С. Г. Киселев, В. М. Маркушевич

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН В ФОРМЕ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ

§1. Колебания рэлеевского типа

Основная задача представления уравнений рэлеевских волн в форме Штурма–Лиувилля состоит в нахождении метода для определения структуры упругого слоистого тела, используя спектральные параметры рэлеевских волн [1, 2]. Под спектральными параметрами рэлевских волн мы понимаем волновые числа и матричные амплитуды для каждой моды. Рассматриваемый набор упругих слоистых тел состоит из таких тел, с которыми может быть связана ортогональная, осесимметричная система координат (q, p, φ) таким образом, что граница тела определяется уравнением $q = \mathrm{const}$ и упругие параметры $\lambda(q)$, $\mu(q)$ и плотность $\rho(q)$ являются функциями только q. Мы предполагаем, что они достаточно гладкие. Таким примером является плоско-слоистое полупространство. Оно могло бы быть описано в цилиндрической системе координат с радиусом p и глубиной q. Граница $q = 0$ есть горизонтальная плоскость. Другой пример – слоистый шар. В сферической системе координат q – радиус, p – угол широты. Граница задается уравнением $q = R$.

Обозначим коэффициенты Ламе метрического тензора в криволинейной ортогональной системе координат функциями $U(q, p)$, $V(q, p)$, $W(q, p)$. Вследствие осевой симметрии, они не зависят от координаты φ.

Уравнение упругих колебаний утверждает, что внутренняя сила на единицу объема $\operatorname{div}\mathbf{T}$ равна плотности умноженной на ускорение $\ddot{\mathbf{w}}$

$$\rho\ddot{\mathbf{w}} = \operatorname{div}\mathbf{T}, \tag{1}$$

где $\mathbf{T}$ есть вектор напряжений, а $\mathbf{w}$ – вектор смещений.

В случае осесимметрической деформации уравнение разделяется на два независимых уравнения. Первое уравнение есть скалярное уравнение для компоненты смещения w_φ. Она описывает крутильные колебания. Второе есть векторное уравнение для вектора смещений (w_q, w_p), который принадлежит меридиальной плоскости (q, p), т.е. плоскости, проходящей через ось симметрии. Колебания этого вектора называются рэлеевскими колебаниями. Полное описание этих колебаний включает также следующие граничные условия: во-первых, на поверхности нормальная T_{qq} и тангенциальная T_{qp} компоненты полагаются равными нулю; во-вторых, смещения стремятся к нулю, когда q стремится к бесконечности, или если интервал изменения q конечен, то смещение ограничено, когда q стремится к нулю.

§2. Условия достаточные для разделения переменных

Сведение задачи к форме Штурма–Лиувилля начинается с разделения переменных. Переменные в сферической системе координат в первый раз были разделены в [3] посредством подстановки

$$w_q = u(q)P(p), \quad w_p = -\frac{1}{\xi}\, v(q)P'(p). \tag{2}$$

Затем, как обычно, все функции от q размещаются в левой части уравнения, а функции от p в правой части и обе части приравниваются постоянной разделения $-\xi^2$. Нам удалось разделить переменные только для нескольких координатных систем. Имеет место следующая теорема [4].

Теорема. *Рассмотрим ортогональную осесимметрическую координатную систему (q, p, φ) с коэффициентами Ламе $U(q, p)$, $V(q, p)$, $W(q, p)$ и упругими параметрами $\lambda(q)$, $\mu(q)$ и плотностью $\rho(q)$, которые являются гладкими функциями только координаты q. Предположим, что на коэффициенты Ламе накладываются ограничения:*

$$\partial U/\partial p = 0 \quad \text{и} \quad W = g(p)h(q). \tag{3}$$

Тогда в рэлеевских волновых уравнениях переменные разделяются.

Доказательство может быть получено с помощью прямой подстановки вышеприведенных условий в уравнения, хотя выкладки достаточно трудоемки.

