**Л. А. Молотков, А. В. Бакулин**

# РАЗРЫВЫ СМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ КАК СЕЙСМИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ В СРЕДЕ БИО

В связи с развитием теории распространения сейсмических волн в настоящее время проявляется большой интерес к исследованию волновых процессов в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей и, в частности, на основе модели Био. Для всестороннего использования модели Био в теории распространения волн необходимо задавать различные источники в этой модели. Некоторые источники в этой модели уже определялись в работах [1–4]. Предлагаемая работа посвящена заданию новых источников, установлению связей между источниками и выделению элементарных источников, на основе которых удается выразить волновые поля в случае других более сложных источников в безграничной среде Био. Особенность задания источников в настоящей работе состоит в том, что источники определяются граничными условиями, в которых содержатся скачки напряжений и смещений. Образующиеся волновые поля представляются в двух формах: в соотношениях типа формул Стокса и в виде равенств, использующих интегральные преобразования Фурье–Бесселя и Лапласа. Первое представление, в частности, удобно для исследования волнового поля в ближней и дальней зонах, а второе представление необходимо для изучения процессов отражения и преломления на границах раздела. Для установления связей между обоими представлениями в работе выведен ряд интегральных соотношений. Так как среда Био является обобщением упругой и жидкой сред, для которых уже известны источники, то для найденных в среде Био источников проверяется их соответствие с источниками в упругой и жидкой средах [5–7].

## §1. Основные уравнения однородной изотропной среды Био

Пусть задана безграничная однородная изотропная двухфазная среда Био [8], в которой значки 1 и 2 относятся соответственно к жидкой и упругой фазам. Векторы смещений $\vec{u}^{(1)}$ и $\vec{u}^{(2)}$ выражаются равенствами

$$\begin{aligned}\vec{u}^{(1)} &= \operatorname{grad}\varphi_1 - \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\operatorname{rot}\vec{\psi},\\ \vec{u}^{(2)} &= \operatorname{grad}\varphi_2 + \operatorname{rot}\vec{\psi}\end{aligned} \tag{1.1}$$

через потенциалы $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\vec{\psi}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}P\Delta\varphi_2 + M\Delta\varphi_1 &= \rho_{11}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},\\ M\Delta\varphi_2 + \tilde{R}\Delta\varphi_1 &= \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},\\ \Delta\vec{\psi} &= \frac{\delta}{\rho_{22}L}\,\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2},\end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\delta = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2$. Входящие в соотношения (1.1) и (1.2) параметры $P, M, \tilde{R}$ и $L$ являются модулями среды, а величины $\rho_{11}$, $\rho_{22}$ и $\rho_{12}$ определяются равенствами

$$\begin{gathered}\rho_{11} = \rho_s(1-\varepsilon) + \varepsilon\rho_f(\alpha-1), \quad \rho_{12} = -\rho_f\varepsilon(\alpha-1),\\ \rho_{22} = \rho_f\varepsilon\alpha,\end{gathered} \tag{1.3}$$

в которых $\rho_s$ и $\rho_f$ – плотности упругой и жидкой фаз, $\varepsilon$ – пористость и $\alpha$ – извилистость пор ($\alpha \geqslant 1$). Тензоры напряжений $\sigma^{(1)}$ и $\sigma_{ik}^{(2)}$ $(i,k = x,y,z)$ выражаются через смещения формулами закона Гука

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(2)} &= P\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} + A\frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial y} + A\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} + M\theta,\\ \sigma_{yy}^{(2)} &= A\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} + P\frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial y} + A\frac{\partial u_z^{(z)}}{\partial z} + M\theta,\\ \sigma_{zz}^{(2)} &= A\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} + A\frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial y} + P\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} + M\theta,\\ \sigma^{(1)} &= M\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} + M\frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial y} + M\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} + \tilde{R}\theta,\\ \sigma_{yz}^{(2)} &= L\left(\frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial y}\right), \quad \sigma_{xz}^{(2)} = L\left(\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial x}\right),\\ \sigma_{xy}^{(2)} &= L\left(\frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial x}\right), \quad \theta = \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{((1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z},\end{aligned} \tag{1.4}$$

при этом $A = P - 2L$. В заданной среде между волнами в обеих фазах существует связь и только в случае

$$\rho_{12} = 0, \quad M = 0 \tag{1.5}$$

волны в упругой и жидкой фазах распространяются независимо и описываются соответственно уравнениями теории упругости и гидроакустики.

## §2. Задание и волновые поля элементарных источников

Цель настоящей работы состоит в установлении источников, которые могут возбуждать заданную среду. Среди этих источников выделим элементарные источники, на основании которых легко задать остальные источники и выразить их волновые поля. Первый из элементарных источников определяется в цилиндрической системе координат $r, \theta, z$ соотношениями

$$[\sigma_{zz}^{(2)}] = \frac{\delta(r) f(t)}{2\pi r}, \quad [\sigma^{(1)}] = [\sigma_{rz}^{(2)}] = 0, \quad [u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_r^{(2)}] = 0, \tag{2.1}$$

в которых $\delta(r)$ – функция Дирака, а символы $[\,]$ обозначают скачки при $z = 0$ функций, стоящих в скобках. Правая часть первого равенства (2.1) выражает сосредоточенную внешнюю силу, действующую вдоль оси $z$ и приложенную к твердой фазе. Для источника выполняются нулевые начальные данные

$$\vec{u}^{(1)} = \vec{u}^{(2)} = 0, \quad \partial \vec{u}^{(1)}/\partial t = \partial \vec{u}^{(2)}/\partial t = 0 \tag{2.2}$$

при $t = 0$ и функция $f(t)$, определяющая временную зависимость источника, обращается в нуль при $t < 0$.

Для нахождения решений уравнений (1.2) с учетом граничных условий (2.1) и начальных данных (2.2) перейдем в уравнениях (1.2) и (1.4) к цилиндрическим координатам. В этой системе координат векторный потенциал $\vec{\psi}$ удобно представить равенством

$$\vec{\psi} = \psi_\theta \vec{\theta}_1. \tag{2.3}$$

С учетом формулы (2.3) смещения и напряжения представятся выражениями

$$
\begin{aligned}
&u_z^{(1)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \left( \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r} \right), \quad u_r^{(1)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\rho_{12}}{\rho_{22}} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z}, \\
&u_z^{(2)} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r}, \quad u_r^{(2)} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z}, \\
&\sigma^{(1)} = \rho_{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \\
&\sigma_{zz}^{(2)} = \rho_{11} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \\
&\qquad + 2L \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} \right), \\
&\sigma_{rz}^{(2)} = L \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r^2} \right).
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Применяя интегральные преобразования Фурье–Бесселя и Лапласа и используя результаты работы [4], представим выражения для потенциалов в случае источника (2.1) соотношениями

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = \operatorname{sign} z \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left( X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + X_2 e^{-k|z|\alpha_2} \right) e^{kt\eta}\, d\eta, \\
&\varphi_2 = \operatorname{sign} z \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left( A_1 X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + A_2 X_2 e^{-k|z|\alpha_2} \right) e^{kt\eta}\, d\eta, \\
&\psi_\theta = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} Y e^{-k|z|\beta} e^{tk\eta}\, d\eta,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

в которых

$$
\begin{aligned}
&X_1 = -\frac{(\rho_{12} A_2 + \rho_{22}) F(k\eta)}{4\pi \eta^2 (A_2 - A_1)\delta}, \quad X_2 = \frac{(\rho_{12} A_1 + \rho_{22}) F(k\eta)}{4\pi \eta^2 (A_2 - A_1)\delta}, \\
&Y = \frac{\rho_{22} F(k\eta)}{4\pi \eta^2 \beta \delta}, \quad F(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-k\eta t}\, dt.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Входящие в формулы (2.5) и (2.6) величины $A_1$, $A_2$, $\delta$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ и

$\beta$ представляются равенствами

$$A_{1,2} = \frac{\rho_{12}v_{1,2}^2 - M}{P - \rho_{11}v_{1,2}^2} = \frac{\rho_{22}v_{1,2}^2 - \tilde{R}}{M - \rho_{12}v_{1,2}^2}, \quad \delta = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2,$$
$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_1^2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_2^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_3^2}}, \tag{2.7}$$

где $v_1$, $v_2$ и $v_3$ – скорости распространения двух продольных волн и поперечной волны, при этом

$$v_{1,2}^2 =$$

$$= \frac{P\rho_{22} + \tilde{R}\rho_{11} - 2M\rho_{12} \pm \sqrt{(P\rho_{22} + \tilde{R}\rho_{11} - 2M\rho_{12})^2 - 4\delta(P\tilde{R} - M^2)}}{2\delta}$$

$$v_3 = \sqrt{L\rho_{22}/\delta}. \tag{2.8}$$

Для удовлетворения нулевых начальных данных (2.2) из точек ветвления $\eta = \pm iv_1$, $\eta = \pm iv_2$ и $\eta = \pm iv_3$ проводятся разрезы в левую полуплоскость $\eta$, а основные ветви фиксированы условиями $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \beta(0) = 1$.

