Л. А. Молотков, А. В. Бакулин

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ СЛОИСТЫХ СРЕД, СОДЕРЖАЩИХ ПОРИСТЫЕ СЛОИ БИО

В настоящее время в связи с развитием сейсмических методов разведки, теории распространения сейсмических волн и электронно-вычислительной техники проявился большой интерес к распространению волн в пористых и трещиноватых средах. Исследование волновых процессов в этих средах проводится в основном с помощью двухфазной модели Био [1, 2]. Быстрое развитие теории этих процессов позволило теперь рассматривать довольно сложные слоистые структуры, содержащие как пористые слои, так и упругие или жидкие слои. В предлагаемой работе строятся и исследуются эффективные модели слоистых периодических сред, в которых чередуются: 1) два слоя Био, 2) слой Био с упругим слоем и 3) слой Био с жидким слоем.

Хотя такие периодические структуры редко встречаются в природе, однако рассмотрение этих структур представляет большой интерес при исследовании волн в пористых средах с неоднородностями и включениями различных видов. Поскольку для указанных сред в общем случае невозможно построить волновые поля, исследование этих сред можно проводить только на основании эффективных моделей. Эти эффективные модели могут быть построены в случаях, когда существуют сравнительно простые выражения для волнового поля, и такими случаями, в частности, являются случаи слоистых периодических структур.

Метод, применяемый для вывода уравнений эффективных моделей, был предложен в 1979 году [3] и назван методом матричного осреднения, так как использует точные решения, записанные с помощью матричного метода. Методом матричного осреднения уже построены эффективные модели для упругих, жидких и упруго-жидких слоистых сред с учетом анизотропии [4, 5], вязкости [6, 7], последействия [6] и сложных линейных контактов на границах [8]. Метод матричного осреднения при выводах новых эффективных моделей развивался и усовершенствовался, что привело к созданию его упрощенного варианта [9]. При этом варианте уравнения эффективной модели получаются простыми формальными операциями, которые легко обосновываются при использовании точных решений уравнений, описывающих заданную периодическую среду. Этот упрощенный вариант метода используется в настоящей работе.

В результате проводимых осреднений эффективная модель оказывается в некоторых случаях несколько более сложной чем среда Био, и такая среда названа обобщенной трансверсально-изотропной моделью Био. Усложнение модели относится только к уравнениям сплошной среды и связано с тем, что в таких моделях необходимо также учитывать и анизотропию жидкой фазы. В заключение отметим, что слоистые периодические среды Био уже рассматривались в работах [10–12], где проводились некоторые осреднения параметров, однако эффективные модели с описывающими их дифференциальными уравнениями не были установлены в этих работах.

§1. Среда Био

Пусть задана слоистая периодическая среда $0 \leqslant z \leqslant H$, содержащая n периодов толщиной $h = H/n$. Каждый период состоит из двух однородных слоев 1 и 2, имеющих толщины $h_1 = \theta_1 h$ и $h_2 = \theta_2 h$ (Рис. 1). В первом рассматриваемом случае оба слоя описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= P\frac{\partial u_x}{\partial x} + F\frac{\partial u_z}{\partial z} + M\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz} &= F\frac{\partial u_x}{\partial x} + C\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
-p &= M\frac{\partial u_x}{\partial x} + Q\frac{\partial u_z}{\partial z} + R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{xz} &= L\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);
\end{aligned} \tag{1.1}$$

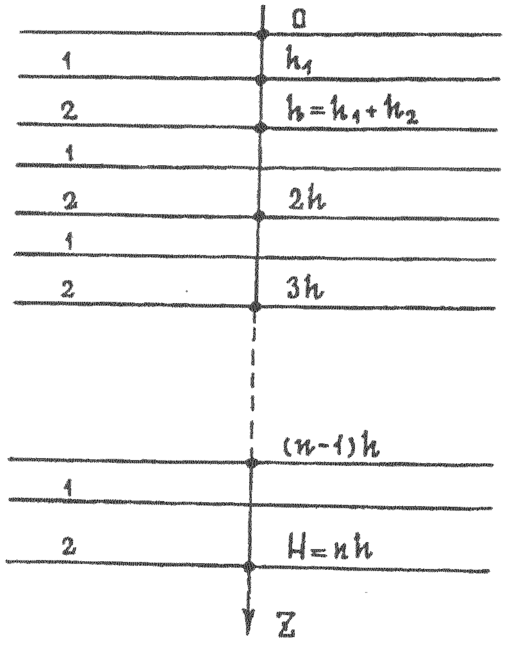

Рис. 1.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}&=\bar\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+\rho_f\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p}{\partial x}&=\rho_f\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}+m_x\frac{\partial^2w_x}{\partial t^2},\\
\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}&=\bar\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+\rho_f\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p}{\partial z}&=\rho_f\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}+m_z\frac{\partial^2w_z}{\partial t^2}
\end{aligned}\tag{1.2}$$

трансверсально-изотропной среды Био. Равенства (1.1) определяют закон Гука, а соотношения (1.2) являются уравнениями сплошной среды. Уравнения (1.1) и (1.2) характеризуются 11 параметрами: 7 модулями и 4 величинами с размерностью плотности, при этом ρ_f – плотность жидкой фазы, а остальные параметры представляются формулами

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \rho_f f + \rho_s(1-f), \\ m_i &= \rho_f \alpha_i / f \ (i = x, z), \end{aligned} \tag{1.3}$$

в которых ρ_s – плотность упругой фазы и α_x, α_z – извилистости пор в направлениях осей x и z ($\alpha_i \geqslant 1$). Среда Био определяется также дополнительным параметром, пористостью f. Для перехода к изотропной среде Био достаточно учесть равенства $P = C$, $M = Q$, $m_x = m_z$.

Напряжения τ_{xx}, τ_{zz} и τ_{xz} являются суммарными напряжениями и выражаются формулами

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \sigma_{xx}^{(2)} - pf, \\ \tau_{zz} &= \sigma_{zz}^{(2)} - pf, \\ \tau_{xz} &= \sigma_{xz}^{(2)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

через напряжения $\sigma_{xx}^{(2)}$, $\sigma_{zz}^{(2)}$, $\sigma_{xz}^{(2)}$ упругой фазы и давления p в жидкой фазе. Смещения u_x, u_z, w_x и w_z представляются соотношениями

$$\begin{aligned} &u_x = u_x^{(2)}, \quad u_z = u_z^{(2)}, \\ &w_x = f(u_x^{(1)} - u_x^{(2)}), \quad w_z = f(u_z^{(1)} - u_z^{(2)}), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $u_x^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ и $u_x^{(2)}$, $u_z^{(2)}$ – смещения в жидкой и упругой фазах соответственно.