§3. Координатные системы, отобранные на основании ограничений на коэффициенты Ламе

Накладывая дополнительные ограничения (3) на коэффициенты Ламе, чтобы разделить переменные в уравнениях, мы ограничиваем также набор координатных систем. Из классической задачи Ламе известно, что, если функци $U(q)$, $V(q,p)$ и $W(q,p) = g(p)h(q)$ являются коэффициентами Ламе координатной системе в евклидовом пространстве трех измерений, то они должны удовлетворять следующим соотношениям [5]:

$$\begin{gathered}(h'/U)' = 0, \quad (V_q/U)_q = 0,\\ (g'/V)_p h + h' g V_q/U^2 = 0, \quad h'g' = g' h V_q/V,\end{gathered} \tag{4}$$

где $()' \equiv d/dq$ или d/dp, $()_q \equiv \partial/\partial q$, $()_p \equiv \partial/\partial p$.

Эти соотношения могут быть проинтегрированы в замкнутом виде. После того как мы сравним полученные выражения с выражениями для известных координатных систем, мы найдем, что мы имеем дело только с пятью координатными системами (см. Таблицу 1). Это – три осесимметрические системы: сферическая и две цилиндрические (одна с $q \equiv z$, другая с $q \equiv r$) и две плоские координатные системы: декартова и полярная. Для двух из этих пяти систем, а именно, для полярной и сферической, рэлеевские колебания ведут себя как колебания в полуограниченной среде, только для периода много меньшего, чем полное время пробега вдоль границы. Для более длинного периода они проявляются как свободные колебания.

§4. Общий вид уравнений после разделения переменных

После разделения переменных мы получаем рэлеевские волновые уравнения для функций от q в виде [4]:

$$\begin{gathered}\left((\lambda+2\mu)u' + \lambda\frac{l+k}{q}\,u - \xi\lambda\frac{v}{V}\right)' + 2\mu\frac{l+k}{q}\left(u' - \frac{u}{q}\right) - \\ -\frac{\mu}{V}\xi\left(\left(v' - v\frac{k}{q}\right) + \xi\frac{u}{V}\right) + \xi\frac{k}{q}\,\frac{2\mu v}{V} + w^2\rho u = 0,\\ \left(\mu\left(v' - v\frac{k}{q} + \xi\frac{u}{V}\right)\right)' + \mu\frac{2k+l}{q}\left(v' - v\frac{k}{q} + \xi\frac{u}{V}\right) + \xi\frac{\lambda u'}{V} + \\ +\xi\left(\frac{(\lambda+2\mu)k}{Vq} + \frac{\lambda l}{Vq}\right)u - \frac{(\lambda+2\mu)}{V^2}\xi^2 v + kl\frac{2\mu}{V^2}\,v + w^2\rho v = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где константы k, l и V определяют одну из пяти координатных систем, помещенных в Таблице 1.

Таблица 1. Пять систем, где переменные разделяются

	Координатная система	k	l	V
1.	Сферическая (r)	1	1	q
2.	Цилиндрическая $I(z)$	0	1	1
3.	Цилиндрическая $II(r)$	0	0	1
4.	Декартова (z)	0	0	1
5.	Полярная (r)	1	0	q

Краевые условия имеют вид

$$\begin{gathered}\left[(\lambda+2\mu)u' + \lambda\frac{l+k}{q}\,u - \xi\lambda\frac{v}{V}\right]_{q=q_0} = 0,\\ \left[v' - v\frac{k}{q} + \xi\,\frac{u}{V}\right]_{q=q_0} = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$u, v \to 0$, когда $q \to \infty$ или u, v ограничены, когда $q \to 0$.

§5. Общее описание сведения уравнений к виду Штурма–Лиувилля

Для всех пяти координатных систем эти уравнения могут быть сведены к матричной форме Штурма–Лиувилля с помощью последовательности подстановок [6, 7]. Окончательно, мы будем иметь задачу Штурма–Лиувилля в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{F}'' - \xi^2\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{F},\\ [\mathbf{F}' + \theta\mathbf{F}]_{q=q_0} = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

$\mathbf{F} \to 0$, когда $q \to \infty$, или $\mathbf{F}$ ограничено, когда $q \to 0$.

Структура потенциала $\mathbf{A}$ одинакова во всех координатных системах. Именно, она имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}' - \mathbf{E}\det\mathbf{D}, \tag{8}$$

где $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – есть матрица Паули, $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица и $\mathbf{D}$ – некоторая симметричная матрица.