Для исследований и расчета волнового поля в среде Био полезно представить потенциалы $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\vec{\psi}$ также в виде выражений типа Стокса. С этой целью используем формулу [9]

$$\frac{e^{-\gamma R}}{R} = \int\limits_0^\infty kJ_0(kr)\frac{e^{-|z|\sqrt{k^2+\gamma^2}}}{\sqrt{k^2+\gamma^2}}\,dk, \tag{2.9}$$

в которой $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ – сферический радиус. Из формулы (2.9) следует соотношение [4]

$$\frac{f(t - R/v)}{R} = \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(k\eta)e^{k(t\eta - |z|\alpha)}}{\alpha}\,d\eta, \tag{2.10}$$

выполняющееся при произвольной функции $f(t)$, определенной при $t \geqslant 0$, при этом

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v^2}}, \quad F(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-k\eta t}\,d\eta. \tag{2.11}$$

Если соотношение (2.10) дважды проинтегрировать по $t$, а затем полученный результат однократно продифференцировать по $z$ и $r$, то придем к результатам

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\eta^2}\, d\eta = \\
= -\operatorname{sign} z \left(\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{R}\right) \int\limits_{R/v}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau, \\
\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\alpha\eta^2}\, d\eta = \\
= -\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{R}\right) \int\limits_{R/v}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau.
\end{gathered} \tag{2.12}$$

При использовании формул (2.12) выражения для потенциалов $\varphi_1$, $\varphi_2$ и $\psi_\theta$ в среде Био переходят в соотношения

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \\
= \frac{1}{4\pi(A_2-A_1)\delta}\left(\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{1}{R}\right)\left[\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix}(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\int\limits_{R/v_1}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau - \right. \\
\left. - \begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix}(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\int\limits_{R/v_2}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau\right],
\end{gathered} \tag{2.13}$$

$$\psi_\theta = -\frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{R}\right)\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau.$$

Для перехода к декартовой системе координат заменим $\psi_\theta$ на потенциалы

$$\psi_x = -\psi_\theta \sin\theta, \quad \psi_y = \psi_\theta\cos\theta, \quad \psi_z = 0 \tag{2.14}$$

и для них получим выражения

$$\begin{aligned}
\psi_x &= \frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R}\right)\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau,\\
\psi_y &= -\frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R}\right)\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Равенства (2.13) и (2.15) описывают потенциалы в форме Стокса для среды Био, возбужденной источником (2.1).

Аналогичный источник, приложенный к жидкой фазе, не рассматривается, так как его задание не соответствует физическим представлениям о волновом поле в жидкостях и жидких фазах [3]. В самом деле, волновое поле в жидкости и жидкой фазе является потенциальным, а источник в виде сосредоточенной силы имеет вихревую составляющую. Второй элементарный источник, действующий в среде Био, представляет собой центр давлений, приложенных к жидкой фазе. Этот источник задается на сфере $R = R_0$ соотношениями

$$[\sigma^{(1)}] = \frac{3f(t)}{4\pi R_0^3}, \quad [\sigma_{RR}^{(2)}] = 0, \quad [u_R^{(1)}] = [u_R^{(2)}] = 0, \tag{2.16}$$

в которых символ [ ] выражает также скачок функций, стоящих внутри квадратных скобок. Для такого источника определяется волновое поле, в котором совершается предельный переход при $R_0 \to 0$. Исследование источника (2.16) с учетом предельного перехода подробно было проведено в работе [4], а образующееся волновое поле, согласно указанной работе, представляется соотношениями

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} &= \frac{1}{4\pi(A_2-A_1)\delta R}\left[\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix}\frac{\rho_{11}A_2+\rho_{12}}{v_1^2}\,f\left(t-\frac{R}{v_1}\right)-\right.\\
&\quad\left.-\begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix}\frac{\rho_{11}A_1+\rho_{12}}{v_2^2}\,f\left(t-\frac{R}{v_2}\right)\right], \quad \psi_\theta = 0.
\end{aligned}\tag{2.17}$$

Эти же величины с помощью интегральной формулы (2.10) выразятся равенствами

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + X_2 e^{-k|z|\alpha_2}) e^{kt\eta}\, d\eta, \\ \varphi_2 &= \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (A_1 X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + A_2 X_2 e^{-k|z|\alpha_2}) e^{kt\eta}\, d\eta,\end{aligned} \tag{2.18}$$

в которых

$$X_1 = \frac{(\rho_{11}A_2 + \rho_{12})F(k\eta)}{4\pi v_1^2 (A_2 - A_1)\delta\alpha_1}, \quad X_2 = -\frac{(\rho_{11}A_1 + \rho_{12})F(k\eta)}{4\pi v_2^2 (A_2 - A_1)\delta\alpha_2}. \tag{2.19}$$

Если выполняются условия (1.5), то источник (2.1) возбуждает волны только в упругой фазе, а от источника (2.16) распространяются волны в одной жидкой фазе. При дополнительном предположении

$$P\rho_{22} > \tilde{R}\rho_{11}, \tag{2.20}$$

которое почти всегда выполняется, имеют место равенства

$$v_1^2 = P/\rho_{11}, \quad v_2^2 = \tilde{R}/\rho_{22}, \quad A_1 = \infty, \quad A_2 = 0. \tag{2.21}$$

С учетом соотношений $A_1 = \infty$, $A_2 = 0$ и $\rho_{12} = 0$ приходим к выражениям

$$\begin{aligned}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 &= \frac{\operatorname{sign} z}{4\pi\rho_{11}} \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\eta^2}\, e^{k(t\eta - |z|\alpha_1)} d\eta, \\ \psi_\theta &= \frac{1}{4\pi\rho_{11}} \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\beta\eta^2}\, e^{k(t\eta - |z|\beta)} d\eta,\end{aligned} \tag{2.22}$$

записанным на основании формул (2.5)–(2.7) и описывающим упругие волны в скелете от источника (2.1). Те же величины представляются равенствами в форме Стокса

$$\begin{aligned}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 &= \frac{z}{4\pi\rho_{11}R^3} \int\limits_{R/v_1}^{t} \tau f(t-\tau) d\tau, \\ \psi_\theta &= \frac{r}{4\pi\rho_{11}R^3} \int\limits_{R/v_3}^{t} \tau f(t-\tau) d\tau.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Выражения (2.22) и (2.23) описывают потенциалы волнового поля в упругой среде с плотностью $\rho_{11}$ и скоростями распространения $v_1$ и $v_3$. Соотношения (2.23) соответствуют формулам (4.21) и (4.22) вида Стокса работы [6] для упругой среды, возбужденной сосредоточенной силой.

После аналогичного предельного перехода в формулах (2.17) и (2.18) приходим к равенствам

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\rho_{22}v_2^2 R} f\left(t - \frac{R}{v_2}\right), \quad \varphi_2 = 0, \quad \psi_\theta = 0; \tag{2.24}$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\rho_{22}v_2^2} \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(k\eta) \frac{e^{k(t\eta - |z|\alpha_2)}}{\alpha_2}\, d\eta, \tag{2.25}$$
$$\varphi_2 = 0,\ \psi_\theta = 0,$$

описывающим волновое поле в жидкости с плотностью $\rho_{22}$ и скоростью распространения $v_2$ от источника типа центра давления. Формулы (2.24) и (2.25) соответствуют соотношениям работы [10]. В заключение отметим, что при выполнении неравенства, обратного (2.20), и при условиях (1.5) волновые поля в среде Био также переходят в волновые поля в упругой и жидкой средах.

## §3. Об источниках в виде пар сил, действующих на упругую фазу

**1**. Пусть среда Био возбуждается двумя противоположно направленными силами и приложенными в точках $r = 0$, $z = R_0$ и $r = 0$, $z = -R_0$. Оба источника задаются равенствами

$$[\sigma_{zz}^{(2)}] = \pm\frac{\delta(r)f(t)}{4\pi r R_0}, \quad [\sigma_{zr}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \quad [u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_r^{(2)}] = 0 \tag{3.1}$$

при $z = \pm R_0$, а символ [ ] выражает скачки функций, стоящих в квадратных скобках, на плоскостях $z = \pm R_0$. В волновом поле, удовлетворяющем условиям (3.1) и (2.2), необходимо совершить предельный переход при $R_0 \to 0$. Исследование этого источника, проведенное в работе [4], показывает, что для перехода от волнового поля источника (2.1) к волновому полю источника (3.1) достаточно продифференцировать выражения (2.5) и (2.13) по $z$ и изменить в них знак.