Наличие двух фаз в среде Био связано с тем, что в малой окрестности каждой точки этой среды существует как жидкая, так и упругая среда. Смещения $u_x^{(1)}$, $u_z^{(1)}$ и давление p являются осредненными по жидкой среде, расположенной в малой окрестности рассматриваемой точки. Аналогично смещения $u_x^{(2)}$ и $u_z^{(2)}$ получаются в результате осреднения по упругой среде в малой окрестности. Напряжения $\sigma_{xx}^{(2)}$, $\sigma_{zz}^{(2)}$ и $\sigma_{xz}^{(2)}$ являются осредненными по всему объему малой окрестности, при этом в жидкой среде осредняемые напряжения полагаются равными нулю.

Матрица, составленная из коэффициентов в законе Гука (1.1), является симметричной и положительно определенной. Симметрия этой матрицы связана с указанными способами осреднения смещений и напряжений. Положительная определенность матрицы определяется положительной определенностью плотности потенциальной энергии. Чтобы плотность кинетической энергии была положительно определенной, необходимо удовлетворить неравенства

$$\bar{\rho} m_i - \rho_f^2 > 0 \quad (i = x, z). \tag{1.6}$$

На границах между слоями 1 и 2 выполняются условия

$$\begin{aligned} &u_{x1} = u_{x2}, \quad u_{z1} = u_{z2}, \quad w_{z1} = w_{z2}, \\ &\tau_{zz1} = \tau_{zz2}, \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz2}, \quad p_1 = p_2, \end{aligned} \tag{1.7}$$

в которых всем величинам добавляется индекс 1 или 2, указывающий номер среды. Граничные условия (1.7) аналогичны условиям жесткого контакта между упругими средами. В случае одинаковых сред Био на границе с условиями (1.7) не образуются отраженные волны. Граничные условия (1.7) учитывают непрерывность суммарных напряжений, неразрывность среды и непрерывность потока энергии через границы.

§2. Эффективная модель периодической среды с пористыми слоями Био

Уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия (1.7) между слоями совместно с заданием источника и с условиями на внешних границах $z = 0$ и $z = H$ позволяют установить точные выражения для полей смещений и напряжений в каждом слое с учетом всех возможных отражений и преломлений. При нахождении волнового поля применяются интегральные преобразования и для компактной записи используется матричный метод. В этом интерференционном поле может быть совершен предельный переход при $n \to \infty$, $h \to 0$, $H = \mathrm{const}$, $\theta_1 = \mathrm{const}$ и $\theta_2 = \mathrm{const}$. В предельном волновом поле непрерывные смещения и напряжения, а также осредненные разрывные величины удовлетворяют новым уравнениям, которые описывают эффективную модель.

При выводе этих уравнений в настоящей работе используется упрощенный подход [7]. Из восьми величин, входящих в уравнения (1.1) и (1.2), величины u_x, u_z, w_z, τ_{zz}, p и τ_{xz} являются непрерывными, а w_x и τ_{xx} имеют скачки на границах. Выразим из уравнений (1.1) и (1.2) производные указанных непрерывных величин по z через сами эти величины и их производные по x и

t и получим уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{1}{L}\,\tau_{xz}\,,\\
\frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{FR-MQ}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{R}{CR-Q^2}\,\tau_{zz} + \frac{Q}{CR-Q^2}\,p,\\
\frac{\partial^3 w_z}{\partial z \partial t^2} &= \left(\frac{\rho_f}{m_x} + \frac{FQ-CM}{CR-Q^2}\right)\frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} - \frac{Q}{CR-Q^2}\,\frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial t^2} +\\
&\quad + \frac{1}{m_x}\,\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{C}{CR-Q^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \frac{m_x\bar\rho - \rho_f^2}{m_x}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{\Delta}{CR-Q^2}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} -\\
&\quad - \frac{FR-MQ}{CR-Q^2}\,\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} - \left(\frac{\rho_f}{m_x} + \frac{FQ-CM}{CR-Q^2}\right)\frac{\partial p}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \bar\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f\,\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x},\\
-\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_f\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_z\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}$$

Входящая в четвертое уравнение (2.1) величина Δ равна определителю матрицы, составленной из коэффициентов в законе Гука (1.1), и представляется равенством

$$\Delta = PCR + 2FQM - CM^2 - RF^2 - PQ^2. \tag{2.2}$$

К уравнениям (2.1) следует добавить еще два уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_f}{m_x}\,\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{m_x}\,\frac{\partial p}{\partial x},\\
\tau_{xx} &= \frac{\Delta}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{FR-MQ}{CR-Q^2}\,\tau_{zz} + \frac{FQ-CM}{CR-Q^2}\,p,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

выражающие разрывные функции w_x и τ_{xx} через непрерывные величины.

Осреднение уравнений (2.1) сводится к введению осредненных производных

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_{x1}}{\partial z}\,\theta_1 + \frac{\partial u_{x2}}{\partial z}\,\theta_2, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\,\theta_1 + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z}\,\theta_2,\\
&\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\,\theta_1 + \frac{\partial w_{z2}}{\partial z}\,\theta_2, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial z}\,\theta_1 + \frac{\partial p_2}{\partial z}\,\theta_2,\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z}\,\theta_1 + \frac{\partial \tau_{xz2}}{\partial z}\,\theta_2, \quad \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z}\,\theta_1 + \frac{\partial \tau_{zz2}}{\partial z}\,\theta_2.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

В равенствах (2.4) смещения и напряжения, относящиеся к определенному слою, содержат дополнительный индекс, совпадающий с номером слоя. Осредненные же производные не имеют индексов. Способ осреднения с помощью формул (2.4) строго обосновывается при проведении указанного предельного перехода и соответствует определению производной. Разрывные величины w_x и τ_{xx} осредняются по формулам

$$
w_x = w_{x1}\theta_1 + w_{x2}\theta_2, \quad \tau_{xx} = \tau_{xx1}\theta_1 + \tau_{xx2}\theta_2. \tag{2.5}
$$

Эти формулы не могут быть получены в результате предельного перехода. Однако их полезно записать, поскольку волновое поле в эффективной модели зависит от величин w_{x1}, w_{x2}, τ_{xx1} и τ_{xx2} только через w_x и τ_{xx}. Кроме того, введенные по формулам (1.5) функции w_x и τ_{xx} могут рассматриваться как среднее относительное смещение и как напряжение, распределенное по всему периоду. Эти величины в эффективной модели также могут быть выражены третьей формулой (1.5) и первым равенством (1.4). Аналогичное осреднение проводилось при выводе уравнений эффективных моделей в случае упругих и жидких слоистых периодических сред [3, 7, 13].

