А. П. Киселев, М. В. Перель

О ПРИРОДЕ "КВАЗИФОТОНОВ"

В работе [1] описано построение частицеподобных асимптотических решений уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \qquad (1)$$

экспоненциально (а точнее, гауссовски) локализованных в окрестности точки, бегущей по лучу со скоростью c (скорость предполагается гладкой). Авторы [1] назвали такие решения "квазифотонами." Результаты [1] развивались потом разными авторами. Мы обсуждаем ниже, какое решение (1), в случае постоянной скорости c, может служить эталонным для конструкции, данной в [1].

1. Известно (см., например, [2]; впрочем, этот результат можно возвести еще к первому изданию книги [3], вышедшему в 1914 году), что если

$$\theta = \alpha + \frac{x^2 + y^2}{\beta - i\varepsilon}, \qquad (2)$$

где

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct, \quad \varepsilon = \mathrm{Const}, \qquad (3)$$

то выражение вида

$$u = \frac{1}{\beta - i\varepsilon} f(\theta) \qquad (4)$$

является для $c = \mathrm{const}$ решением волнового уравнения (1) при любой функции f. По распространенной сейчас терминологии [2] эти решения называются недиспергирующими волнами (nondispersive waves.)

Интересно, что фаза (2) удовлетворяет уравнению характеристик

$$\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 - \frac{1}{c^2} \theta_t^2 = 0,$$

или

$$\theta_x^2 + \theta_y^2 + 4\theta_\alpha \theta_\beta = 0, \qquad (5)$$

так, что решение (4), наряду с классическими плоскими и сферическими волнами, является исключительным случаем лучевого ряда [4], у которого все члены, кроме старшего, обращаются в нуль.

Везде в дальнейшем подразумевается, что $c = \mathrm{const}$. Для определенности положим константу ε положительной (у самого Бейтмена она равна нулю). Тогда

$$\operatorname{Re}(i\theta) = \frac{(x^2+y^2)\varepsilon}{(\beta^2+\varepsilon^2)} \leqslant 0. \tag{6}$$

Обсудим некоторые интересные возможности выбора функции f.

2. Если f – функция, аналитическая в верхней полуплоскости и гладкая на вещественной оси, за исключением начала координат, где она имеет сингулярность, то (4) есть решение (1) при всех x, y, z и t, с особенностью в точке, бегущей по оси z со скоростью c. Такие решения являются эталонными для конструкции, данной в [5] для волнового уравнения с переменной скоростью. (Решения с точечными сингулярностями, распространяющимися вдоль лучей, получены в [5] сложным путем с применением преобразования Фурье по времени).

3. Если положить, что

$$f(\theta) = \exp(ip\theta), \tag{7}$$

где $p \to \infty$ – большой параметр, то соответствующее решение (4) бежит вдоль опорного луча – оси z и, вследствие (6), гауссовски спадает вне его окрестности порядка $O(\frac{1}{\sqrt{p}})$. Очевидно, что

$$\exp(ip\theta) = \exp\left(-\varepsilon\frac{X^2+Y^2}{\beta^2+\varepsilon^2}\right)\exp i\left(A+\beta\frac{X^2+Y^2}{\beta^2+\varepsilon^2}\right), \tag{8}$$

где

$$A = p\alpha, \quad X = \sqrt{p}x, \quad Y = \sqrt{p}y.$$

Здесь X, Y, A – "быстрые" переменные, тогда как β – переменная "медленная."

Решение (4), (7) является эталонным для названного впоследствии "квазиструей" пучкообразного асимптотического решения (1) с переменной скоростью [6, 7]. Благодаря наличию в (7) большого параметра удается обобщить решение (4), (7) на случай переменных коэффициентов.