Матрица $\mathbf{D}$ варьируется в зависимости от координатной системы, но имеется много общих комбинаций в выражениях для ее элементов. Во всех координатных системах матрица $\mathbf{D}$ определяется двумя матрицами $\mathbf{G}$ и $\mathbf{S}$ следующим образом

$$\mathbf{D} = \mathbf{G}^T \mathbf{S} \mathbf{G}, \tag{9}$$

где $\mathbf{G}$ есть решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &= \mathbf{L}\mathbf{G}, \\ \mathbf{G}(0) &= \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{10}$$

Форма матриц $\mathbf{S}$ и $\mathbf{L}$ зависит от конкретной координатной системы. Например, для декартовой координатной системы они имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\mu_0(\lambda+2\mu)} \\ -\mu_0(\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} -\mu_0(\mu^{-1})'' - \omega^2\mu_0\rho\mu^{-2} & \mu'\mu^{-1} \\ \mu'\mu^{-1} & \frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\mu_0(\lambda+2\mu)} - \frac{\mu}{\mu_0} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

Сведение достигается серией подстановой. Они различны для каждой координатной системы, но имеют много общего. Первая подстановка для декартовой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/dq & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Идея этой подстановки была предложена в [8]. Эта подстановка есть аналог метода упругого потенциала, используемого для однородной среды и распространяет этот метод на слоистые среды. Как и в случае однородной среды, подстановка дает в результате отделение лапласиана каждой компоненты смещения. Вторая подстановка имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\mu_0(\mu^{-1})' \\ 0 & \mu_0\mu^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{G}\mathbf{F}, \tag{13}$$

где $\mathbf{G}$ есть упомянутое выше решение задачи Коши. В результате их применения в уравнении исключаются первые производные. Имеется и другая последовательность подстановок, которая преобразует уравнения к сопряженной форме

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}'' - \xi^2 \mathbf{H} = \mathbf{A}_1 \mathbf{H}, \\ &[\mathbf{H}' + \theta_1 \mathbf{H}]_{q=q_0} = 0, \\ &\mathbf{H} \to 0, \text{ когда } q \to \infty, \end{aligned} \tag{14}$$

или H ограничено, когда $q \to 0$. Здесь $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^T$, $\theta_1 = \theta^T$. Следовательно, потенциалы $\mathbf{A}$ и матрицы θ в граничных условиях обоих этих граничных задач являются взаимно транспонированными матрицами.

Таким образом, наши уравнения сохраняют до некоторой степени свойство быть самосопряженными. Мы можем перейти от прямой задачи Штурма–Лиувилля к сопряженной, используя более сложный путь, чем простое сопряжение, а именно, последовательно применяя описанные подстановки. Подобие нашей системы уравнений самосопряженной системе может быть использовано для определения Гильбертова пространства решений и для изучения общих спектральных свойств рэлеевских волн.

Литература

1. G. M. Henkin, V. M. Markushevich, *Inverse problems for the surface elastic waves in a layered half-space.* Supplement 19, Inverse Problems, Advances in Electronics and Electron Physics. Academic Press, Ltd., 1987, pp. 190–204.
2. V. M. Markushevich, *The determination of elastic parameters of a half-space using a monochromatic vibration field at the surface.* — Wave Motion **9** (1987), 37–49.
3. L. M. Hoskins, *The strain of a gravitating sphere of variable density and elasticity.* — Trans. Am. Math. Soc. (1920), 1–43.
4. С. Г. Киселев, В. М. Маркушевич, *О разделении переменных для рэлеевских колебаний слоистых сред.* — ДАН **332, No. 3** (1993).
5. А. И. Лурье, *Трехмерные задачи теории упругости.* М, (1955).
6. С. Г. Киселев, В. М. Маркушевич, *Рэлеевские колебания слоистых сред как матричная задача Штурма–Лиувилля.* — ДАН **335, No. 1** (1994).
7. С. Г. Киселев, В. М. Маркушевич, А. С. Цемахман, *Матричная задача Штурма–Лиувилля для волн Рэлея в цилиндрически однородных телах.* — Теодинамика и прогноз землятрясений (Вычислительная сейсмология). № 26 (1994), 168–176, М, Наука.
8. C. L. Pekeris, *An inverse boundary value problem in seismology.* — Physics **5** (1934), 307–316.

Kiselev S. G., Markushevich V. M. Representation of the Rayleigh wave equations in the Sturm–Liouville form.

The Rayleigh wave equations are represented in the Sturm–Liouville form by using the separation variable method and a series of substitutions.

Международный институт
теории прогноза землятресений
и математической геофизики
РАН, Москва

Поступило 10 октября 1993 г.