Перейдем теперь к установлению уравнений эффективной модели, подставим в правые части соотношений (2.4) и (2.5) выражения (2.1) и (2.3), записанные для первой и второй сред, и используем обозначения

$$
\begin{gathered}
A_1=\sum_{i=1}^{2}\frac{F_iR_i-M_iQ_i}{C_iR_i-Q_i^2}\,\theta_i,\quad A_2=\sum_{i=1}^{2}\frac{F_iQ_i-C_iM_i}{C_iR_i-Q_i^2}\,\theta_i,\\
A_3=\sum_{i=1}^{2}\frac{\Delta_i\theta_i}{C_iR_i-Q_i^2},\quad A_4=\sum_{i=1}^{2}\frac{Q_i\theta_i}{C_iR_i-Q_i^2},\\
A_5=\sum_{i=1}^{2}\frac{C_i\theta_i}{C_iR_i-Q_i^2},\quad A_6=\sum_{i=1}^{2}\frac{R_i\theta_i}{C_iR_i-Q_i^2},\quad A_7=\sum_{i=1}^{2}\frac{\theta_i}{L_i},\\
B_1=\sum_{i=1}^{2}\frac{(m_{xi}\bar\rho_i-\rho_{fi}^2)\theta_i}{m_{xi}},\quad B_2=\sum_{i=1}^{2}\frac{\rho_{fi}\theta_i}{m_{xi}},\quad B_3=\sum_{i=1}^{2}\frac{\theta_i}{m_{xi}},\\
B_4=\sum_{i=1}^{2}\bar\rho_i\theta_i,\quad B_5=\sum_{i=1}^{2}\rho_{fi}\theta_i,\quad B_6=\sum_{i=1}^{2}m_{zi}\theta_i.
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

В результате получим уравнения

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial z}&=-\frac{\partial u_z}{\partial x}+A_7\tau_{xz},\\
\frac{\partial u_z}{\partial z}&=-A_1\frac{\partial u_x}{\partial x}+A_6\tau_{zz}+A_4p,\\
\frac{\partial^3 w_z}{\partial z\partial t^2}&=(A_2+B_2)\frac{\partial^3 u_x}{\partial x\partial t^2}-A_4\frac{\partial^2\tau_{zz}}{\partial t^2}+B_3\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-A_5\frac{\partial^2 p}{\partial t^2},\\
\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}&=B_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}-A_3\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-A_1\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial x}-(A_2+B_2)\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}&=B_4\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}+B_5\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x},\\
-\frac{\partial p}{\partial z}&=B_5\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}+B_6\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}&=-B_2\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}-B_3\frac{\partial p}{\partial x},\\
\tau_{xx}&=A_3\frac{\partial u_x}{\partial x}+A_1\tau_{zz}+A_2p,
\end{aligned}
$$

описывающие однородную среду. Преобразования соотношений (2.7) приводят к уравнениям

$$
\tau_{xx}=\bar P\frac{\partial u_x}{\partial x}+\bar F\frac{\partial u_z}{\partial z}+\bar M\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right),
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{zz} &= \bar{F}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{C}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \bar{Q}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
-p &= \bar{M}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{Q}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \bar{R}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{xz} &= \bar{L}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right);
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \bar{B}_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{B}_2\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = B_4\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + B_5\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial x} = \bar{B}_2\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{B}_3\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} = B_5\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + B_6\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

в которых

$$
\begin{aligned}
&\bar{P} = \frac{A_3A_5A_6 - 2A_1A_2A_4 + A_1^2A_5 + A_2^2A_6 - A_3A_4^2}{A_5A_6 - A_4^2},\\
&\bar{F} = \frac{A_1A_5 - A_2A_4}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{C} = \frac{A_5}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{M} = \frac{A_1A_4 - A_2A_6}{A_5A_6 - A_4^2},\\
&\bar{Q} = \frac{A_4}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{R} = \frac{A_6}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{L} = \frac{1}{A_7},\\
&\bar{B}_1 = \frac{B_1B_3 + B_2^2}{B_3}, \quad \bar{B}_2 = \frac{B_2}{B_3}, \quad \bar{B}_3 = \frac{1}{B_3}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Перед обсуждением полученных уравнений покажем, что плотности кинетической и потенциальной энергий волнового поля, описываемого уравнениями (2.8) и (2.9), является положительно определенными формами. Для этого нужно доказать, что матрица, составленная из коэффициентов в законе Гука (2.8), является положительно определенной и что выполняются неравенства

$$
\begin{aligned}
\bar{B}_1\bar{B}_3 - \bar{B}_2^2 > 0, \quad B_4B_6 - B_5^2 > 0,\\
\bar{B}_i > 0\,(i = 1,2,3), \quad B_k > 0\,(k = 4,5,6).
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

При доказательстве следует использовать положительную определенность матрицы, образованной из коэффициентов в соотношениях (1.1), и неравенства (1.6). Доказательство выполнения условий (2.11) проводится элементарно. Чтобы доказать положительную определенность матрицы, составленной из коэффициентов уравнений (2.8), необходимо убедиться в справедливости неравенств

$$\begin{aligned} &\bar{P} > 0, \quad \bar{C} > 0, \quad \bar{R} > 0, \quad A_5A_6 - A_4^2 > 0, \\ &A_3A_5A_6 - 2A_1A_2A_4 + A_1^2A_5 + A_2^2A_6 - A_3A_4^2 > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Доказательства неравенств (2.12) основаны на использовании неравенств

$$P > 0, \quad C > 0, \quad R > 0, \quad CR - Q^2 > 0, \quad \Delta > 0, \tag{2.13}$$

следующих из положительной определенности матрицы в законе Гука (1.1). Таким образом, с энергетической точки зрения волновое поле в установленной эффективной модели может существовать.