Согласно этому правилу, потенциалы выразятся формулами Стокса

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} &= \frac{\rho_{12}A_2+\rho_{22}}{4\pi(A_2-A_1)\delta R^3}\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix}\left[\frac{r^2-2z^2}{R^2}\times\right.\\ &\times\left.\int\limits_{R/v_1}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau-\frac{z^2}{v_1^2}f\left(t-\frac{R}{v_1}\right)\right]-\frac{\rho_{12}A_1+\rho_{22}}{R^2}\times\\ &\times\begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix}\left[\frac{r^2-2z^2}{R^2}\int\limits_{R/v_2}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau-\frac{z^2}{v_2^2}f\left(t-\frac{R}{v_2}\right)\right],\\ \psi_x &= -\frac{\rho_{22}yz}{4\pi\delta R^3}\left[\frac{3}{R^2}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau+\frac{1}{v_3^2}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right],\\ \psi_y &= \frac{\rho_{22}xz}{4\pi\delta R^3}\left[\frac{3}{R^2}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau+\frac{1}{v_3^2}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.2}$$

Аналогичные соотношения с использованием интегралов Фурье–Бесселя и Меллина представятся равенствами

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\int\limits_0^\infty\frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(\alpha_1X_1e^{-k|z|\alpha_1}+\alpha_2X_2e^{-k|z|\alpha_2})e^{kt\eta}\,d\eta,\\ \varphi_2 &= -\int\limits_0^\infty\frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(A_1\alpha_1X_1e^{-k|z|\alpha_1}+A_2\alpha_2X_2e^{-k|z|\alpha_2})e^{kt\eta}\,d\eta,\\ \psi_\theta &= -\mathrm{sign}\,z\int\limits_0^\infty\frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\beta Y e^{-k|z|\beta}e^{kt\eta}\,d\eta,\end{aligned} \tag{3.3}$$

в которых функции $X_1$, $X_2$ и $Y$ выражаются соотношениями (2.6). Подход, основанный на наложении волновых полей, возбуждаемых источниками одного типа, может быть также использован для определения поля от источников, представляющих собой диполи и квадруполи общего вида. Мы же ограничимся рассмотрением двух и трех пар противоположно направленных сил.

**2**. Пусть среда Био возбуждается тремя парами сил, действующими вдоль трех координатных осей,

$$
\begin{gathered}
[\sigma_{zz}^{(2)}] = \pm\frac{\delta(x)\delta(y)f(t)}{2R_0}, \quad [\sigma_{xz}^{(2)}] = [\sigma_{yz}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \\
[u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_x^{(2)}] = [u_y^{(2)}] = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm R_0; \\
[\sigma_{xx}^{(2)}] = \pm\frac{\delta(y)\delta(z)f(t)}{2R_0}, \quad [\sigma_{xy}^{(2)}] = [\sigma_{xz}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \\
[u_x^{(1)}] = [u_x^{(2)}] = [u_y^{(2)}] = [u_z^{(2)}] = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm R_0; \\
[\sigma_{yy}^{(2)}] = \pm\frac{\delta(x)\delta(z)f(t)}{2R_0}, \quad [\sigma_{yz}^{(2)}] = \sigma_{xy}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \\
[u_y^{(1)}] = [u_y^{(2)}] = [u_x^{(2)}] = [u_z^{(2)}] = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm R_0.
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Первая пара сил, определенная условиями (3.4), совпадает с силами, заданными соотношениями (3.1), и создает волновое поле, которое после предельного перехода при $R_0 \to 0$ характеризуется формулами (3.2). Чтобы выразить потенциалы волновых полей, возбужденных второй и третьей парами сил, используем циклическую перестановку. Не выписывая явных выражений последних потенциалов, произведем сложение потенциалов для всех трех сил. При этом сложении взаимно сократятся составляющие потенциала $\vec{\psi}$ и интегральные члены в формулах (3.2). В результате приходим к равенствам

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4\pi(A_2 - A_1)\delta R} \Bigg[ \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \frac{\rho_{12}A_2 + \rho_{22}}{v_1^2} f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) - \\
- \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \frac{\rho_{12}A_1 + \rho_{22}}{v_2^2} f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) \Bigg],
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

определяющим волновое поле потенциалов в случае источника (3.4).

Полученные формулы (3.5) совпадают с соотношениями для потенциалов в случае рассмотренного в работе [4] источника

$$
[\sigma_{RR}^{(2)}] = \frac{3f(t)}{4\pi R_0^3}, \quad [\sigma^{(1)}] = 0, \quad [u_R^{(1)}] = [u_R^{(2)}] = 0 \tag{3.6}
$$

центра давлений, действующих на упругую фазу, при этом скачки были заданы при $R = R_0$ и в волновом поле осуществлен предельный переход при $R_0 \to 0$. Таким образом, сосредоточенные источники в виде трех безмоментных пар сил и центра давлений, действующих на упругую фазу, оказываются эквивалентными. Потенциалы (3.5) с помощью интегральных преобразований выражаются соотношениями (2.18), в которых

$$X_1 = -\frac{(\rho_{12}A_2 + \rho_{22})F(k\eta)}{4\pi(A_2 - A_1)\delta v_1^2 \alpha_1}, \quad X_2 = \frac{(\rho_{12}A_1 + \rho_{22})F(k\eta)}{4\pi(A_2 - A_1)\delta v_2^2 \alpha_2}. \tag{3.7}$$

**3.** Рассмотрим теперь источник, состоящий из двух пар сил, действующих вдоль осей $x$ и $y$, и заданный условиями (3.4) при $x = \pm R_0$ и $y = \pm R_0$. Используя циклические перестановки в формулах (3.2) и складывая выражения потенциалов, получим после предельного перехода при $R_0 \to 0$ соотношения

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi(A_2 - A_1)\delta}\Bigg\{(\rho_{12}A_2 + \rho_{22})\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix}\left[\frac{2z^2 - r^2}{R^5}\int\limits_{R/v_1}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau - \right.\\
\left. - \frac{r^2}{v_1^2 R^3} f\left(t - \frac{R}{v_1}\right)\right] - (\rho_{12}A_1 + \rho_{22})\begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix}\left[\frac{2z^2 - r^2}{R^5}\int\limits_{R/v_2}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau - \right.\\
\left. - \frac{r^2}{v_2^2 R^3} f\left(t - \frac{R}{v_2}\right)\right]\Bigg\},\\
\psi_\theta = -\frac{\rho_{22} r z}{4\pi\delta R^3}\left[\frac{3}{R^2}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{1}{v_3^2} f\left(t - \frac{R}{v_3}\right)\right],
\end{gathered} \tag{3.8}$$

определяющие волновое поле. Выражения (3.8) с помощью интегралов Фурье–Бесселя и Меллина могут быть записаны в виде равенств

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}(X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + X_2 e^{-k|z|\alpha_2})e^{kt\eta}\, d\eta,\\
\varphi_2 &= \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}(A_1X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + A_2X_2 e^{-k|z|\alpha_2})e^{kt\eta}\, d\eta,\\
\psi_\theta &= \operatorname{sign} z\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} Y e^{-k|z|\beta} e^{kt\eta} d\eta,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

в которых

$$X_1 = \frac{\rho_{12}A_2 + \rho_{22}}{4\pi(A_2 - A_1)\delta\alpha_1\eta^2}, \quad X_2 = -\frac{\rho_{12}A_1 + \rho_{22}}{4\pi(A_2 - A_1)\delta\alpha_2\eta^2},$$
$$Y = -\frac{\rho_{22}}{4\pi\delta\eta^2}. \tag{3.10}$$

Соотношения (3.9) и (3.10), согласно работе [4], описывают волновое поле в случае источника, который является центром радиальных касательных сил на плоскости $z = 0$. Этот источник задается на плоскости $z = 0$ условиями

$$[\sigma_{rz}^{(2)}] = \frac{3n^4 r f(t)}{4\pi(1 + n^2r^2)^{5/2}}, \quad [\sigma_{zz}^{(2)}] = [\sigma_{\theta z}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0,$$
$$[u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_r^{(2)}] = 0, \tag{3.11}$$

а в построенном волновом поле следует совершить предельный переход при $n \to \infty$ [4]. Таким образом, последние две пары сил эквивалентны по своему действию центру радиальных касательных сил на плоскости.

**4.** Перейдем к рассмотрению пары сил, обладающей моментом, изображенной схематически на Рис. 1 и заданной условиями

$$[\sigma_{zz}^{(2)}] = \frac{\delta(x - R_0)\delta(y)f(t)}{4\pi R_0} - \frac{\delta(x + R_0)\delta(y)f(t)}{4\pi R_0}, \tag{3.12}$$

$$[\sigma_{zx}^{(2)}] = [\sigma_{zy}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \quad [u_z^{(1)}] = [u_z^{(2)}] = [u_x^{(2)}] = [u_y^{(2)}] = 0$$

при $z = 0$. В волновом поле, удовлетворяющем условиям (3.12), необходимо совершить предельный переход при $R_0 \to 0$. Для нахождения предельного волнового поля учитываются формулы (2.13) и (2.15). С помощью рассуждений, используемых при выводе волнового поля от пары сил приходим к выводу, что для получения выражений потенциалов в этом случае достаточно продифференцировать правые части (2.13) и (2.15) по $x$ и изменить знак на обратный. В результате приходим к соотношениям

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \frac{\rho_{12}A_2 + \rho_{22}}{4\pi(A_2 - A_1)\delta} \left[ \frac{3xz}{R^5} \int\limits_{R/v_1}^{t} \tau f(t - \tau) d\tau + \frac{xz}{v_1^2 R^3} f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) \right] +$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \frac{\rho_{12}A_1 + \rho_{22}}{4\pi(A_2 - A_1)\delta} \left[ \frac{3xz}{R^5} \int\limits_{R/v_2}^{t} \tau f(t - \tau) d\tau + \frac{xz}{v_2^2 R^3} f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) \right]; \tag{3.13}$$

$$\psi_x = -\frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left[\frac{3xy}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{xy}{v_3^2R^3}\,f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right],$$

$$\psi_y = \frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left[\frac{2x^2-y^2-z^2}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{x^2}{v_3^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right] \tag{3.14}$$

для потенциалов волнового поля.

