулы (2.1) в систему уравнений (2.4) при $k = -2$, мы получаем связь между компонентами u_0^i, $i = 0, 1, 2$, вектора $\mathbf{u}_0 = (u_0^0,\, u_0^1\, u_0^2)$. Здесь следует учитывать, что $\varkappa_2 = 0$, что выбран точечный источник и тот факт, что коэффициенты $\{\tau_{i,j}\} = \{\Gamma_{i,j}\}$. Элементы матрицы $\Gamma = PQ^{-1}$ могут быть вычислены с помощью элементов $Q_{i,i}$, $P_{i,i}$, которые в свою очередь вычисляются по формулам (1.6)–(1.11).

Итак, мы имеем

$$u_{00}^0 \neq 0, \quad u_{00}^k = 0, \quad k = 1, 2;$$

$$u_{0k}^k = a_0(s) u_{00}^0 \tau_{kk}, \quad k = 1, 2; \ \ u_{0i}^k = 0, \quad k \neq i\,; \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} u_{0ij}^k = a_0(s)\big[u_{00}^0 \tau_{kij} + (\tau_{ki} u_{0j}^0 + \tau_{kj} u_{0i}^0) + 2u_{00}^0(\varkappa_i \tau_{kj} + \varkappa_j \tau_{ki})\big], \\ i,\, j,\, k = 1, 2; \tau_{k,i} = 0,\, k \neq i;\, \varkappa_2 = 0; a_0(s) = a(s, 0, 0). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Составляющие u_{0ijk}^k вычисляются по формуле (2.11) работы [12].

Поперечные составляющие вектора $\mathbf{u}_0$, т.е. u_0^k, $k = 1, 2$, могут быть выражены последовательно, как видно из формул (2.12)–(2.14), через посредство продольных составляющих u_{00}^0, u_{0i}^0, $u_{0ij}^0 \ldots$, этого же вектора $\mathbf{u}_0$ и коэффициентов разложений (2.2) эйконала τ. Следовательно, возникает задача определения u_{00}^0, u_{0i}^0, u_{0ij}^0, τ_{ki}, τ_{kij}, $\tau_{kije}, \ldots$.

Определим составляющую $u_{00}^0(s)$ из основной системы уравнений (2.4) при $k = -1$, т.е. из уравнений $N_r \mathbf{u}_1 - M_r \mathbf{u}_0 = 0$. Окончательно имеем обыкновенное дифференциальное уравнение переноса для функции $u_{00}^0(s)$

$$(\lambda + 2\mu) \cdot \mathcal{P} u_{00}^0 \equiv \tag{2.9}$$

$$\equiv (\lambda + 2\mu) \left[2 \frac{d\tau_0}{ds} \frac{du_{00}^0}{ds} + u_{00}^0 \Delta\tau + \frac{d\tau_0}{ds} u_{00}^0 \frac{d}{ds} \ln(\lambda + 2\mu) \right] = 0.$$

Уравнение переноса (2.9) дает нам значение продольной составляющей вектора смещений на опорном луче с точностью до постоянного множителя $\psi_0(\gamma_1, \gamma_2)$, не зависящего от s или τ,

$$u_{00}^0(s) = \psi_0(\gamma_1, \gamma_2) \frac{1}{\sqrt{\rho\, |\det Q|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_0(s)}}. \tag{2.10}$$

Для составляющей u_{0i}^0 $(i = 1, 2)$ проекция уравнения (2.4) при $k = -1$ $(N\mathbf{u}_1 - M\mathbf{u}_0 = 0)$ на ось q^0 не даст полного ответа, необходимо найти связь между компонентами векторов $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_1$ из проекций уравнения $N\mathbf{u}_1 - M\mathbf{u}_0 = 0$ на оси q^1 и q^2. Уравнения, определяющие составляющие u_{10}^k, $k = 1, 2$, запишутся так:

$$u_{10}^1 = a_0(s)\left[\frac{2\mu}{\lambda+\mu}\varkappa_1 u_{00}^0 - \frac{\partial\lambda}{\partial q^1}\frac{u_{00}^0}{\lambda+\mu} - u_{01}^0\right],$$