Модель, описываемая уравнениями (2.8) и (2.9), является обобщенной трансверсально-изотропной моделью Био. Этот вывод основан на сходстве уравнений (2.8), (2.9) с (1.1), (1.2) и на одинаковом физическом смысле соответствующих величин, входящих в эти уравнения. Обобщение модели Био касается только уравнений сплошной среды, которые представляются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \bar{\rho}_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_{fx} \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_{fx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m_x \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \bar{\rho}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_{fz} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \\ -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_{fz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_z \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{2.14}$$

и отличаются от уравнений (2.9) только преобразованием коэффициентов. Уравнения (2.9) и (2.14) определяются 6 параметрами, в то время как уравнения (1.2) имеют только 4 параметра. Появление двух новых параметров связано с тем, что осреднение плотностей проводится по-разному вдоль оси x и вдоль оси z и плотность жидкости и средняя плотность приобретают тензорный характер. Различие в определениях плотностей было отмечено в работе [3] при нахождении эффективной модели жидких слоистых сред. Если осреднять периодическую среду с периодом, состоящим из двух обобщенных трансверсально-изотропных слоев Био (Рис. 1), то эффективная среда также будет описываться уравнениями сплошной среды (2.14). Коэффициенты в этих уравнениях выразятся соотношениями

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_z &= \bar{\rho}_{z1}\theta_1 + \bar{\rho}_{z2}\theta_2, \quad \rho_{fz} = \rho_{fz1}\theta_1 + \rho_{fz2}\theta_2,\\
m_z &= m_{z1}\theta_1 + m_{z2}\theta_2,\\
\bar{\rho}_x &= \bar{\rho}_{x1}\theta_1 + \bar{\rho}_{x2}\theta_2 - \frac{\theta_1\theta_2(\rho_{fx1}-\rho_{fx2})^2}{m_{x2}\theta_1 + m_{x1}\theta_2},\\
\rho_{fx} &= \frac{\rho_{fx1}m_{x2}\theta_1 + \rho_{fx2}m_{x1}\theta_2}{m_{x2}\theta_1 + m_{x1}\theta_2},\\
m_x &= \frac{m_{x1}m_{x2}}{m_{x2}\theta_1 + m_{x1}\theta_2}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

через соответствующие коэффициенты для каждого из слоев. Если записать очевидное равенство для пористости в эффективной модели

$$f = f_1\theta_1 + f_2\theta_2 \tag{2.16}$$

и учесть вторую формулу (1.3), то получим для извилистости соотношения

$$\begin{aligned}
\alpha_x &= \frac{\alpha_{x1}\alpha_{x2}(f_1\theta_1 + f_2\theta_2)}{f_1\alpha_{x2}\theta_1 + f_2\alpha_{x1}\theta_2},\\
\alpha_z &= \frac{(\alpha_{z1}\rho_{fz1}f_2\theta_1 + \alpha_{z2}\rho_{fz2}f_1\theta_2)(f_1\theta_1 + f_2\theta_2)}{f_1f_2(f_1\alpha_{x2}\theta_1 + f_2\alpha_{x1}\theta_2)},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

из которых следует, что $\alpha_x \geqslant 1$, $\alpha_z \geqslant 1$, так как $\alpha_{x1} \geqslant 1$, $\alpha_{z1} \geqslant 1$, $\alpha_{x2} \geqslant 1$, $\alpha_{z2} \geqslant 1$.

Равенства (2.15)–(2.17) справедливы также в случае, когда период состоит из обычных трансверсально-изотропных слоев Био. В этом случае выполняются соотношения

$$\bar{\rho}_{xi} = \bar{\rho}_{zi}, \quad \rho_{fxi} = \rho_{fzi} \ (i = 1, 2). \tag{2.18}$$

Особый интерес представляет случай, когда трансверсально-изотропные или изотропные слои Био имеют одинаковые плотности жидких фаз ($\rho_{f1} = \rho_{f2}$). В этом случае эффективная среда является обычной трансверсально-изотропной средой Био.

§3. Эффективная модель слоистой периодической среды из чередующихся упругих и пористых слоев

Пусть задана периодическая среда (Рис. 1), каждый период которой состоит из пористого слоя Био 1 и упругого слоя 2. Пористые слои описываются уравнениями (1.1) и (1.2), в которых смещения и напряжения снабжены дополнительными индексами 1. Смещения u_{x2}, u_{z2} и напряжения t_{xx2}, t_{zz2}, t_{xz2} в упругих слоях удовлетворяют известным уравнениям

$$\begin{aligned}
&t_{xx2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u_{z2}}{\partial z},\\
&t_{zz2} = \lambda\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_{z2}}{\partial z},\\
&t_{xz2} = \mu\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial t_{xx2}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xz2}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial t_{xz2}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zz2}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

На границах между слоями выполняются условия

$$\begin{gathered}
u_{x1} = u_{x2}, \quad u_{z1} = u_{z2}, \quad w_{z1} = 0,\\
\tau_{xz1} = t_{xz2}, \quad \tau_{zz1} = t_{zz2},
\end{gathered} \tag{3.2}$$

которые являются частным случаем граничных условий (1.7), когда во втором слое пористость равна нулю, при этом шестое условие (1.7) отбрасывается, так как оно теряет смысл. Граничные условия (3.2) также учитывают непрерывность суммарных напряжений, условия неразрывности среды и непрерывности потока энергии.

Как и в §2, для вывода уравнений эффективной модели используется упрощенный вариант метода матричного осреднения. Согласно этому варианту, из третьего граничного условия (3.2) следует равенство

$$w_z = 0, \tag{3.3}$$

выполняющееся во всей области, так как по мере перехода от среды к эффективной модели границы становятся бесконечно частыми. Производная $\partial p/\partial z$ при этих же условиях теряет смысл как производная от разрывной функции. Поэтому следует отбросить последние уравнения в (1.2) и (2.1) как содержащие производную $\partial p/\partial z$.