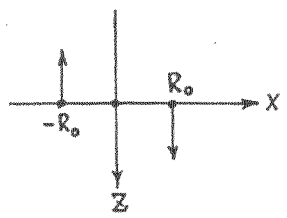



Рис. 1

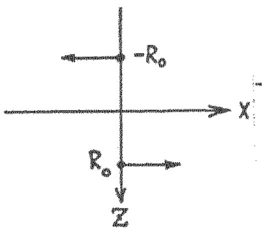



Рис. 2

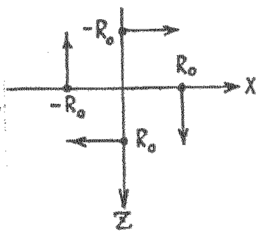



Рис. 3.

**5.** Рассмотрим другую пару сил, изображенную на Рис. 2 и заданную условиями

$$\begin{gathered}[\sigma_{xx}^{(2)}] = \frac{\delta(z-R_0)\delta(y)f(t)}{2\pi R_0} - \frac{\delta(z+R_0)\delta(y)f(t)}{2\pi R_0},\\ [\sigma_{zx}^{(2)}] = [\sigma_{xy}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \quad [u_x^{(1)}] = [u_x^{(2)}] = [u_y^{(2)}] = [u_z^{(2)}] = 0\end{gathered} \tag{3.15}$$

при $x=0$. Чтобы получить волновое поле при $R_0 \to 0$ необходимо в формулах (2.13) и (2.15) осуществить циклическую перестановку, когда координаты $x, y, z$ заменяются соответственно на $y, z, x$, а полученные выражения заменить на производные по $z$ с обратным знаком. Окончательные результаты для $\varphi_1$ и $\varphi_2$ выразятся соотношениями (3.13), а составляющие векторного потенциала представятся равенствами

$$\begin{aligned} \psi_y &= \frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left[\frac{r^2-2z^2}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{z^2}{v_3^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right], \\ \psi_z &= \frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left[\frac{3yz}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{yz}{v_3^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

**6.** Пусть среда Био возбуждается источником (3.12) и источником (3.15), при этом в последнем источнике у функции $f(t)$ знак заменен на обратный (Рис. 3). Как и в других случаях, определяется предельное волновое поле при $R_0 \to 0$. Выражения для продольных потенциалов $\varphi_1$ и $\varphi_2$ обращаются в нуль, а составляющие векторного потенциала $\vec{\psi}$ представляются равенствами

$$\begin{aligned} \psi_x &= -\frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left[\frac{3xy}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{xy}{v_3^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right], \\ \psi_y &= \frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left[\frac{x^2-2y^2+z^2}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{x^2+z^2}{v_3^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right], \\ \psi_z &= -\frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\left[\frac{3yz}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{yz}{v_3^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Формулы (3.17) могут быть упрощены, если использовать свойство векторного потенциала, что к нему можно прибавить градиент любой функции и при этом волновое поле не изменится. В качестве такой функции выберем:

$$\phi = -\frac{\rho_{22}}{4\pi\delta}\frac{y}{R^3}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau. \tag{3.18}$$

Тогда выражения (3.17) заменятся соотношениями

$$\psi_x = \psi_z = 0, \quad \psi_y = \frac{1}{v_3^2R}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right), \tag{3.19}$$

которые описывают волновое поле, вызванное центром вращения вокруг оси $y$.

## §4. Источники в виде разрывов смещений

**1.** Наряду с источниками в виде сосредоточенных сил рассмотрим также источники, связанные с разрывами смещений в обеих фазах среды Био. Пусть в среде Био действует источник, заданный граничными условиями

$$\begin{aligned} &[u_z^{(2)}] = \frac{f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad [\sigma_{zz}^{(2)}] = [\sigma_{rz}^{(2)}] = [\sigma_{\theta z}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \\ &[u_z^{(1)}] = [u_r^{(2)}] = [u_\theta^{(2)}] = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

при $z = 0$ и представляющий собой разрыв смещений $u_z^{(2)}$ в направлении оси $z$. Потенциалы в этом случае выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + X_2 e^{-k|z|\alpha_2}) e^{kt\eta}\, d\eta, \\ \varphi_2 &= \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (A_1X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + A_2X_2 e^{-k|z|\alpha_2}) e^{kt\eta}\, d\eta, \\ \psi_\theta &= \operatorname{sign} z \int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y e^{-k|z|\beta} e^{kt\eta}\, d\eta, \end{aligned} \tag{4.2}$$

в которых функции $X_1, X_2$ и $Y$ представляются равенствами

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{v_3^2(\rho_{22}g + 2A_2\rho_{12})F(k\eta)}{4\pi(A_2 - A_1)\rho_{22}\alpha_1\eta^2}, \quad X_2 = -\frac{v_3^2(\rho_{22}g + 2A_1\rho_{12})F(k\eta)}{4\pi(A_2 - A_1)\rho_{22}\alpha_2\eta^2}, \\ Y &= -\frac{v_3^2 F(k\eta)}{2\pi\eta^2}, \quad g = 2 + \frac{\eta^2}{v_3^2}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где использованы обозначения (2.6)–(2.8).

Чтобы записать выражения для потенциалов (4.2) от источника (4.1) в форме Стокса необходимо использовать дополнительные соотношения

$$\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\alpha\eta^2} F(k\eta)\,d\eta =$$

$$= \frac{2z^2-r^2}{R^5} \int\limits_{R/v}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau - \frac{r^2}{v^2R^3} f\left(t-\frac{R}{v}\right),$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\eta^2} F(k\eta)d\eta = \tag{4.4}$$

$$= \frac{3r|z|}{R^5} \int\limits_{R/v}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau + \frac{r|z|}{v^2R^3} f\left(t-\frac{R}{v}\right),$$

которые получаются из второго равенства (2.12), если на обе части этого равенства подействовать операторами $\partial/\partial r + 1/r$ и $\partial/\partial z$. На основании формул (4.2), (4.3) и при использовании соотношений (2.10), (2.12) и (4.4) записываются выражения

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi(A_2-A_1)R}\left\{\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix}\left[f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) - \frac{2v_3^2(A_2\rho_{12}+\rho_{22})r^2}{\rho_{22}R^2v_1^2} f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{2v_3^2(A_2\rho_{12}+\rho_{22})(r^2-2z^2)}{\rho_{22}R^4} \int\limits_{R/v_1}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau\right] - \begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix}\left[f\left(t-\frac{R}{v_2}\right) - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{2v_3^2(A_1\rho_{12}+\rho_{22})r^2}{\rho_{22}R^2v_2^2} f\left(t-\frac{R}{v_2}\right) - \frac{2v_3^2(A_1\rho_{12}+\rho_{22})(r^2-2z^2)}{\rho_{22}R^4} \int\limits_{R/v_2}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau\right]\right\}, \tag{4.5}$$

$$\psi_x = \frac{yz}{2\pi R^3}\left[f\left(t-\frac{R}{v_3}\right) + \frac{3v_3^2}{R^2}\int\limits_{R/v_3}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau\right],$$

$$\psi_y = -\frac{xz}{2\pi R^3}\left[f\left(t-\frac{R}{v_3}\right) + \frac{3v_3^2}{R^2}\int\limits_{R/v_3}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau\right]$$

для потенциалов в форме Стокса.

Согласно работе [10], волновое поле (4.5) может быть представлено как наложение волновых полей трех источников: 1) пары сил (3.1), действующих вдоль оси $z$; 2) центра давлений (3.4), действующих на упругую фазу и 3) центра давлений (2.16), действующих на жидкую фазу. Все три источника расположены в начале координат, определяются одинаковой временной функцией $f(t)$ с соответствующими коэффициентами $2L$, $A$ и $M$. При доказательстве этого факта полезно использовать соотношения

$$\frac{\rho_{22}+\rho_{12}A_{2,1}}{v_{1,2}^2\delta} = \frac{MA_{2,1}+\tilde{R}}{P\tilde{R}-M^2}, \quad \frac{\rho_{11}A_{2,1}+\rho_{12}}{v_{1,2}^2\delta} = \frac{PA_{2,1}+M}{P\tilde{R}-M^2}, \tag{4.6}$$

установленные в работе [4].