4. Перейдем к поиску эталонных решений для “квазифотона.” Решение, данное в [1] для переменной скорости, имеет в главном приближении вид

$$u = M \exp(i\Psi). \tag{9}$$

Для $c = \mathrm{const}$

$$\Psi = p\left\{a\left(\frac{z}{c} - t\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{\Gamma q}, \mathbf{q}) + (\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{q})\left(\frac{z}{c} - t\right) + \frac{1}{2}\Gamma_2\left(\frac{z}{c} - t\right)^2 + C_1\right\},$$

причем $\mathbf{q}$ – расстояние по нормали к опорному лучу, $\mathbf{\Gamma}$ – некоторая матрца 2×2, $\mathbf{\Gamma}_1$ – двумерный вектор, Γ_2 – скалярная константа, а C_1 – произвольная постоянная. Если опорный луч есть $x = y = 0$, так что $\mathbf{q}^2 = x^2 + y^2$, то легко найти, что

$$(\mathbf{\Gamma q}, \mathbf{q}) = \frac{x^2 + y^2}{ct - i\frac{\varepsilon}{2}}\,\frac{a}{c}, \quad \varepsilon = \frac{a}{c},$$

где a – произвольная положительная константа. Далее, $\mathbf{\Gamma}_1 = 0$ (это можно вывести, используя [8], из того, что $x = y = 0$ – луч) и $\Gamma_2 = b$, где b – произвольная постоянная с $\operatorname{Im} b > 0$,

$$\Psi = p\left\{\frac{a}{c}(z - ct) + \frac{a}{c}\,\frac{x^2 + y^2}{2ct - i\varepsilon} + \frac{b}{2c^2}(z - ct)^2 + C_1\right\}, \tag{10}$$

$$M = \frac{1}{(ct - i\frac{\varepsilon}{2})}.$$

Функция (9)–(10) гауссовски сосредоточена в окрестности центра “квазифотона” $\alpha = 0$, $x = y = 0$. Характерными переменными, определяющими скорость убывания решения, являются

$$\widetilde{A} = \sqrt{p}\alpha, \quad X = \sqrt{p}x, \quad Y = \sqrt{p}y.$$

При $\widetilde{A} \sim 1$ получим

$$\frac{1}{2ct - i\varepsilon} = \frac{1}{\beta - i\varepsilon}\left(1 + O\left(\frac{\widetilde{A}}{\sqrt{p}}\right)\right).$$

Если также $X^2 = px^2 \sim 1$, $Y^2 = py^2 \sim 1$, то выбирая $C_1 = \frac{a^2}{2b}$, для фазы Ψ имеем

$$\Psi = p\left\{\frac{b}{2c^2}\left(\theta + \frac{ac}{b}\right)^2 + O\left(\frac{(X^2+Y^2)\widetilde{A}}{\sqrt{p}}\right) + O\left(\frac{(X^2+Y^2)^2}{p}\right)\right\}, \tag{11}$$

а амплитуду M можно записать, с точностью до постоянного множителя, в виде:

$$M = \frac{1}{\beta - i\varepsilon}\left(1 + O\left(\frac{\widetilde{A}}{\sqrt{p}}\right)\right).$$

Таким образом, функция (4) при

$$f(\theta) = \exp\left(ip\frac{b}{2c^2}\left(\theta + \frac{ac}{b}\right)^2\right), \quad \frac{ac}{b} = \text{const}, \tag{12}$$

с точностью до членов $O((X^2+Y^2)\widetilde{A}p^{-1/2}) + O((X^2+Y^2)^2p^{-1})$ совпадает с “квазифотоном” (9)–(11).

5. Рассмотрим вопрос о сосредоточенности решения (4), (12) с учетом отброшенных при переходе от (11) к (12) членов, играющих роль на больших расстояниях. Примем, что b чисто мнимо и обозначим

$$h = \frac{x^2+y^2}{\beta^2+\varepsilon^2}, \ \ \frac{ac}{b} = -i\gamma, \quad \gamma > 0,$$

так что

$$\theta + \frac{ac}{b} = \alpha + \beta h + i(\varepsilon h - \gamma).$$

Сосредоточенность (12) равносильна положительности

$$\mathrm{Re}(\theta - i\gamma)^2 = (\alpha + \beta h)^2 - (\varepsilon h - \gamma)^2, \tag{13}$$

Фиксируем β. Первое слагаемое в правой части (13) обращается в нуль на параболоиде $\beta(x^2+y^2) = -\alpha(\beta^2+\varepsilon^2)$. При этом второе слагаемое растет с ростом x^2+y^2.