После учета соотношения (3.3) и исключения одного из уравнений слои Био, находящиеся в контакте с упругими слоями, описываются семью уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{x1}}{\partial z} &= -\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + \frac{1}{L}\,\tau_{xz1},\\
\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} &= -\frac{FR-MQ}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{R}{CR-Q^2}\,\tau_{zz1} + \frac{Q}{CR-Q^2}\,p_1,\\
\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} &= \frac{m_x\bar\rho-\rho_f^2}{m_x}\,\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} - \frac{\Delta}{CR-Q^2}\,\frac{\partial^2\tau_{zz1}}{\partial t^2} +\\
&\quad + \frac{1}{m_x}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{C}{CR-Q^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2},\\
\frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} &= \bar\rho\frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_{z1}}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x},\\
\tau_{xx1} &= \frac{\Delta}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{FR-MQ}{CR-Q^2}\,\tau_{zz1} + \frac{FQ-CM}{CR-Q^2}\,p_1,\\
\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_f}{m_x}\,\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} - \frac{1}{m_x}\,\frac{\partial p_1}{\partial x},\\
\frac{1}{m_x}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \frac{C}{CR-Q^2}\,\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} &= \frac{Q}{CR-Q^2}\,\frac{\partial^2\tau_{zz1}}{\partial t^2} -\\
&\quad - \left(\frac{\rho_f}{m_x} + \frac{FQ-CM}{CR-Q^2}\right)\frac{\partial^3 u_{x1}}{\partial x\partial t^2},
\end{aligned}\tag{3.4}$$

записанными на основании (2.1) и (2.3). Аналогичные уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_{x2}}{\partial z} &= -\frac{\partial u_{z2}}{\partial x} + \frac{1}{\mu}\,\tau_{xz2},\\
\frac{\partial u_{z2}}{\partial z} &= -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{1}{\lambda+2\mu}\,\tau_{zz2},\\
\frac{\partial \tau_{xz2}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} - \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial \tau_{zz2}}{\partial x},
\end{aligned}\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{zz2}}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz2}}{\partial x},\\
\tau_{xx2} &= \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\,\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\,\tau_{zz2}
\end{aligned}$$

имеют место в случае упругой среды. В соотношения (3.4) и (3.5) входят четыре непрерывных функции u_x, u_z, τ_{xz} и τ_{zz}, имеющие в пористых и упругих слоях дополнительные индексы 1 и 2. Функция τ_{xx}, равная τ_{xx1} в пористых слоях и τ_{xx2} в упругих слоях, является разрывной и осредняется по формуле $\tau_{xx} = \theta_1 \tau_{xx1} + \theta_2 \tau_{xx2}$. Вместо величины $w_{x1} = f_1(u_x^{(1)} - u_x)$, определяющей относительное смещение в пористом слое, вводится функция $w_x = f_1\theta_1(u_x^{(1)} - u_x) = w_{x1}\theta_1$, учитывающая пористость $f = f_1\theta_1$ во всей эффективной модели. Так как давление p_1 не имеет аналога в упругих слоях и определено только в пористых средах, то эта величина при переходе к эффективной модели сохраняет свое выражение и физический смысл и $p = p_1$.

В правые части уравнений (3.4) и (3.5) входят непрерывные функции и их производные по t и x. Исключение составляют давление p и его производная $\partial p/\partial x$. Если использовать оператор

$$\left(\frac{1}{m_x}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{C}{CR - Q^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)^{-1},$$

то давление и его производная будут исключены из правых частей соотношений (3.4) и придем к случаю, который аналогичен рассмотренному в §2 случаю. Однако эту операцию можно не проводить, поскольку при осреднении давление p не осредняется и седьмое уравнение (3.4) не изменяется. Используя это уравнение, можно после осреднения вернуться к членам с p и $\partial p/\partial x$.

Применяя подход, изложенный в §2, запишем пять осредненных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} + A_7 \tau_{xz},\\
\frac{\partial u_z}{\partial z} &= -A_1\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_6\tau_{zz} + A_4 p,\\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= B_1\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - A_3\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - A_1\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} - (A_2 + B_2)\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= B_4\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x},\\
\tau_{xx} &= A_3\frac{\partial u_x}{\partial x} + A_1\tau_{zz} + A_2 p
\end{aligned} \qquad (3.6)$$

и два неосредняемых уравнения

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = -B_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - B_3 \frac{\partial p}{\partial x},\\
&(A_2 + B_2)\frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} - A_4 \frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial t^2} + B_3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - A_5 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

в которых использованы обозначения

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \frac{FR - MQ}{CR - Q^2}\,\theta_1 + \frac{\lambda\theta_2}{\lambda + 2\mu}, \quad A_2 = \frac{FQ - CM}{CR - Q^2}\,\theta_1,\\
&A_3 = \frac{\Delta\theta_1}{CR - Q^2} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\,\theta_2, \quad A_4 = \frac{Q}{CR - Q^2}\,\theta_1,\\
&A_5 = \frac{C}{CR - Q^2}\,\theta_1, \quad A_6 = \frac{R\theta_1}{CR - Q^2} + \frac{\theta_2}{\lambda + 2\mu}, \quad A_7 = \frac{\theta_1}{L} + \frac{\theta_2}{\mu},\\
&B_1 = \frac{m_x\bar{\rho} - \rho_f^2}{m_x}\,\theta_1 + \rho\theta_2, \quad B_2 = \frac{\rho_f}{m_x}\theta_1,\\
&B_3 = \frac{\theta_1}{m_x}, \quad B_4 = \bar{\rho}\theta_1 + \rho\theta_2.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Уравнения (3.6) и (3.7) равносильны уравнениям закона Гука

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx} &= \bar{P}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{F}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \bar{M}\frac{\partial w_x}{\partial x},\\
\tau_{zz} &= \bar{F}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{C}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \bar{Q}\frac{\partial w_x}{\partial x},\\
-p &= \bar{M}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{Q}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \bar{R}\frac{\partial w_x}{\partial x},\\
\tau_{xz} &= \bar{L}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

и уравнениям сплошной среды

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \bar{B}_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{B}_2 \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p}{\partial x} &= \bar{B}_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{B}_3 \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \bar{B}_1 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