В частном случае, когда в среде Био выполяются условия (1.5) и отсутствует связь между волнами в обеих фазах, $\varphi_1 = 0$, потенциал $\varphi_2$ на основании формул (4.2), (4.3) и (4.5) представляется соотношениями

$$\varphi_2 = -\frac{1}{4\pi R}\left(1-\frac{2v_3^2r^2}{v_1^2R^2}\right) f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) + \frac{v_3^2(r^2-2z^2)}{2\pi R^5}\int\limits_{R/v_1}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau,$$

$$\varphi_2 = -\frac{v_3^2}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{gF(k\eta)}{\alpha_1\eta^2}e^{k(t\eta-|z|\alpha_1)}\,d\eta, \tag{4.7}$$

а составляющие векторного потенциала по-прежнему выражаются равенствами (4.2), (4.3) и (4.5). Соотношения (4.7) и формулы (4.2), (4.3) и (4.5) для потенциалов $\psi_\theta$, $\psi_x$ и $\psi_y$ определяют волновое поле в упругой среде в случае источника (4.1).

**2.** Источник, связанный с разрывом смещений в жидкой фазе, задается граничными условиями

$$[u_z^{(1)}] = \frac{\delta(r)f(t)}{2\pi r}, \quad [u_z^{(2)}] = [u_r^{(2)}] = 0, \quad [\sigma_{zz}^{(2)}] = [\sigma_{rz}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0. \tag{4.8}$$

Потенциалы образующегося поля представляются интегральными соотношениями (4.2), в которых

$$X_1 = -\frac{A_2F(k\eta)}{4\pi(A_2-A_1)\alpha_1}, \quad X_2 = \frac{A_1F(k\eta)}{4\pi(A_2-A_1)\alpha_2}, \quad Y=0, \tag{4.9}$$

или выражаются равенствами

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = -\frac{1}{4\pi(A_2-A_1)R}\left[A_2\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix} f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) - \right. \\ \left. -A_1\begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix} f\left(t-\frac{R}{v_2}\right)\right]. \tag{4.10}$$

Волновое поле от источника (4.8), согласно работе [10], может быть представлено как наложение волновых полей двух источников: 1) центра давлений (3.4), действующих на упругую фазу и 2) центра давлений (2.16), действующих на жидкую фазу. Оба источника расположены в начале координат и определяются временной функцией $f(t)$ с соответствующими коэффициентами $M$ и $\tilde{R}$. В частном случае, когда выполняются условия (1.5), $\varphi_2 = 0$, а потенциал $\varphi_1$ представляется равенствами

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi R} f\left(t-\frac{R}{v_2}\right) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_2}e^{k(t\eta-|z|\alpha_2)}\,d\eta. \tag{4.11}$$

**3.** Пусть в среде Био действует источник, связанный с разрывом касательного смещения в упругой фазе и заданный условиями

$$\begin{gathered}[u_x^{(2)}] = \frac{\delta(r)f(t)}{2\pi r}, \quad [u_y^{(2)}] = 0, \quad [\sigma_{zz}^{(2)}] = [\sigma^{(1)}] = 0, \\ [u_z^{(2)}] = [u_z^{(1)}] = 0, \quad [\sigma_{zx}^{(2)}] = [\sigma_{zy}^{(2)}] = 0.\end{gathered} \tag{4.12}$$

При построении волнового поля полезно использовать результаты работ [11, 12], посвященных исследованию действия касательных сил в упругих средах, а также четность или нечетность относительно $z$ всех образующихся потенциалов, смещений и напряжений. Вследствие того, что $u_z^{(2)}$, $u_z^{(1)}$, $\sigma_{zx}^{(2)}$ и $\sigma_{zy}^{(2)}$ являются четными и непрерывными, последние четыре условия (4.12) выполняются автоматически, и задача состоит в удовлетворении только первых четырех условий (4.12). С этой целью приведем соотношения

$$
\begin{aligned}
&u_r^{(2)} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial\psi_y}{\partial z},\\
&u_\theta^{(2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial\psi_y}{\partial z},\\
&\sigma^{(1)} = \rho_{12}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2},\\
&\sigma_{zz}^{(2)} = \rho_{11}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t^2} -\\
&\qquad - 2L\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2} - \cos\theta\frac{\partial^2\psi_y}{\partial r\partial z} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial\theta\partial z}\right),
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

позволяющие выразить смещения и напряжения, входящие в первые четыре условия (4.12), через потенциалы. Сами потенциалы на основании граничных условий представляются равенствами

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = -\mathrm{sign}\, z\cos\theta\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix}X_1e^{-k|z|\alpha_1} +\right.\\
&\qquad\left. + \begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix}X_2e^{-k|z|\alpha_2}\right]e^{kt\eta}d\eta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\psi_y = \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Ye^{-k|z|\beta}e^{kt\eta}\,d\eta,\\
&\psi_z = -\mathrm{sign}\, z\sin\theta\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\beta Ze^{kt\eta-k|z|\beta}\,d\eta,
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

в которых функции $X_1, X_2, Y$ и $Z$ выражаются формулами

$$
\begin{aligned}
&X_1 = -\frac{L(\rho_{12}A_2+\rho_{22})F(k\eta)}{2\pi\delta(A_2-A_1)\eta_2}, \quad X_2 = \frac{L(\rho_{12}A_1+\rho_{22})F(k\eta)}{2\pi\delta(A_2-A_1)\eta^2},\\
&Z = \frac{v_3^2F(k\eta)}{2\pi\beta\eta^2}, \quad Y = \frac{v_3^2 gF(k\eta)}{4\pi\beta\eta^2}.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Если использовать интегральные соотношение (2.10) и (2.12), то выражения (4.14) с учетом (4.15) переходят в равенства

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \frac{L\cos\theta}{2\pi\delta(A_2-A_1)}\left\{\begin{pmatrix}1\\ A_1\end{pmatrix}(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\left[\frac{3rz}{R^5}\int\limits_{R/v_1}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau+\right.\right.\\
\left.+\frac{rz}{v_1^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_1}\right)\right]-\begin{pmatrix}1\\ A_2\end{pmatrix}(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\left[\frac{3rz}{R^5}\int\limits_{R/v_2}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau+\right.\\
\left.\left.+\frac{rz}{v_2^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_2}\right)\right]\right\},\\
\psi_y=\frac{v_3^2}{2\pi}\left[\frac{2z^2-r^2}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau+\frac{z^2-r^2}{2R^3v_3^2}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right],\\
\psi_z=-\frac{v_3^2}{2\pi}\left[\frac{3yz}{R^5}\int\limits_{R/v_3}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau+\frac{yz}{R^3v_3^2}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right],
\end{gathered}\tag{4.16}$$

которые, как и формулы (4.5) и (4.10), могут рассматриваться, как формулы Стокса для среды Био. В частном случае, когда выполняются условия (1.5), $\varphi_1=0$, потенциал $\varphi_2$ выражается формулами

$$\begin{gathered}
\varphi_2=-\frac{v_3^2\cos\theta}{2\pi}\left[\frac{3rz}{R^5}\int\limits_{R/v_1}^{t}\tau f(t-\tau)d\tau+\frac{rz}{v_1^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_1}\right)\right]=\\
=-\frac{v_3^2\cos\theta\,\mathrm{sign}\,z}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\eta^2}e^{kt\eta-k|z|\alpha_1}d\eta,
\end{gathered}\tag{4.17}$$

а потенциалы $\psi_y$ и $\psi_z$ по-прежнему представляются равенствами (4.14) и (4.16).

Волновое поле (4.16) образуется также и в случае источника, содержащего две пары сил (Рис. 4) и заданного условиями (3.12) и (3.15), при этом временная функция в этих условиях содержит дополнительный множитель $L$. При проверке этого утверждения необходимо от векторного потенциала отнять градиент функции

(3.18). Таким образом, все три источника в виде скачков смещений эквивалентны силовым источникам. В этих эквивалентных источниках суммарные силы и суммарные моменты равны нулю, что является следствием общих законов механики.

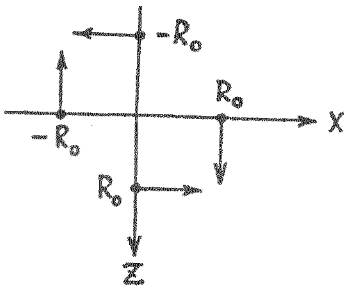



Рис. 4.

## §5. Поля смещений

В настоящем параграфе приведем формулы для поля смещений в случае источников в виде сосредоточенной силы и сосредоточенных разрывов смещений. Эти формулы будут представлены, как правило, в виде интегральных преобразований и в форме Стокса.

