В. М. Маркушевич

К РАССЕЯНИЮ НА МАТРИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ С СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Задача рассеяния для матричного оператора Шредингера [1, 2]

$$LY(x,k) = -k^2 Y(x,k), \tag{1}$$

$$L = \frac{\delta^2}{\delta x^2} E - A(x), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $Y(x,k)$ есть решение с матрицей 2×2, рассматривается обычно в предположении, что

$$A(x) = A^*(x),$$

т.е. потенциал $A(x)$ – эрмитов. Предположение используется для введения вронскиана. Однако, имеется множество несимметричных потенциалов, которые эквивалентны множеству вещественных симметричных потенциалов и позволяют также ввести вронскиан. Мы опишем это множество в статье.

1. В (1) и (2) мы полагаем

$$A(x) = C\dot{D}(x) - \det DE = C\dot{D}(x) + (CD)^2, \tag{3}$$

где $D(x)$ есть вещественная симметричная матричная функция,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \dot{()} \equiv \frac{d}{dx}.$$

Запишем (1) в виде

$$\ddot{F}(x,k) + k^2 F(x,k) = A(x)F(x,k) \tag{1'}$$

и вместе с этим рассмотрим следующее уравнение

$$\ddot{H}(x,k) + k^2 H(x,k) = A(x)^T H(x,k), \tag{4}$$

где

$$A^T = \dot{D}C^T - \det DE = C(C\dot{D}C) - \det DE, \tag{5}$$

а T означает транспонирование.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Матричные решения $F(x,k)$ и $H(x,k)$ связаны следующими уравнениями*

$$kF(x,k) = (CDC)H(x,k) + C\dot{H}(x,k) \tag{6}$$

и

$$kH(x,k) = DF(x,k) + C\dot{F}(x,k). \tag{7}$$

Доказательство. Продифференцируем (7) по x

$$k\dot{H}(x,k) = \dot{D}F + D\dot{F} + C\ddot{F}(x,k) \tag{8}$$

и подставим (7) и (8) в (6). Тогда имеем

$$k^2F(x,k) = CDCD\,F - CD\dot{F} + C\dot{D}F + CD\dot{F} - \ddot{F},$$

или

$$\ddot{F} + k^2F = AF,$$

так как

$$(CD)^2 = -\det DE$$

для произвольной вещественной симметричной матрицы.

Подобное рассмотрение доказывает, что (7) преобразуется в (4) после того, как (6) и его производная подставляются в это выражение.

2. Уравнения (6) и (7) позволяют нам определить вронскиан $(1')$ или (4).

Рассмотрим выражение сопряженное выражению (4)

$$\ddot{H}^*(x,k) + \overset{*}{k}{}^2\overset{*}{H}(x,k) = \overset{*}{H}(x,k)A(x). \tag{10}$$

Умножим $(1')$ на $\overset{*}{H}$ слева и (10) на F справа; затем вычтем последнее из первого. Мы имеем

$$\overset{*}{H}\ddot{F} - \ddot{H}^*F + (k^2 - \overset{*}{k}{}^2)\overset{*}{H}F = 0. \tag{11}$$

Интегрируя (11), мы найдем

$$\overset{*}{H}\dot{F} - \dot{H}^*F + (k^2 - \overset{*}{k}{}^2)\int_{-\infty}^{x} \overset{*}{H}F\,dt = \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

Из (12) мы заключаем, что для вещественного k вронскиан не зависит от x

$$W(H,F) = \overset{*}{\dot{H}} F - \dot{H}^* F = \text{const},$$

как в случае симметричных потенциалов. Однако, рассматриваемый случай существенно отличается от случая симметричных потенциалов, так как, в общем, имеется некоторая вероятность существования связанных состояний, соответствующих комплексным значениях k^2. Другими словами, мы должны учесть, что условие

$$W(H,F)\big|_{x=-\infty} = W(H,F)\big|_{x=+\infty} \tag{13}$$

может иметь место для тех комплексных k, которые удовлетворяют соотношению

$$N = k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{*}{H} F\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\overset{*}{F} D F - \dot{F}^* C F) dt = 0. \tag{14}$$

Эта величина есть норма собственной функции для должным образом определенного гильбертова пространства. Строгое определение гильбертова пространства подразумевает, что $N > 0$. Интересно решить следующую задачу: какие ограничения, наложенные на матричную функцию D, являются необходимыми и достаточными, чтобы N было положительно?