где

$$\bar{P} = \frac{A_3A_5A_6 + A_1^2A_5 + A_2^2A_6 - 2A_1A_2A_4 - A_3A_4^2}{A_5A_6 - A_4^2},$$
$$\bar{F} = \frac{A_1A_5 - A_2A_4}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{M} = \frac{A_1A_4 - A_2A_6}{A_5A_6 - A_4^2},$$
$$\bar{C} = \frac{A_5}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{Q} = \frac{A_4}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{R} = \frac{A_6}{A_5A_6 - A_4^2}, \quad \bar{L} = \frac{1}{A_7},$$
$$\bar{B}_1 = B_4 = \frac{B_1B_3 + B_2^2}{B_3} = \bar{\rho}\theta_1 + \rho\theta_2, \quad \bar{B}_2 = \frac{B_2}{B_3} = \rho_f,$$
$$\bar{B}_3 = \frac{1}{B_3} = \frac{m_x}{\theta_1}. \tag{3.11}$$

Полученная эффективная модель является частным случаем трансверсально-изотропной среды Био и ее уравнения могут быть представлены соотношениями (1.1) и (1.2), в которых для определенности все коэффициенты снабжены дополнительной чертой. Чтобы установить связь между уравнениями (3.9) и (1.1), а также между соотношениями (3.10) и (1.2), необходимо положить $\bar{m}_z = \infty$. Из этого равенства и из четвертого соотношения (1.2) следует

$$w_z = 0. \tag{3.12}$$

С учетом равенства (3.12) устанавливается полное соответствие между указанными уравнениями после предельного перехода в четвертом уравнении сплошной среды. Из сравнения коэффициентов в уравнениях следует, что в эффективной среде Био общая осредненная по периоду плотность равна $\bar{\rho}\theta_1 + \rho\theta_2$, плотность жидкой фазы – ρ_f, извилистость вдоль оси x – α_x, извилистость вдоль оси z – ∞. Пористость f в эффективной модели представится очевидным соотношением $f = f_1\theta_1$.

Равенство $\bar{m}_z = \infty$ может быть оправдано, если сравнить периодическую среду с двумя слоями Био с периодической упругопористой средой. На основании третьего равенства (2.15) и второго соотношения (1.3) запишем формулу

$$m_z = m_{z1}\theta_1 + \frac{\rho_{f2}\alpha_{z2}\theta_2}{f_2}. \tag{3.13}$$

При переходе от пористого второго слоя к упругому слою необходимо $f_2 \to 0$. Так как $1 \leqslant \alpha_{z2} < \infty$, то $m_z \to \infty$.

§4. Эффективная модель слоистой периодической пористо-жидкой среды

Пусть задана периодическая среда (Рис. 1), каждый период которой состоит из слоя Био 1 и жидкого слоя 2. Пористые слои по-прежнему описываются уравнениями (1.1) и (1.2), в которых смещения и напряжения снабжены дополнительным индексом 1. Смещения u_{x2}, u_{z2} и давление p_2 в жидких слоях удовлетворяют известным уравнениям

$$p_2 = -\lambda \left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial p_2}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial z} = -\rho \frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial t^2}, \tag{4.1}$$

в которых $\lambda = \rho v^2$, ρ – плотность и v – скорость распространения в жидкости. На границах между слоями выполняются условия

$$u_{z1} + w_{z1} = u_{z2}, \quad \tau_{xz1} = 0, \quad \tau_{zz1} = -p_1 = -p_2, \tag{4.2}$$

которые являются частным случаем граничных условий (1.7), когда во втором слое пористость равна 1 и когда первое условие (1.7) теряет смысл, а вместо второго и третьего условий (1.7) ставится одно первое условие (4.2). Граничные условия (4.2) также учитывают непрерывность суммарных напряжений, а также условия неразрывности среды и непрерывности потока энергии.

Как и в §2 и 3, при выводе уравнений эффективной модели используется упрощенный вариант метода матричного осреднения. Так как по мере перехода от заданной среды к эффективной модели границы становятся бесконечно частыми, то из граничных условий (4.2) следует, что равенства

$$\tau_{zx1} = 0, \quad \tau_{zz1} = -p_1 \tag{4.3}$$

выполняются во всей области. Одновременно с учетом соотношений (4.3) нужно исключить из уравнений (1.1) и (1.2), описывающих среду Био, два уравнения. Одним из исключаемых уравнений является четвертое уравнение (1.1), поскольку оно содержит производную $\partial u_x/\partial z$, которая теряет смысл после перехода от среды к эффективной модели. Прежде чем отбросить второе уравнение, выразим сперва производные смещений $\partial u_{z1}/\partial z$,

$\partial w_{z1}/\partial z$ и напряжение τ_{xx1} из оставшихся трех уравнений (1.1) и придем к соотношениям

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} &= \frac{R-Q}{CR-Q^2}\,\tau_{zz1} - \frac{FR-MQ}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_{x1}}{\partial x},\\
\frac{\partial w_{z1}}{\partial z} &= \frac{C-Q}{CR-Q^2}\,\tau_{zz1} + \frac{FQ-CM}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial w_{x1}}{\partial x},\\
\tau_{xx1} &= \frac{CM+FR-FQ-MQ}{CR-Q^2}\,\tau_{zz1} + \frac{\Delta}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_{x1}}{\partial x},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

в которых величина Δ является определителем матрицы, составленной из коэффициентов закона Гука (1.1), и выражается формулой (2.2). Так как при переходе к эффективной модели производные $\partial u_{z1}/\partial z$ и $\partial w_{z1}/\partial z$ теряют смысл, и только производная $\partial(u_{z1}+w_{z1})/\partial z$ сохраняет смысл, то выразим ее равенством

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial(u_{z1}+w_{z1})}{\partial z} = \\
= \frac{R-2Q+C}{CR-Q^2}\,\tau_{zz1} + \frac{FQ+MQ-CM-FR}{CR-Q^2}\,\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} - \frac{\partial w_{x1}}{\partial x}
\end{gathered}
\tag{4.5}
$$

из первого и второго соотношений (4.4) и затем отбросим эти соотношения. Таким образом, из четырех уравнений закона Гука (1.1) сохраняются только третье уравнение (4.4) и уравнение (4.5).