$$u_{10}^2 = -a_0(s)u_{02}^0. \tag{2.11}$$

Формулы (2.11) имеют ярко выраженный физический смысл. Составляющие u_{10}^k, $k = 1, 2$, (в статье [10] они обозначены через $u_1^{(0)k}$, $k = 1, 2$, и определены формулами (1.12), (1.13)) называются примесными составляющими вектора продольных смещений $\mathbf{u}_a$, это первые неравные нулю на опорном луче поперечные составляющие вектора продольных смещений $\mathbf{u}_a$. Подставляя равенства (2.11) в уравнения (2.4), получим систему уравнений для определения u_{0i}^0, в которых оператор $\mathcal{P}$ есть оператор уравнения переноса (2.9)

$$\mathcal{P}u_{0i}^0 + 2\sum_{k=1}^{2}\tau_{ki}u_{0k}^0 =$$

$$= -\left\{\frac{d\tau_0}{ds}\cdot\frac{\partial}{\partial q^i}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\big[\ln(\lambda+2\mu)\cdot h\big]\Big) + \right. \tag{2.12}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial q^i}(h^2\tau_{kk}) + \sum_{k=1}^{2}\tau_{ki}\frac{\partial}{\partial q^k}\big[\ln(\lambda+2\mu)\cdot h^3\big]\right\}u_{00}^0 = F_i(s)u_{00}^0.$$

Следует заметить, что все коэффициенты уравнения (2.12) вычислены на опорном луче, $\tau_{k,i} = 0$, если $k \neq i$, а функции λ, μ, h не зависят от q^2. Осталось найти уравнения, определяющие u_{0ij}^0. Из проекции уравнения $N\mathbf{u}_1 - M\mathbf{u}_0$ на оси q^0, q^1, q^2 будем иметь

$$\mathcal{P}u_{0ij}^0 + 2\sum_{k=1}^{2}\left(\tau_{ki}u_{0jk}^0 + \tau_{kj}u_{0ik}^0\right) = F_{ij}(s), \tag{2.13}$$

где левая часть уравнения (2.13) совпадает с уравнением (2.12), а правая часть $F_{ij}(s)$ содержит новые неизвестные функции τ_{ijke}, для которых, как и для функций τ_{ij}, τ_{ijk}, в следующем параграфе мы найдем соответствующие уравнения и начальные данные. Громоздкое выражение для $F_{ij}(s)$ приведено в работе [12], формула (2.24).

Таким образом, обыкновенное дифференциальное уравнение (2.5), определяющее $u^0_{10}(s)$, имеет вид подобный уравнению переноса (2.9), но с неоднородной правой частью

$$\mathcal{P}u^0_{10} = F(s) = F(u^0_{00}, u^0_{0i}, u^0_{0ij}, \tau_{ij}, \tau_{ijk}, \tau_{ijkl}). \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) решается в квадратурах и, зная функции $u^0_{0i}(s)$, $u^0_{0ij}(s)$ и соответствующие разложения эйконала, мы сможем найти составляющую $u^0_{10}(s)$. Для определения искомых функций мы имеем уравнения (2.12), (2.13), которые могут быть представлены в следующем виде

$$\mathcal{P}\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\,\Gamma = \mathbf{F}. \tag{2.15}$$

Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{F}$ – векторы-строки, матрица $\Gamma = PQ^{-1}$, $\mathcal{P}\mathbf{u} = 0$ – уравнение переноса (2.9). Выбирая решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.15) в виде

$$\mathbf{u} = u^0_{00}\mathbf{U}\,Q^{-1}, \tag{2.16}$$

для вектор-строки $\mathbf{U}$ имеем

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \frac{a_0(s)}{2u^0_{00}}\mathbf{F}\,Q. \tag{2.17}$$

Следует отметить, что правая часть уравнения (2.12) имеет общий множитель u^0_{00}.