Таким образом, сосредоточенности на достаточно больших пространственно-временных расстояниях от центра пучка нет, см. Рис. 1.

6. Однако, с той же точностью, что и (12), можно написать

$$f(\theta) = \exp\left(ip\sqrt{D(\theta+E)} + F\right), \tag{14}$$

где D, E и F константы,

$$D = 4\frac{a^2}{c^2}E, \quad E = -\frac{ac}{2b}, \quad F = \frac{3a^2}{2b}.$$

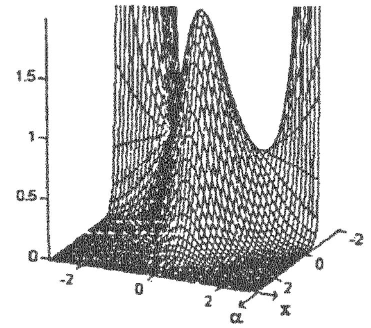

Рис. 1. Модуль решения (4), (12) при $\beta = 1$, $y = 0$, $b = i$, $a = c = 1$, $p = 2$. Вблизи $x = 0$, $\alpha = z - ct = 0$ оно описывается формулами Бабича–Улина (9), (10). Однако при больших x и больших отрицательных α оно экспоненциально растет.

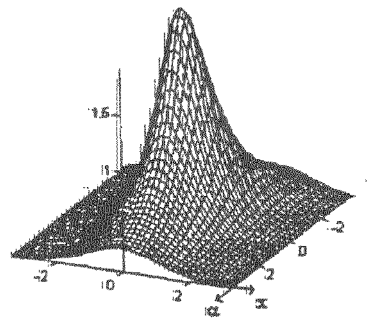

Рис. 2. Модуль решения (4), (14) при тех же параметрах. Вблизи $x = 0$, $\alpha = z - ct = 0$ оно описывается формулами Бабича–Улина (9), (10). При больших x, y и α оно экспоненциально спадает и является эталонным для “квазифотона”.

Поскольку $\mathrm{Im}\, b > 0$ и $\theta + E$ лежит в верхней полуплоскости, а $D(\theta + E)$ – в левой полуплоскости, то, проводя разрез по положительной полуоси, получим

$$\operatorname{Re}\left(ip(\sqrt{D(\theta+E)})\right) < 0.$$

Таким образом, функция (4), (14) является сосредоточенной, см. Рис. 2, и может считаться эталонным решением для "квазифотона."

7. Авторы признательны В. М. Бабичу за интересное обсуждение.

Работа поддержана грантом ИНТАС–РФФИ 95-0012.

Литература

1. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и "квазифотоны".* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 5–11.
2. P. Hillion, *Nonhomogeneous nondispersive waves: classification.* — Wave Motion **16** (1992), 81–87.
3. Г. Бейтмен, *Математическая теория распространения электромагнитных волн.* М., ГИФ–МЛ, (1958).
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны.* Л., ЛГУ, (1985).
5. В. М Бабич, Т. Ф. Панкратова, *О разрывах функции Грина смешанной задачи для волнового уравнения.* Проблемы математической физики, Л., ЛГУ, 1973, 9–27.
6. А. П. Киселев, *Модулированные гауссовы пучки.* — Изв. высш. учебн. завед. Радиофизика **6, No. 5** (1983), 1014–1020.
7. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, *Отражение пространственно-временных лучевых амплитуд от движущейся границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **128** (1983), 72–89.
8. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М., (1972).

Kiselev A. P., Perel M. V. On the nature of "quasiphotons."

A discussion is given of what could serve as reference solutions for particle-like asymptotic solutions of wave equation presented earlier by V. M. Babich and V. V. Ulin.

Институт проблем
машиноведения РАН

Поступило 19 декабря 1996 г.

С.-Петербургский
государственный университет