При преобразовании уравнений (1.2) для последующего осреднения полезно отметить, что из второго и четвертого равенств (1.2) с учетом соотношений (4.3) следуют уравнения

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} &= \frac{\bar\rho m_z - \rho_f^2}{\bar\rho - 2\rho_f + m_z}\,\frac{\partial^2(u_{z1}+w_{z1})}{\partial t^2},\\
\frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} &= \frac{m_z - \rho_f}{\bar\rho - 2\rho_f + m_z}\,\frac{\partial^2(u_{z1}+w_{z1})}{\partial t^2},\\
\frac{\partial^2 w_{z1}}{\partial t^2} &= \frac{\bar\rho - \rho_f}{\bar\rho - 2\rho_f + m_z}\,\frac{\partial^2(u_{z1}+w_{z1})}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Поскольку смещения u_{z1} и w_{z1} входят только во второе и третье уравнения (4.6) и не входят ни в одно другое оставшееся уравнение, то второе и третье равенства (4.6) можно не учитывать. Таким образом, количество уравнений относительно функций $u_{z1}+w_{z1}$, u_{x1}, w_{x1}, τ_{zz1} и τ_{xx1} сокращается до пяти. После дополнительных преобразований эти уравнения представляются равенствами

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^3(u_{z1}+w_{z1})}{\partial z\partial t^2}=\frac{R-2Q+C}{CR-Q^2}\frac{\partial^2\tau_{zz1}}{\partial t^2}-\frac{1}{m_x}\frac{\partial^2\tau_{zz1}}{\partial x^2}+\\
+\left(\frac{FQ+MQ-CM-FR}{CR-Q^2}+\frac{\rho_f}{m_x}\right)\frac{\partial^3 u_{x1}}{\partial x\partial t^2},\\
\frac{\partial\tau_{zz1}}{\partial z}=\frac{\bar\rho m_z-\rho_f^2}{\bar\rho-2\rho_f+m_z}\frac{\partial^2(u_{z1}+w_{z1})}{\partial t^2},\\
\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2}=\frac{1}{m_x}\frac{\partial\tau_{zz1}}{\partial x}-\frac{\rho_f}{m_x}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2},\\
\tau_{xx1}=\frac{\Delta}{CR-Q^2}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}+\frac{CM+FR-FQ-QR}{CR-Q^2}\tau_{zz1},\\
(\bar\rho m_x-\rho_f^2)\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2}=m_x\frac{\partial\tau_{xx1}}{\partial x}-\rho_f\frac{\partial\tau_{zz1}}{\partial x}.
\end{gathered}
\tag{4.7}
$$

Аналогичные равенства, описывающие жидкие слои, выражаются на основании (4.1) соотношениями

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^3 u_{z2}}{\partial z\partial t^2}=-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2},\\
\frac{\partial p_2}{\partial z}=-\rho\frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_2}{\partial x}.
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

Среди функций, входящих в уравнения (4.7), две функции $u_{z1}+w_{z1}$ и τ_{zz1} переходят непрерывно в жидких слоях соответственно в $u_{z2}, -p_2$. Общие для обеих сред функции обозначим через u_z и τ_{zz}. Осреднение для остальных функций в этом случае проводится более сложным путем. Сравнивая выражения

$$
\begin{aligned}
w_{x1}&=f_1(u_{x1}^{(1)}-u_{x1}),\\
w_x&=(f_1\theta_1+\theta_2)\left[\frac{u_{x1}^{(1)}\theta_1 f_1+u_{x2}\theta_2}{f_1\theta_1+\theta_2}-u_{x1}\right]
\end{aligned}
$$

для относительных смещений в слое 1 и во всей модели, приходим к соотношению

$$
w_x=\theta_1 w_{x1}+\theta_2 u_{x2}-\theta_2 u_{x1}, \tag{4.9}
$$

при этом $f = f_1\theta_1 + \theta_2$ – осредненная пористость. Полное напряжение τ_{xx} представляется равенством

$$\tau_{xx} = \tau_{xx1}\theta_1 + \tau_{zz}\theta_2. \tag{4.10}$$

Смещение u_{x1} при переходе к эффективной модели сохраняет свое выражение и физический смысл, и поэтому

$$u_x = u_{x1}. \tag{4.11}$$

Применяя подход, использованный в §2 и 3, запишем уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^3 u_z}{\partial z \partial t^2} = A_1 \frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial t^2} - \left(\frac{\theta_1}{m_x} + \frac{\theta_2}{\rho}\right) \frac{\partial^2 \tau_{zz}}{\partial x^2} + \theta_1 \left(A_2 + \frac{\rho_f}{m_x}\right) \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = B \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = \left(\frac{\theta_1}{m_x} + \frac{\theta_2}{\rho}\right) \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} - \left(\frac{\theta_1 \rho_f}{m_x} + \theta_2\right) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\
\tau_{xx} = \theta_1 A_3 \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\theta_2 - \theta_1 A_2)\tau_{zz}, \\
\theta_1 (m_x \bar{\rho} - \rho_f^2) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = m_x \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - (m_x \theta_2 + \rho_f \theta_1) \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x},
\end{gathered} \tag{4.12}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{R - 2Q + C}{CR - Q^2}\,\theta_1 + \frac{\theta_2}{\lambda}, \quad A_2 = \frac{FQ + MQ - CM - FR}{CR - Q^2}, \\
A_3 &= \frac{\Delta}{CR - Q^2}, \quad B = \frac{\bar{\rho} m_z - \rho_f^2}{\bar{\rho} - 2\rho_f + m_z}\,\theta_1 + \rho\theta_2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Уравнения (4.12) равносильны уравнениям Гука

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= H_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} + H_2 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial x}\right), \\
\tau_{zz} &= H_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} + H_3 \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

и уравнениям сплошной среды

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \bar{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{\rho}_f\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} = \bar{\rho}_f\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{m}_x\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = B\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