Точка $k = 0$ есть особенная точка. В этом случае $(1')$ может быть сведен [3] к

$$\dot{F} = CDF. \tag{15}$$

Следовательно, если $D(x) \to D_\infty > 0$ при $x \to \pm\infty$, то точка $k = 0$ принадлежит к непрерывному спектру задачи на оси. Из (15) следует, что при $k = 0$

$$N = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\overset{*}{F} D F - \dot{F}^* C F) dt = 0,$$

так как подынтегральное выражение тождественно равно нулю.

3. Найдем значение вронскиана для вещественных k. Для этого перепишем (12) в терминах решения $F(x)$ из (1).

Из (7) для вещественных величин k следует, что

$$k\overset{*}{H}(x,k) = \overset{*}{F}D + \dot{F}^*C^T = \overset{*}{F}D - \dot{F}^*C. \tag{16}$$

Из (6) мы найдем

$$\dot{H} = -kCF - DCH$$

и

$$\dot{H}^* = k\overset{*}{F}C + \overset{*}{H}CD. \tag{17}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} kW &= k\overset{*}{H}\dot{F} - k\dot{H}^*F = (\overset{*}{F}D - \dot{F}^*C)\dot{F} - (k^2\overset{*}{F}C + k\overset{*}{H}CD)F = \\ &= \overset{*}{F}D\dot{F} - \dot{F}^*C\dot{F} - k^2\overset{*}{F}CF - (\overset{*}{F}D - \dot{F}^*C)CDF = \\ &= \overset{*}{F}D\dot{F} - \dot{F}^*DF - \overset{*}{F}DCDF - \dot{F}^*C\dot{F} - k^2\overset{*}{F}CF. \end{aligned} \tag{18}$$

Предположим, что

$$D(x) \to D_\infty, \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty.$$

Если

$$F(x) \to Ee^{i\zeta x}, \quad \zeta^2 = k^2 + \det D_\infty, \tag{19}$$

то мы имеем

$$kW = 2i\zeta D_\infty, \tag{20}$$

принимая во внимание (9).

Подобным образом мы можем выразить вронскиан через решение $H(x)$ уравнения (4):

$$kW = \overset{*}{H}CDC\dot{H} - \dot{H}^*CDCH - (k^2 + \det D)\overset{*}{H}CH - \dot{H}^*C\dot{H}. \tag{21}$$

Однако, решения $H(x)$ и $F(x)$ взаимосвязаны соотношениями (6) и (7). Это означает, в частности, что асимптотика (19) для $F(x)$ определяет асимптотическое поведение $H(x)$.

4. Предположим теперь, что (14) имеет место для комплексного k. Найдем асимптотическое значение вронскиана, когда $x \to \pm\infty$.

Сопряженное (7) есть выражение

$$\overset{*}{k}\overset{*}{H} = \overset{*}{F}D - \dot{F}^*C, \tag{22}$$

которое совпадает с (16), когда k – вещественно. Принимая во внимание (17), мы получаем

$$\begin{aligned}\overset{*}{k}\dot{H}^* &= \overset{*}{k}(\overset{*}{k}\overset{*}{F}C + \overset{*}{H}CD) = \overset{*}{k}{}^2\overset{*}{F}C + (\overset{*}{F}D - \dot{F}^*C)CD = \\ &= \dot{F}^*D + (\overset{*}{k}{}^2 - \det D)\overset{*}{F}C.\end{aligned} \tag{23}$$

Кроме того

$$J = \int\limits_{-\infty}^{x} \dot{F}^*CF\,dt = \dot{F}^*CF\big|_{-\infty}^{x} - \int\limits_{-\infty}^{x} \overset{*}{F}C\dot{F}\,dt = \overset{*}{F}(x)CF(x) + \overset{*}{J}$$