Выбрав $u^0_{10} = u^0_{00}U^0_{10}$, из уравнения (2.14) получим для функции U^0_{10} уравнение аналогичное уравнению (2.17). Кроме отыскания значений составляющих вектора $\mathbf{u}_0$ в разложении (2.1) при $k = 0$, нам необходимо знание новых неизвестных функций $\tau_{ij}(s)$, $\tau_{ijk}(s)$, $\tau_{ijkl}(s), \ldots$, а именно, коэффициентов разложения эйконала $\tau(s, q^1, q^2)$ в ряд (2.2), к нахождению которых мы и переходим.

3. Уравнения и начальные данные для разложения эйконала.

В настоящем статье рассматривается случай продольных смещений в неоднородной изотропной упругой среде, следовательно, эйконал $\tau(s, q^1, q^2)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_a \equiv (\nabla\tau)^2 - \frac{1}{a^2} = 0, \tag{3.1}$$

которое в системе (s, q^1, q^2) запишется так

$$\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\right)^2+\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial q^k}\right)^2=\frac{1}{a^2(s,q^1,q^2)}. \tag{3.2}$$

Подставив в уравнение эйконала (3.2) разложение $\tau(s, q^1, q^2)$ по степеням q^i, $i = 1, 2$, вида (2.2), мы для элементов известной матрицы $\Gamma = \{\tau_{ij}\}$ на опорном луче найдем уравнение

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial s}\tau_{ij}+\tau_{ik}\tau_{kj}+\frac{1}{a^3}\frac{\partial^2 a}{\partial q^i\partial q^j}=0, \tag{3.3}$$

которое получено приравниванием нулю коэффициентов при произведении степеней $q^i q^j$. Это известное классическое уравнение Риккати.

$$\frac{d}{ds}\Gamma+a_0\Gamma^2+\frac{A}{a_0^2}=0, \quad a_0=a(s,0,0), \tag{3.4}$$

где только один элемент матрицы A не равен нулю и имеет следующий вид

$$A_{11}=\left.\frac{\partial^2 a}{\partial q^1\partial q^1}\right|_{q^1=q^2=0}.$$

Введем стандартные для рассматриваемого случая матрицы P и Q по формуле $\Gamma = PQ^{-1}$. Для этих матриц получаем систему уравнений (1.8) с выбранными начальными данными.

Следует отметить, что в работах по вычислению последующих приближений лучевого разложения обычно принимается, что все вычисления, касающиеся главного (нулевого) члена лучевого ряда, не обсуждаются и все функции, отвечающие за главное приближение, считаются известными.

Сформулируем теперь задачи, полученные для нахождения функций $\tau_{ijk}(s)$, $\tau_{ijkl}(s)$. Функция $\tau_{ijk}(s)$ при $i, j, k = 1, 2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a_0}\frac{\partial}{\partial s}\tau_{ijk}+\left(\tau_{ei}\tau_{ejk}+\tau_{ej}\tau_{eik}+\tau_{ek}\tau_{eij}\right)+\varkappa_i\left(2\tau_{ej}\tau_{ek}-\frac{1}{a_0^3}A_{jk}\right)+$$
$$+\frac{1}{a_0^2}A^3_{ijk}+\varkappa_j\left(2\tau_{ei}\tau_{ek}-\frac{1}{a_0^3}A_{ik}\right)+\varkappa_k\left(2\tau_{ei}\tau_{ej}-\frac{1}{a_0^3}A_{ij}\right)=0. \tag{3.5}$$

Здесь все элементы A^3_{ijk} матрицы A^3 равны нулю, кроме A^3_{111}, и являются производной третьего порядка от скорости a по поперечной к лучу координате q^1 .