**1.** В случае источника в виде сосредоточенной силы, заданной граничными условиями (2.1), поле смещений, согласно соотношениям (2.4) и (2.5), представится равенствами

$$\begin{pmatrix} u_z^{(1)} \\ u_z^{(2)} \end{pmatrix} = -\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \alpha_1 X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \alpha_2 X_2 e^{-k|z|\alpha_2} + \begin{pmatrix} \rho_{12}/\rho_{22} \\ -1 \end{pmatrix} Y e^{-k|z|\beta} \right] e^{kt\eta}\, d\eta, \tag{5.1}$$

$$\begin{pmatrix} u_r^{(1)} \\ u_r^{(2)} \end{pmatrix} = -\operatorname{sign} z \int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} X_2 e^{-k|z|\alpha_2} + \begin{pmatrix} \rho_{12}/\rho_{22} \\ -1 \end{pmatrix} Y e^{-k|z|\beta} \right] e^{kt\eta}\, d\eta,$$

в которых использованы обозначения (2.6)–(2.8). Если применить формулы (4.4) и соотношение

$$\int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\alpha F(k\eta)e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\eta^2}d\eta = \\ = \frac{2z^2-r^2}{R^5}\int_{R/v}^{\tau}\tau f(t-\tau)d\tau + \frac{z^2}{v^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v}\right), \tag{5.2}$$

то равенства (5.1) заменятся выражениями

$$\begin{pmatrix} u_z^{(1)} \\ u_z^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\delta(A_2-A_1)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} + \right. \\ + \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\frac{(\rho_{12}A_2+\rho_{22})z^2}{v_1^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) - \\ - \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}\frac{(\rho_{12}A_1+\rho_{22})z^2}{v_2^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_2}\right) + \\ \left. + \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ -\rho_{22} \end{pmatrix}\frac{(A_2-A_1)r^2}{v_3^2R^3}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right\}, \\ \begin{pmatrix} u_x^{(1)} \\ u_x^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\delta(A_2-A_1)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} + \right. \\ + \frac{xz}{R^3}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\frac{(\rho_{12}A_2+\rho_{22})}{v_1^2}f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) - \right. \\ \left. \left. - \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}\frac{\rho_{12}A_1+\rho_{22}}{v_2^2}f\left(t-\frac{R}{v_2}\right) - \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ -\rho_{22} \end{pmatrix}\frac{(A_2-A_1)}{v_3^2}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right\}, \tag{5.3}$$

где

$$\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}(\rho_{12}A_2+\rho_{22})\int_{R/v_1}^{R/v_3}\tau f(t-\tau)d\tau - \\ - \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}(\rho_{12}A_1+\rho_{22})\int_{R/v_2}^{R/v_3}\tau f(t-\tau)d\tau. \tag{5.4}$$

В соотношениях (5.3) полезно в некоторых случаях произвести замену по формулам

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{R} = \frac{2z^2-r^2}{R^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\frac{1}{R} = \frac{3xz}{R^5}. \tag{5.5}$$

В частном случае, когда в среде Био выполняются условия (1.5), смещения в жидкой фазе обращаются в нули, а в упругой фазе выражаются соотношениями

$$
\begin{aligned}
u_z^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi\rho_{11}R^3}\left[\frac{2z^2-r^2}{R^2}\int\limits_{R/v_1}^{R/v_3}\tau f(t-\tau)d\tau + \right.\\
&\left. +\frac{z^2}{v_1^2}f\left(t-\frac{R}{v_2}\right)+\frac{r^2}{v_3^2}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right],\\
u_x^{(2)} &= -\frac{xz}{4\pi\rho_{11}R^3}\left[\frac{3}{R^2}\int\limits_{R/v_1}^{R/v_3}\tau f(t-\tau)d\tau + \right.\\
&\left. +\frac{1}{v_1^2}f\left(t-\frac{R}{v_1}\right)-\frac{1}{v_3^2}f\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

которые отличаются только знаком от соответствующих формул в монографии [6]. Указанное различие не является принципиальным, так как связано только со знаком силы в заданиях источников.

**2.** В случае разрыва смещений в упругой фазе (4.1) поле смещений, согласно соотношениям (2.4) и (4.2), представляется равенствами

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_z^{(1)} \\ u_z^{(2)} \end{pmatrix} &= -\operatorname{sign} z\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\alpha_1 X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + \right.\\
&\left. +\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}\alpha_2 X_2 e^{-k|z|\alpha_2}+\begin{pmatrix} \rho_{12}/\rho_{22} \\ -1 \end{pmatrix} Y e^{-k|z|\beta}\right] e^{kt\eta}\,d\eta,\\
\begin{pmatrix} u_r^{(1)} \\ u_r^{(2)} \end{pmatrix} &= -\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} X_1 e^{-k|z|\alpha_1} + \right.\\
&\left. +\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} X_2 e^{-k|z|\alpha_2}+\begin{pmatrix} \rho_{12}/\rho_{22} \\ -1 \end{pmatrix} Y e^{-k|z|\beta}\right] e^{kt\eta}\,d\eta,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

в которых применены обозначения (4.3), (2.6) и (2.7). При использовании формул

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta) \frac{e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\alpha\eta^2}\, d\eta = -\frac{r^3}{v^3 R^4} f'\left(t-\frac{R}{v}\right) + \\
+3r\frac{4z^2-r^2}{R^7} \int\limits_{R/v}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau + 2r\frac{2z^2-r^2}{v^2 R^5} f\left(t-\frac{R}{v}\right), \\
\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta) \frac{\alpha e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\eta^2}\, d\eta = -\frac{rz^2}{v^3 R^4} f'\left(t-\frac{R}{v}\right) + \\
+3r\frac{4z^2-r^2}{R^7} \int\limits_{R/v}^{t} \tau f(t-\tau)d\tau + r\frac{5z^2-r^2}{v^2 R^5} f\left(t-\frac{R}{v}\right), \\
\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(k\eta) \frac{e^{k(t\eta-|z|\alpha)}}{\alpha}\, d\eta = \\
= \frac{r}{R^3}\left[f\left(t-\frac{R}{v}\right) + \frac{R}{v} f'\left(t-\frac{R}{v}\right)\right]
\end{gathered}
\tag{5.8}
$$

равенства (5.7) переходят в соотношения

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} u_z^{(1)} \\ u_z^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{v_3^2}{2\pi\rho_{22}(A_2-A_1)R^7} \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3}\,\frac{1}{R}\right) \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} - \\
-\frac{1}{4\pi(A_2-A_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \left[\frac{z}{R^3} f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) + \frac{z}{v_1 R^2} f'\left(t-\frac{R}{v_1}\right)\right] + \\
+\frac{1}{4\pi(A_2-A_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \left[\frac{z}{R^3} f\left(t-\frac{R}{v_2}\right) + \frac{z}{v_2 R^2} f'\left(t-\frac{R}{v_2}\right)\right] - \\
-\frac{v_3^2(A_2\rho_{12}+\rho_{22})z}{2\pi\rho_{22}(A_2-A_1)v_1^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \left[\frac{2(z^2-2r^2)}{R} f\left(t-\frac{R}{v_1}\right) - \frac{r^2}{v_1} f'\left(t-\frac{R}{v_1}\right)\right] + \\
+\frac{v_3^2(A_1\rho_{12}+\rho_{22})z}{2\pi\rho_{22}(A_2-A_1)v_2^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \left[\frac{2(z^2-2r^2)}{R} f\left(t-\frac{r}{v_2}\right) - \frac{r^2}{v_2} f'\left(t-\frac{R}{v_2}\right)\right] + \\
+\frac{z}{2\pi\rho_{22}R^4} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ -\rho_{22} \end{pmatrix} \left[\frac{2(z^2-2r^2)}{R} f\left(t-\frac{R}{v_3}\right) - \frac{r^2}{v_3} f'\left(t-\frac{R}{v_3}\right)\right],
\end{gathered}
\tag{5.9}
$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_x^{(1)} \\ u_x^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{v_3^2}{2\pi\rho_{22}(A_2 - A_1)R^7}\left(\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\,\frac{1}{R}\right)\begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} - \\
&- \frac{1}{4\pi(A_2 - A_1)}\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\left[\frac{x}{R^3}\,f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) + \frac{x}{v_1R^2}\,f'\left(t - \frac{R}{v_1}\right)\right] + \\
&+ \frac{1}{4\pi(A_2 - A_1)}\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}\left[\frac{x}{R^3}f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) + \frac{x}{v_2R^2}\,f'\left(t - \frac{R}{v_2}\right)\right] + \\
&+ \frac{v_3^2(A_2\rho_{12} + \rho_{22})x}{2\pi\rho_{22}(A_2 - A_1)v_1^2R^4}\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\left[\frac{2(r^2 - 2z^2)}{R}\,f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) + \frac{r^2}{v_1}\,f'\left(t - \frac{R}{v_1}\right)\right] - \\
&- \frac{v_3^2(A_1\rho_{12} + \rho_{22})x}{2\pi\rho_{22}(A_2 - A_1)v_2^2R^4}\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}\left[\frac{2(r^2 - 2z^2)}{R}\,f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) + \frac{r^2}{v_2}\,f'\left(t - \frac{R}{v_2}\right)\right] - \\
&- \frac{x}{2\pi\rho_{22}R^4}\begin{pmatrix} \rho_{12} \\ -\rho_{22} \end{pmatrix}\left[\frac{r^2 - 5z^2}{R}\,f\left(t - \frac{R}{v_3}\right) - \frac{z^2}{v_3}\,f'\left(t - \frac{R}{v_3}\right)\right],
\end{aligned}$$

