В. Д. Лукьянов

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА В ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ ПОРШНЕВЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассматривается возбуждение поршневым излучателем нормальных волн в акустическом волноводе. Волновод заполнен идеальной сжимаемой жидкостью. Комплексная амплитуда $P(x,y)$ акустического давления волновода удовлетворяет в области $-\infty < x < +\infty$, $-H < y < H$, кроме отрезка $x = 0$, $-H/2 < y < H/2$, однородному уравнению Гельмгольца. Боковые стенки волновода, расположенные вдоль прямых $y = \pm H$ – абсолютно мягкие, что приводит к однородному граничному условию Дирихле для акустического давления $P(x, \pm H) = 0$.

Поршневой излучатель размещен на отрезке $x = 0$, $-H/2 < y < H/2$. Колебания в среде возбуждаются гармонической во времени силой с амплитудой F, действующей на поршневой излучатель. Излучатель имеет массу M и упруго связан со стенками волновода, жесткость связи N. Уравнение движения поршня с учетом контакта с акустической средой имеет вид

$$[N - M\omega^2]U = \int\limits_{-H/2}^{H/2} (P(-0,y) - P(+0,y))dy + F,$$

где U – амплитуда смещения излучателя от положения равновесия, ω – круговая частота. Множитель $\exp(-i\omega t)$, задающий гармоническую зависимость волновых и колебательных процессов от времени t, всюду опущен.

Акустическое давление в волноводе удовлетворяет принципу предельного поглощения. В окрестности концов излучателя выполняется условие Майкснера.

С учетом симметрий задачи решение ищем только в области $x > 0$ и $0 < y < H$, добавив вдоль луча $0 < x < \infty$, $y = 0$ граничное условие $\frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) = 0$ при $x > 0$, которое следует из четности функции $P(x,y)$ по переменной y. На отрезке $x=0$, $H/2<y<H$ появится условие $P(0,y)=0$, следующее из требования нечетности акустического поля по переменной x.

Акустическое давление $P(x,y)$ в верхней половине волновода ищем в виде разложений по плоским волнам:

$$P(x,y)=\frac{a}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_1(\lambda)\mathrm{ch}\,(\gamma y)e^{i\lambda x}\,d\lambda+aue^{ikx}, \tag{1}$$
$$\text{при}\quad x>0,\quad 0\leqslant y\leqslant H/2$$

$$P(x,y)=\frac{a}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_2(\lambda)\frac{\mathrm{sh}\,(\gamma(H-y))}{\gamma}e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{2}$$
$$\text{при}\quad x>0\quad\text{и}\quad H/2\leqslant y\leqslant H;$$

Здесь $\gamma=\sqrt{\lambda^2-k^2}$, где k – волновое число, $k=\omega/c$, c – скорость звука в акустической среде, a – величина эквивалетного давления, оказываемого на излучатель силой F, $a=F/H$. Искомыми величинами в представлении (1) и (2) являются функции $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$ и величина u. Если потребовать равенства $U=\frac{au}{-i\omega\rho c}$ и наложить условие четности на функцию $p_1(\lambda)$, то автоматически выполнено условие непрерывности смещения излучателя и нормальной составляющей вектора смещения жидкости вблизи него: $\rho\omega^2U=\frac{\partial P}{\partial x}(0,y)$ при $-H/2\leqslant y\leqslant H/2$, где ρ – плотность акустической среды. Нечетность функции $p_2(\lambda)$ обеспечивает акустическому давлению удовлетворение однородному условию Дирихле при $x=0$, $H/2<y<H$.

Из условий непрерывности вдоль луча $0<x<+\infty$, $y=H/2$ акустического давления и составляющей вектора смещения жидкости получим интегральные уравнения при $x>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(p_1(\lambda)\mathrm{ch}\,(\gamma y/2)-p_2(\lambda)\frac{\mathrm{sh}\,(\gamma y/2)}{\gamma}\right)e^{i\lambda x}d\lambda+ue^{ikx}=0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(p_1(\lambda)\gamma\mathrm{sh}\,(\gamma y/2)+p_2(\lambda)\mathrm{ch}\,(\gamma y/2)\right)e^{i\lambda x}d\lambda=0.$$

На основании теоремы Винера–Пели из этих уравнений заключаем, что $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{P}(\lambda)+\mathbf{f}(\lambda)=\mathbf{F}_+(\lambda)$, где $\mathbf{A}(\lambda)=\mathrm{ch}\left(\frac{\gamma H}{2}\right)\mathbf{I}+$

$\frac{1}{\gamma}\mathrm{ch}\,\left(\frac{\gamma H}{2}\right)\mathbf{C}$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица второго порядка, $\mathbf{C}$ – матрица второго порядка с элементами $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = -1$, $c_{21} = \gamma^2$, $\mathbf{F}_+(\lambda) = [F_1^+(\lambda), F_2^+(\lambda)]^T$ – вектор-функция аналитическая в верхней полуплоскости комплексной переменной λ, $\mathbf{f}(\lambda) = \frac{ua}{\lambda - k}[1,0]^T$, T – означает транспонирование матрицы.