Выберем решение уравнения (3.5) в виде

$$\tau_{ijk} = (\alpha_i \tau_{jk} + \alpha_j \tau_{ik} + \alpha_k \tau_{ij}) + \widehat{\tau}_{i'j'k'} Q^{-1}_{ii'} Q^{-1}_{jj'} Q^{-1}_{kk'}, \qquad (3.6)$$

где коэффициенты α_i равны $\alpha_i = -\varkappa_i$, а измененная матрица $\widehat{T}$ с элементами $\widehat{\tau}_{i'j'k'}$ удовлетворяет уравнению, легко интегрируемому в квадратурах,

$$\frac{d}{ds}\widehat{T} = \big(3\frac{d}{ds}\vec{\varkappa}\cdot\Gamma - \frac{A^3}{a_0^2}\big)Q^3, \quad \Gamma = PQ^{-1}. \qquad (3.7)$$

Дальнейшие члены в разложении (2.2) эйконала τ, а именно, $\tau_{ijke}(s)$ найдем из уравнения, подобного (3.5) (см. [12], формула (3.11)).

Обратимся к начальным данным, необходимым для однозначного нахождения решений уравнений вида (2.12), (2.13), (2.5), (2.14), т.е. к нахождению функций $u^0_{0i}(0)$, $u^0_{0ij}(0)$, $u^0_{10}(0)$, считая при этом известной функцию $u^0_{00}(s)$ и начальные данные для нее $u^0_{00}(0)$. Проводя некоторые вычисления, получаем следующие равенства

$$u^0_{0i}(0) = u^0_{00}(0)\frac{\partial}{\partial q^i}\ln\left(\frac{a}{\sqrt{\rho}}\right)(0),$$

$$u^0_{0ij}(0) = u^0_{00}(0)\left[\frac{\partial}{\partial q^i}\ln\left(\frac{a}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{\partial}{\partial q^i}\ln\left(\frac{a}{\sqrt{\rho}}\right) - \frac{\partial^2\ln(\sqrt{a\rho})}{\partial q^i\partial q^j}\right](0).$$

Начальные данные для функции $u^0_{10}(s)$ найдены процедурой согласования искомого решения с решением вблизи точечного источника типа центра вращения А. П. Киселевым, а функция $\psi_1(\gamma_1,\gamma_2)$ приведена в конце статьи.

Наконец, осталось определить начальные данные для коэффициентов разложения (2.2) эйконала функций $\tau_{ijk}(s)$ и $\tau_{ijkl}(s)$, удовлетворяющих уравнениям (3.5) или им подобным. Если мы вспомним, что обобщенные импульсы p^i, $i=1,2$, это тоже самое, что $\frac{\partial\tau}{\partial q^i}$, то начальные данные в случае точечного источника тождественно равны нулю, т.е. $\tau_{ijk}(0)=0$, $\tau_{ijke}(0)=0$ и т.д.

4. Сравнение алгоритмов вычисления вектора $\mathbf{u}_1$.

Сравним результаты, полученные в работах [10, 11], с результатами статей [4, 5, 12] и представленными в данной работе для случая квазидвумерной среды. Сравнение проведем на примере вычисления примесных составляющих, обозначенных через $u_1^{(0)k}$

в статьях [10, 11] и посредством u_{10}^k в настоящей. Будем считать, что на данном этапе известны функции $\tau_{11}(s) = P_{1,1}/Q_{1,1}$, $\tau_{22}(s) = P_{2,2}/Q_{2,2}$, определенные системой уравнений (3.3) с нулевыми начальными данными, т.е. известны вектора $\mathbf{X}_k(s), k = 1, 2$, и, следовательно, найдены величины, относящиеся к вектору $\mathbf{u}_0$, определенному формулой (1.2). Кроме того, получены функции начальных данных $\psi_0(\gamma_1, \gamma_2)$, $\psi_1(\gamma_1, \gamma_2)$ $v = \gamma_1$, $\varphi = \gamma_2 = \{0, \pi\}$:

$$\psi_0(\gamma_1, \gamma_2) = -\frac{i\omega}{4\pi a_0^2(0)\sqrt{\rho(0)}}\sqrt{\sin\vartheta},$$

$$\psi_1(\gamma_1, \gamma_2) = \psi_0(\gamma_1, \gamma_2) a_0(0) \frac{\partial \ln\rho}{\partial s}\bigg|_{s=0},$$

в квазидвумерном случае точечного источника типа центра расширения, функции ρ и a как функции от s, q^1.