в которых использованы обозначения (5.4) и в которых полезно в некоторых случаях произвести замену

$$\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\,\frac{1}{R} = 3r\frac{r^2 - 4z^2}{R^7}, \qquad \frac{\partial^3}{\partial z^3}\,\frac{1}{R} = 3z\frac{3r^2 - 2z^2}{R^7}. \tag{5.10}$$

**3.** В случае сосредоточенного разрыва смещений в жидкой фазе (4.8) поле смещений представляется равенствами (5.5), в которых используются обозначения (4.9). Из этих соотношений следуют формулы

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_z^{(1)} \\ u_z^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{A_2 z}{4\pi(A_2 - A_1)R^2}\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{R}\,f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) + \frac{1}{v_1}\,f'\left(t - \frac{R}{v_1}\right)\right] - \\
&- \frac{A_1 z}{4\pi(A_2 - A_1)R^2}\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{R}\,f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) + \frac{1}{v_2}\,f'\left(t - \frac{R}{v_2}\right)\right], \\
\begin{pmatrix} u_x^{(1)} \\ u_x^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{A_2 x}{4\pi(A_2 - A_1)R^2}\begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{R}\,f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) + \frac{1}{v_1}\,f'\left(t - \frac{R}{v_1}\right)\right] - \\
&- \frac{A_1 x}{4\pi(A_2 - A_1)R^2}\begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix}\left[\frac{1}{R}\,f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) + \frac{1}{v_2}\,f'\left(t - \frac{R}{v_2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{5.11}$$

соответствующие представлению Стокса. Из равенств (4.10) и (5.8) следует, что волновое поле обладает сферической симметрией.

**4.** В случае сосредоточенного разрыва вдоль оси $z$ смещений

$u_x^{(2)}$ (4.12) ограничимся приведением лишь формул Стокса

$$\begin{pmatrix} u_x^{(1)} \\ u_x^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\rho_{22}} \left\{ \frac{v_3^2}{A_2 - A_1} \left( \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} \frac{1}{R} \right) \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} + \right.$$
$$+ \frac{v_3^2(\rho_{12}A_2 + \rho_{22})z}{(A_2 - A_1)v_1^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \left[ \frac{y^2 + z^2 - 5x^2}{R} f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) - \frac{x^2}{v_1} f'\left(t - \frac{R}{v_1}\right) \right] -$$
$$- \frac{v_3^2(\rho_{12}A_1 + \rho_{22})z}{(A_2 - A_1)v_2^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \left[ \frac{y^2 + z^2 - 5x^2}{R} f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) - \frac{x^2}{v_2} f'\left(t - \frac{R}{v_2}\right) \right] +$$
$$\left. + \frac{z}{2R^4} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ -\rho_{22} \end{pmatrix} \left[ 3\frac{3x^2 - y^2 - z^2}{R} f\left(t - \frac{R}{v_3}\right) + \frac{x^2 - y^2 - z^2}{v_3} f'\left(t - \frac{R}{v_3}\right) \right] \right\}, \tag{5.12}$$

$$\begin{pmatrix} u_y^{(1)} \\ u_y^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\rho_{22}} \left\{ \frac{v_3^2}{A_2 - A_1} \left( \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \frac{1}{R} \right) \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} - \right.$$
$$- \frac{v_3^2(\rho_{12}A_2 + \rho_{22})xyz}{(A_2 - A_1)v_1^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \left[ \frac{6}{R} f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) + \frac{1}{v_1} f'\left(t - \frac{R}{v_1}\right) \right] +$$
$$+ \frac{v_3^2(\rho_{12}A_1 + \rho_{22})xyz}{(A_2 - A_1)v_2^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \left[ \frac{6}{R} f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) + \frac{1}{v_2} f'\left(t - \frac{R}{v_2}\right) \right] +$$
$$\left. + \frac{xyz}{R^4} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ -\rho_{22} \end{pmatrix} \left[ \frac{6}{R} f\left(t - \frac{R}{v_3}\right) + \frac{1}{v_3} f'\left(t - \frac{R}{v_3}\right) \right] \right\},$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(1)} \\ u_z^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi\rho_{22}} \left\{ \frac{v_3^2}{A_2 - A_1} \left( \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} \frac{1}{R} \right) \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} + \right.$$
$$+ \frac{v_3^2(\rho_{12}A_1 + \rho_{22})x}{(A_2 - A_1)v_1^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_1 \end{pmatrix} \left[ \frac{r^2 - 5z^2}{R} f\left(t - \frac{R}{v_1}\right) - \frac{z^2}{v_1} f'\left(t - \frac{R}{v_1}\right) \right] -$$
$$- \frac{v_3^2(\rho_{12}A_2 + \rho_{22})x}{(A_2 - A_1)v_2^2 R^4} \begin{pmatrix} 1 \\ A_2 \end{pmatrix} \left[ \frac{r^2 - 5z^2}{R} f\left(t - \frac{R}{v_2}\right) - \frac{z^2}{v_2} f'\left(t - \frac{R}{v_2}\right) \right] +$$
$$\left. + \frac{x}{R^4} \begin{pmatrix} \rho_{12} \\ -\rho_{22} \end{pmatrix} \left[ 3\frac{3z^2 - r^2}{R} f\left(t - \frac{R}{v_3}\right) + \frac{z^2 - r^2}{v_3} f'\left(t - \frac{R}{v_3}\right) \right] \right\},$$

где использованы обозначения (5.4) и полезны в некоторых случаях замены

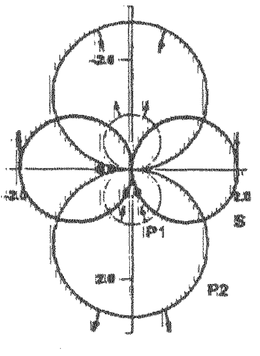
$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} \frac{1}{R} = 3z\frac{y^2 + z^2 - 4x^2}{R^7}, \quad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \frac{1}{R} = -\frac{15xyz}{R^7},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z^2} \frac{1}{R} = 3x\frac{r^2 - 4z^2}{R^7}. \tag{5.13}$$

Из формул (5.12) следует, что выражения для $u_x^{(1)}$ и $u_x^{(2)}$ отличаются от выражений для $u_z^{(1)}$ и $u_z^{(2)}$ лишь заменой $x$ и $z$ соответственно на $z$ и $x$. Этот результат также вытекает из рассмотрения источников (3.12) и (3.15), эквивалентных с точностью до множителя $L$ и при $R_0 \to 0$ воздействию (4.12). Волновое поле от двух пар сил (3.12) и (3.15), изображенных на Рис. 4, обладает симметрией относительно плоскости $x = z$. Из этой симметрии следует указанное свойство волнового поля.

## §6. Диаграммы направленности

В настоящем параграфе исследуются поля смещений в дальней зоне, где сферический радиус $R$ настолько большой, что в выражениях (5.3), (5.9), (5.11) и (5.12) для смещений сохраняются только члены, убывающие, как $1/R$, с ростом $R$. В этой области волновое поле разлагается на отдельные волны $P1$, $P2$ и $S$, из которых первые две волны являются строго продольными, а третья волна – сторого поперечная. В самом деле, направления векторов смещений на фронтах волн $P1$ и $P2$ совпадают с направлением луча или противоположны этим направлениям, а вектор смещения на фронте волны $S$ перпендикулярен лучу. При этом делается предположение, что временная функция источника $f(t)$, равная нулю при $t < 0$, должна удовлетворять условию $f(0) \neq 0$ в случае источника (2.1) и условию $f'(0) \neq 0$, когда действуют источники (4.1), (4.8) и (4.12).

Так как действия источников в разных направлениях оказываются различными, то для каждого источника полезно построить диаграммы направленности. Эти диаграммы определяют графики зависимостей смещений на фронтах волн от угла в полярной системе координат в плоскости $xz$, при этом начало координат совпадает с положением источника. На рисунках 5–8 представлены диаграммы относительных смещений на фронтах от источников в виде вертикальной силы (2.1), разрыва нормальных смещений в скелете (4.1), разрыва нормальных смещений в жидкости (4.8) и скачка касательных смещений в упругой фазе (4.12). На каждом рисунке избражены две диаграммы, отмеченные буквами $a$ и $b$ и относящиеся к жидкой и упругой фазам. Стрелки на диаграммах показывают направления смещений. Тонкой линией изображается диаграмма продольной волны $P1$, полужирной – продольной волны $P2$ и жирной – поперечной волны $S$. Для



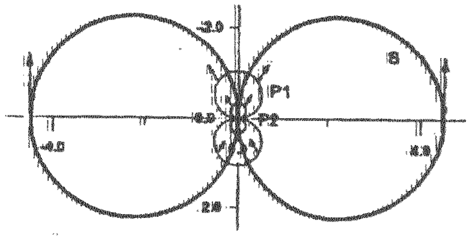




Рис. 5а Рис. 5б.