в которых применимы обозначения

$$\begin{aligned}
&H_1 = A_3\theta_1 + \frac{(\theta_2 - A_2\theta_1)^2}{A_1}, \quad H_2 = \frac{\theta_2 - \theta_1 A_2}{A_1}, \quad H_3 = \frac{1}{A_1},\\
&\bar{\bar{\rho}} = \frac{\rho\bar{\rho}\theta_1^2 + (m_x\bar{\rho} - \rho_f^2 + 2\rho\rho_f)\theta_1\theta_2 + \rho m_x\theta_2^2}{\rho\theta_1 + m_x\theta_2},\\
&\bar{\rho}_f = \rho\frac{\rho_f\theta_1 + m_x\theta_2}{\rho\theta_1 + m_x\theta_2}, \quad \bar{m}_x = \frac{\rho m_x}{\rho\theta_1 + m_x\theta_2}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Эффективная модель рассматриваемой среды является обобщенной трансверсально-изотропной средой Био. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим уравнения (1.1) и (2.14), в которых для определенности коэффициенты снабжены дополнительной чертой, и покажем, при каких значениях параметров уравнения (1.1) и (2.14) переходят в уравнения (4.14) и (4.15). Предположения $\bar{L} = 0$, $\bar{F} = \bar{M}$, $\bar{C} = \bar{Q} = \bar{R}$ и $\bar{m}_z = \infty$ приводят к равенствам

$$\tau_{xz} = 0, \quad \tau_{zz} = -p, \quad w_z = 0, \tag{4.17}$$

которые выполняются во всей области $0 \leqslant z \leqslant H$. После этих предположений рассматриваемая среда описывается уравнениями закона Гука

$$\begin{aligned}
&\tau_{xx} = \bar{P}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{F}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial x}\right),\\
&\tau_{zz} = \bar{F}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{C}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

и уравнениями сплошной среды

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} = \bar{\bar{\rho}}_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{\rho}_f \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial x} = \bar{\rho}_f \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \bar{m}_x \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = \bar{\bar{\rho}}_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Коэффициенты в уравнениях (4.18) и (4.19) определяются путем сравнения этих уравнений с соотношениями (4.14) и (4.15). В результате сравнения для параметров обобщенной трансверсально-изотропной среды Био получаем значения

$$\begin{gathered} \bar{L} = 0, \quad \bar{P} = H_1, \quad \bar{F} = \bar{M} = H_2, \quad \bar{C} = \bar{Q} = \bar{R} = H_3, \quad \bar{\bar{\rho}}_x = \bar{\rho}, \\ \bar{\rho}_{fx} = \rho_f, \quad \bar{m}_x = m_x, \quad \bar{\bar{\rho}}_z = B, \quad \bar{m}_z = \infty, \end{gathered} \tag{4.20}$$

при этом величина ρ_{fz} оказывается произвольной и конечной.

В заключение отметим, что полученная эффективная модель является обобщением эффективной модели слоистой упруго-жидкой среды. Для установления связи между моделями используем соотношения

$$w_x = f(u_x^{(1)} - u_x), \quad \tau_{xx} = \sigma_{xx}^{(2)} + \tau_{zz} \tag{4.21}$$

из которых первое совпадает со вторым равенством (1.5), а второе представляет собой разложение суммарного напряжения τ_{xx} по напряжениям в фазах, при этом $\sigma_{xx}^{(2)}$ – осредненное напряжение в упругой фазе. С учетом формул (4.21) уравнения (4.18) и

(4.19) заменяются равенствами

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{(2)} = (\bar{P} - 2\bar{F}f + \bar{C}f^2)\frac{\partial u_x}{\partial x} + (\bar{F} - f\bar{C})\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + f\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x}\right),\\
&\tau_{zz} = (\bar{F} - f\bar{C})\frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{C}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + f\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial\sigma_{xx}^{(2)}}{\partial x} = (\bar{\bar{\rho}}_x - 2\bar{\rho}_f f + \bar{m}_x f^2)\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + f(\bar{\rho}_f - f\bar{m}_x)\frac{\partial^2 u_x^{(1)}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial x} = (\bar{\rho}_f - f\bar{m}_x)\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + f\bar{m}_x\frac{\partial^2 u_x^{(1)}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = \bar{\bar{\rho}}_z\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Если предположить, что выполняется соотношение $\bar{\rho}_f = \bar{m}_x f$ или $\bar{\alpha}_x = 1$, то придем к уравнениям эффективной модели слоистой упруго-жидкой среды [5, 13]. Последняя модель, в свою очередь, является частным случаем обычной трансверсально-изотропной модели Био [14].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–01-00666, 96–05–66207).

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28,** No. **2** (1956), 168–178.
2. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. No. 4 (1962), 1482–1498.
3. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
4. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Эффективные среды для периодических анизотропных систем.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **128** (1983), 130–138.
5. Л. А. Молотков, *Уравнения эффективной модели анизотропной упругой среды с трещинами, заполненными жидкостью.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **210** (1994), 173–191.
6. Л. А. Молотков, *Осреднение периодических неидеальноупругих сред.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **140** (1984), 123–131.
7. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Об уравнениях эффективной модели упругой среды с трещинами, заполненными вязкой жидкостью.* — Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн **30** (1990), 88–95.

8. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Эффективные модели слоистых упругих сред с линейными контактами общего вида.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **156** (1986), 148–157.
9. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели, описывающей слоистую периодическую упругую среду с контактами проскальзывания на границах.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **210** (1994), 192–212.
10. Д. Е. Уайт, И. Г. Михайлова, Ф. М. Ляховицкий, *Распространение сейсмических волн в слоистых средах, насыщенных жидкостью и газом.* — Изв. АН СССР, сер. Физика Земли **10** (1975), 44–52.
11. A. Norris, *Low-frequency dispersion and attenuation in partially saturated rocks.* — J. Acoust. Soc. Am. **94**, No. **1** (1993), 359–370.
12. B. Gurevich, S. L. Lopatnikov, *Velocity and attenuation of elastic waves in finely layered porous rocks.* — Geophys. J. Int. **121** (1995), 933–947.
13. Л. А. Молотков, *О новом способе вывода уравнений осредненной эффективной модели периодических сред.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **195** (1991), 82–102.
14. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **230** (1995), 172–195.

Molotkov L. A., Bakulin A. V. The effective models of the stratified media containing porous Biot layers.

The periodic stratified media with alternating layers are investigated in three cases, when a period consists of: 1) two different porous Biot layers, 2) porous and elastic layers, 3) porous and fluid layers. In the case of alternating porous layers the effective model is proved to be generalized transversaly isotropic Biot medium. In this medium fluid density and averaged density are tensors. The effective model of stratified porous-fluid medium is a partial case of generalized transversaly isotropic Biot model and a generalization of effective model of layered fluid-solid medium.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 сентября 1996 г.

С.-Петербургский государственный
университет