В работах [10, 11] необходимо решать систему неоднородных дифференциальных уравнений в вариациях (1.9) с неоднородными данными Коши. При вычислении следующего за главным члена лучевого ряда требуется знание фундаментальной матрицы этой системы, т.е. знание полного набора из четырех линейно независимых решений. Нахождение фундаментальной матрицы создает наибольшие трудности при реализации этого алгоритма.

В данной статье отпадает необходимость нахождения всех четырех линейно независимых решений уравнений в вариациях. По мнению автора, предложенный метод требует более простых вычислений, так как некоторые промежуточные аналитические выкладки позволили существенно упростить схему вычислений и свести обыкновенные дифференциальные уравнения (2.12), (2.13), (3.5) к уравнениям вида (2.17) (3.7), решение которых легко записывается с помощью квадратур.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию (грант 95-0-13.1-66).

Литература

1. В. М. Бабич, Н. Я. Русакова (Кирпичникова), *О распространении волн Рэлея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы.* — Журнал вычислительной математики и математической физики **2 No. 4** (1962), 652–665.
2. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение метода суммирования гауссовых пучков для расчета высокочастотных волновых полей.* — Докл. АН

СССР **258, No. 5** (1981), 1097–1100.

3. А. П. Качалов, М. М. Попов, *Применение гауссовых пучков в изотропной теории упругости.* Препринт ЛОМИ Р-9-82. Л., 1982. 14 с.
4. Н. Я. Кирпичникова, *Методика вычисления дальнейших приближений в асимптотическом пространственно-временном методе гауссовых пучков.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **173** (1988), 104–112.
5. Н. Я. Кирпичникова, *Методика вычисления последующих приближений в асимптотическом пространственно-временном* (ПВ) *лучевом методе гауссовых пучков.* II. *(Изотропная неоднородная упругая среда).* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **179** (1989), 88–100.
6. Г. И. Петрашень, В. И. Кучер, Б. М. Каштан, *К вычислению составляющих 1-го приближения лучевого метода в случае изотропных произвольно-неоднородных упругих сред.* Препринт ЛОМИ Р-6-88. Л., 1988, 18 с.
7. Г. И. Петрашень, В. И. Кучер, Б. М. Каштан, *К вычислению примесных составляющих 1-го приближения лучевого метода в случае изотропных произвольно-неоднородных упругих сред.* II. Препринт ЛОМИ Р-11-88. Л., 1988, 16 с.
8. Ю. В. Рослов, Т. Б. Яновская, *Оценка вклада первого приближения в поле волн, отраженных от свободной поверхности.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, No. 27, Л., 1988, с. 117–133.
9. А. П. Киселев, Ю. В. Рослов, *Использование примесных компонент при численном моделировании аномалий поляризации объемных упругих волн.* — Геология и геофизика **No. 4** (1991), 121–131.
10. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, *Вычисление второго члена лучевого ряда в квазидвумерном случае.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 94–108.
11. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, И. Пшенчик, *Алгоритм вычисления второго члена лучевого ряда в неоднородной изотропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 73–93.
12. Н. Я. Кирпичникова, *О вычислении второго члена лучевого ряда для вектора продольных смещений в неоднородной изотропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **209** (1994), 25–43.
13. В. М. Бабич, *Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.* — Докл. АН СССР **110, No. 3** (1956), 355–357.
14. А. С. Алексеев, В. М. Бабич, Б. Я. Гельчинский, *Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, No. 5, Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1961, с. 3–24.

Kirpichnikova N. Ya. The second approximation of the ray method for calculation of the intensity of the wave front in isotropic nonhomogeneous elastic media.

This paper continues the series of the precedent papers devoted to elaboration of algorithms for calculation of the second and next terms of the ray series for the vector of longitudinal displacements in isotropic nonhomogeneous elastic media in the case of the dimension 2.5. This method is based on expansions of the amplitudes, the eikonal and the given task parameters into series with respect to coordinates transversal to the direction of propagation of the considered waves. The comparison of the methodses of computation of the correction terms of the ray expansios for the vector of longitudinal displacements is carried out.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 10 октября 1996 г.