и, следовательно,

$$J - \overset{*}{J} = \overset{*}{F}(x)CF(x). \tag{24}$$

Отсюда,

$$\begin{aligned}\overset{*}{k}W &= \overset{*}{k}\overset{*}{H}\dot{F} - \overset{*}{k}\dot{H}^*F + (k^2 - \overset{*}{k}{}^2)\int\limits_{-\infty}^{x} \overset{*}{k}H\overset{*}{F}dt = \\ &= (\overset{*}{F}D - \dot{F}^*C)\dot{F} - (\dot{F}^*D + (\overset{*}{k}{}^2 - \det D)\overset{*}{F}C)F + \\ &+ (k^2 - \overset{*}{k}{}^2)\int\limits_{-\infty}^{x}(\overset{*}{F}DF - \dot{F}^*CF)dt = \\ &= (\overset{*}{F}D\dot{F}^* - \dot{F}^*DF) - \dot{F}^*C\dot{F} - (\overset{*}{k}{}^2 - \det D)\overset{*}{F}CF + \\ &+ (k^2 - \overset{*}{k}{}^2)\int\limits_{-\infty}^{x}\overset{*}{F}DF dt - (k^2 - \overset{*}{k}{}^2)\int\limits_{-\infty}^{x}\dot{F}^*CF\,dt.\end{aligned}$$

Последний интеграл может быть записан как

$$J = \int\limits_{-\infty}^{x} \dot{F}^*CF\,dt = \frac{J - \overset{*}{J}}{2} + \frac{J + \overset{*}{J}}{2}.$$

Затем, используя (24), мы имеем

$$\overset{*}{k}W = (\overset{*}{F}D\dot{F} - \dot{F}^*DF) - \dot{F}^*C\dot{F} + \overset{*}{F}CF\det D+$$
$$+(k^2 - \overset{*}{k}{}^2)\int\limits_{-\infty}^{x}\overset{*}{F}DF\,dt - \frac{k^2 - \overset{*}{k}{}^2}{2}\overset{*}{F}CF-$$
$$-\frac{(k^2 + \overset{*}{k}{}^2)}{2}\int\limits_{-\infty}^{x}(\dot{F}^*CF - \overset{*}{F}C\dot{F})dt = \mathrm{const}\,.$$

Предположим, что (19) справедливо, когда $x \to \pm\infty$. Так как из (14) следует

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\overset{*}{F}DF - \dot{F}^*CF)dt = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\overset{*}{F}DF + \overset{*}{F}C\dot{F})dt = 0,$$

мы получаем, что

$$\overset{*}{k}W \to 2i\zeta D_\infty, \quad \text{когда} \quad x \to \pm\infty.$$

5. Рассматриваемая задача, в противоположность задачам с эрмитовскими потенциалами, в общем, может иметь связанные состояния с комплексным k. Интересно понять, что за ограничения должны быть наложены на матрицу D, чтобы обеспечить чисто вещественный спектр этой задачи. Другой важный вопрос состоит в том, имеются ли нелинейные эволюционные уравнения, разрешимые с помощью спектрального преобразования, использующего эту задачу Штурма–Лиувилля. Трехволновое взаимодействие в нелинейной оптике [4, глава III] связано с похожими, но не точно такими же потенциалами.

Литература

1. M. Wadati, *Generalized matrix form of the inverse scattering method. Solitons.* New York, Edited by R. K. Bullough and P. J. Cadrey. Heidelberg, 1980.
2. F. Calogero, A. Degasperis, *Nonlinear evolution equations integrable by the inverse spectral transform associated with the matrix Schrodinger equation.* Ibid.
3. V. M. Markushevich, G. M. Steblov, A. S. Tsemahman, *Symplectic structure of the Sturm-Liouville problem for the Rayleigh surface waves.* — Wave Motion **18** (1993), 243–253.

4. С. П. Новиков (ред.), *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* Гл.ред. физ.-мат.лит., — Сборник под редакцией С. П. Новикова (1980), 320, Москва, Наука.

Markushevich V. M. On the scattering by a matrix potential with a symplectic structure.

In the paper the scattering problem for matrix Shroedinger operator with a non-Hermitian potential is considered. It is shown that there exists a set of nonsymmetric potentials which allows to introduce the Wronskian. For a real k the Wronskian is obtained. For a complex k the asymptotic value of Wronskian is found as $x \to \pm\infty$.

Международный институт
теории прогноза землятресений
и математической геофизики
РАН, Москва

Поступило 10 октября 1993 г.