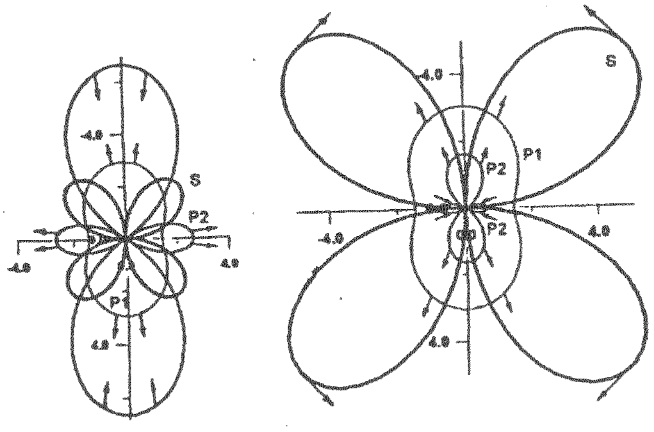



Рис. 6.

определенности отметим, что все диаграммы направленности построены для изотропной среды Био с параметрами

$$A = 4.43\,\text{ГПа},\quad L = 2.77\,\text{ГПа},\quad Q = 0.74\,\text{ГПа},\quad \tilde{R} = 0.6\,\text{ГПа},$$
$$\alpha = 1.75,\quad \varepsilon = 0.26,\quad \rho_s = 2650\,\text{кг/м}^3,\quad \rho_f = 1000\,\text{кг/м}^3. \tag{6.1}$$

Рассчитанные по формулам (2.8), (1.3) и (2.7) скорости распространения и коэффициенты $A_1, A_2$, $-\rho_{22}/\rho_{12}$, определяющие отношения амплитуды волн $P1, P2$ и $S$ в скелете и жидкой фазе, имеют численные значения

$$\begin{aligned} &v_1 = 2330\,\text{м/с}, \quad v_2 = 1030\,\text{м/с}, \quad v_3 = 1160\,\text{м/с}, \\ &A_1 = 1.04, \quad A_2 = -0.12, \quad -\rho_{22}/\rho_{12} = +2.33. \end{aligned} \tag{6.2}$$

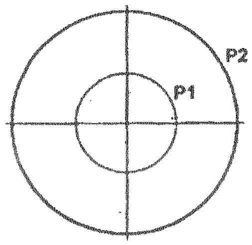



Рис. 7.

Отличительной особенностью всех диаграмм является противоположная направленность смещений в обеих фазах во второй продольной волне $P2$, при этом смещения в жидкости в этой волне практически на порядок превосходят смещения в скелете. Вследствие этого наибольшее относительное смещение частиц обеих фаз почти всегда оказывается во второй продольной волне. Со второй продольной волной $P2$, по-видимому, связан сейсмоэлектрический эффект, который возникает при больших относительных смещениях флюида и скелета [13]. Следует еще отметить довольно большие величины смещений в волне $S$ в жидкой фазе, которые только в 2.3 раза меньше чем в скелете.

Диаграмма 5$b$ для волн $P1$ и $S$ близки к диаграммам для волн $P$ и $S$ от вертикальной силы в упругой среде [6], но направления смещений в этих двух случаях оказываются противоположными. Это различие связано с тем, что в настоящей работе приложенная сила задана скачком напряжения $\sigma_{zz}^{(2)}$, а в монографии [14] – объемной силой. Указанное различие согласуется со статьей [10], где получены для скачков смещений и напряжений эквивалентные объемные силы.

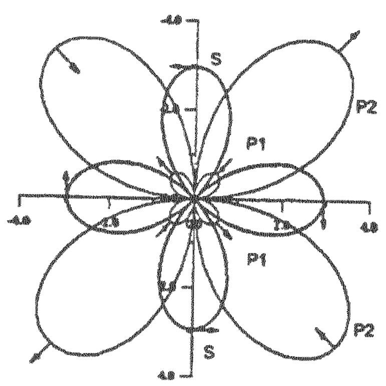



Рис. 8а.

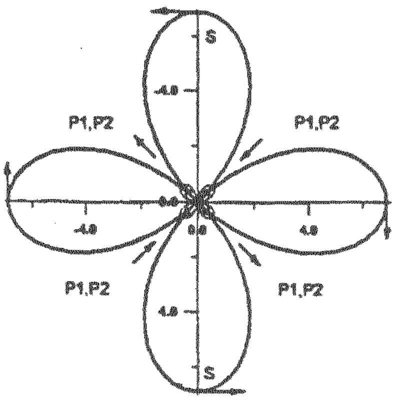



Рис. 8б.

Скачок $u_z^{(2)}$, как источник, характризуется диаграммой Рис. 6. Для волны $P1$ диаграмма представляет собою суперпозицию диаграмм от центров давления и безмоментной пары вертикальных сил [10]. Ее вид близок к диаграмме $P$ волны от скачка $u_z$

в упругой однофазной среде. Для волны $P2$ смещение от пары сил больше по величине и противоположны по знаку смещениям от центров давления, что обуславливает ее 4-лепестковый вид с 4 направлениями, вдоль которых смещения обращаются в ноль. Диаграммы для волны $S$ являются типичными диаграммами от безмоментной пары вертикальных сил [14]. На Рис. 6б смещения в волне $P2$ для наглядности увеличены вдвое.

Скачок $u_z^{(1)}$ возбуждает сферически симметричное продольное поле (Рис. 7) в обеих фазах. Если принять смещение в жидкой фазе в волне $P1$ за единицу, то смещение в волне $P2$ в той же фазе будет составлять 19 единиц. Соответственно смещения в скелете в волнах $P1$ и $P2$ равны 1.8 и 2.75 единиц.

Все смещения направлены от центра источника, за исключением смещений в скелете в волне $P2$, направленных к центру. Таким образом, источник (4.8) в наибольшей степени возбуждает волну $P2$.

Скачок $u_x^{(2)}$, имеющий силовой эквивалентен в виде двойной пары сил без момента в плоскости $xz$, характеризуется 4-лепестковыми диаграммами $P1$, $P2$ и $S$ волн (Рис. 8), повернутыми друг относительно друга на 45 градусов. Качественно диаграммы близки к диаграммам от двойной пары в упругой изотропной среде [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96–05–65904).

## Литература


1. R. Burridge, C. A. Vargas, *The fundamental solution in dynamic poroelasticity.* — Geophys. J. Roy. Astr. Soc. **58** (1979), 61–90.
2. A. N. Norris, *Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid.* — J. Acoust. Soc. Am. **77**, No. **6** (1985), 2012–2023.
3. G. Bonnet, *Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range.* — J. Acoust. Soc. Am. **82**, No. **5** (1987), 1758–1762.
4. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Об источниках типа центров расширения и давления в модели Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 196–213.
5. Л. А. Молотков, *Об источниках типа центра давлений в изотропной и трансверсально-изотропной средах.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. т. XXV, Л, 1986, с. 76–85.
6. К. Аки, П. Ричардс, *Количественная сейсмология.* т. 1, М, 1983, с. 520.
7. Г. И. Петрашень, *Элементы динамической теории распространения сейсмических волн.* — В кн.: Вопросы динамической теории распростране-

ния сейсмических волн. т. III, Л, 1959, с. 11–106.
8. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28,** No. **2** (1956), 168–178.
9. Г. Бейтман, А. Эрдейн, *Таблица интегральных преобразований.* т. 2, М, 1970, с. 327.
10. А. В. Бакулин, *Эквивалентные объемные силы для скачков смещений и напряжений в модели Био анизотропной пористой среды.* Настоящий сборник.
11. Е. И. Шемякин, В. Л. Файншмидт, *Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой.* — Ученые записки ЛГУ **179** (1954), 148–179.
12. Г. И. Петрашень, И. Н. Успенский, *О распространении волн в слоисто-изотропных упругих средах I.* — Ученые записки ЛГУ **208** (1956), 58–141.
13. Н. М. Нейштадт, З. В. Мазанова, Н. Д. Суворова, *Сейсмо- и пьезоэлектрические явления в разведочной геофизике.* СПб, Недра, 1992, с. 63.
14. Дж. Э. Уайт, *Возбуждение и распространение сейсмических волн.* М, 1986, с. 262.

Molotkov L. A., Bakulin A. V. The jumps of displacements and stresses as seismic sources in Biot medium.

For the various point sources in homogeneous isotropic Biot medium the wave fields are determined. These sources are the centers of compressions and dilatations, the jumps of displacements and stresses, and various force couples. Among these sources the elementary point sources are selected. The wave field from all other sources can be expressed by means of the field of the elementary point sources. The wave fields of the all point sources are expressed by two ways: by the integral transforms of Fourier–Bessel and Laplace and by the formulas of Stokes form.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 июля 1996 г.

С.-Петербургский государственный
университет