С учетом четности функции $p_1(\lambda)$ и нечетности $p_2(\lambda)$ приходим к матричной задаче Римана $\mathbf{F}_+(\lambda) = \mathbf{G}(\lambda)\mathbf{Q}\mathbf{F}_+(-\lambda) + \mathbf{g}(\lambda)$ для аналитических вектор-функций $\mathbf{F}(\pm\lambda)$ с матрицей $\mathbf{G}(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,(\gamma H)}\mathbf{I} + \frac{\mathrm{th}(\gamma H)}{\gamma}\mathbf{C}$, $\mathbf{g}(\lambda) = \mathbf{f}(\lambda) - \mathbf{G}(\lambda)\mathbf{Q}\mathbf{f}(-\lambda)$.

Матрица $\mathbf{G}(\lambda)$ допускает каноническую коммутативную факторизацию $\mathbf{G}(\lambda) = \mathbf{G}_+(\lambda)\mathbf{G}_-^{-1}(\lambda) = \mathbf{G}_-^{-1}(\lambda)\mathbf{G}_+(\lambda)$ [1], где $\mathbf{G}_-(\lambda) = \mathbf{G}_+^{-1}(-\lambda)$,

$$\mathbf{G}_+ = \begin{bmatrix} \cos(\gamma\Omega_+) & -\sin(\gamma\Omega_+)/\gamma \\ \gamma\sin(\gamma\omega_+) & \cos(\gamma\Omega_+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\exp(i\gamma\Omega_+(\lambda)) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\beta_{2n-1}^{(2)}(\lambda)}{1+\beta_{2n-1}^{(1)}(\lambda)}\right) \left(\frac{1+\beta_{2n}^{(1)}(\lambda)}{1+\beta_{2n}^{(2)}(\lambda)}\right),$$

$$\beta_n^{(s)}(\lambda) = \frac{\lambda + (-1)^s\gamma}{\lambda_n + \gamma_n},\ s = 1, 2,$$

$\gamma_n = -i\pi(2n-1)/(2H)$, $\lambda_n = \gamma(\gamma_n)$, β – константа.

Используя стандартную методику решения неоднородной задачи Римана [2] будем иметь

$$\mathbf{F}_+(\lambda) = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_+^{-1}(k))\mathbf{f}(\lambda) - \mathbf{G}_+(\lambda)\mathbf{G}_-^{-1}(-k)\mathbf{Q}\mathbf{f}(-\lambda)$$

и

$$\mathbf{P}(\lambda) = -\mathbf{A}^{-1}(\lambda)\mathbf{G}_+(\lambda)(\mathbf{G}_+^{-1}(k))\mathbf{f}(\lambda) - \mathbf{G}_-^{-1}(-k)\mathbf{Q}\mathbf{f}(-\lambda)).$$

В результате всех вычислений получим представление для акустического давления $P(x,y)$ в виде разложения по нормальным волнам волновода $P(x,y) = au\ \ \mathrm{sign}\,(x)\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos[\pi(2n-1)/(2H)y]\exp(i\lambda_n x)$, где a_n – амплитуда n-й номальной волны,

$$a_n = \frac{4k(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)\lambda_n}\times$$
$$\times\left(\mathrm{ch}\,\left(\frac{\gamma_n H}{2}\right)\cos(\gamma_n\Omega_+(\lambda_n)) + \mathrm{sh}\,\left(\frac{\gamma_n H}{2}\right)\sin[\gamma_n\Omega_+(\lambda_n))\right).$$

Из уравнения движения излучателя будем иметь последнее соотношение для определения величины u

$$\frac{N - M\omega^2}{-i\omega\rho c}\, u = -2u \int\limits_{-H/2}^{H/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi(2n-1)/(2H)y)dy + H.$$

Из этого уравнения найдем, что $u = \frac{\rho c}{Z}$, где Z – входной импеданс поршневого излучателя в волноводе, $Z = Z_* + \sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$, Z_* – импеданс излучателя в вакууме, $Z_* = -i\omega\rho_0(1 - \omega_0^2/\omega^2)$, ω_0 – его собственная частота в вакууме, $\omega_0 = \sqrt{N/M}$, ρ_0 – поверхностная плотность излучателя, $\rho_0 = M/(H)$, Z_n – импеданс взаимодействия между излучателем и n-й нормальной волной в волноводе, $Z_n = \frac{4\rho c a_n}{\gamma_n H} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{4}\right)$.

Литература

1. В. Д. Лукьянов, Г. Л. Никитин, *О рассеянии электромагнитных волн в плоском волноводе с двухсторонней диафрагмой.* — Ж. техн. физ. **54, No.5** (1984), 865–871.
2. Н. И. Мусхелешвили, *Сингулярные интегральные уравнения.* М, Наука, 1973.

Luk'yanov V. D. The application of the matrix Riemann problem to the investigation of normal waves excitation in an acoustic waveguide by a piston radiator.

Stationary excitation of normal waves in a flat acoustic waveguide with absolutely soft lateral walls by a piston radiator is investigated. The massive radiator located in a center of the waveguide is supported by anelastic spring. Exact analytical solution is obtained for the case, when the radiator length is equal to one-half width of the waveguide. The solution of this problem is reduced to the matrix Riemann problem. The matrix of the Riemann problem admits effective factorization by quadratures. The representation of the acoustic field in the waveguide in the form of the normal waves expansion is given. The normal wave amplitudes and the acoustic fields excited in the waveguide by the radiator are studied analytically.

Военный инженерный
строительный институт

Поступило 2 октября 1996 г.