А. В. Попов

# ПРОЗРАЧНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Параболическое волновое уравнение, предложенное в [1], имеет много применений в теории дифракции и распространения волн. Оно может служить мощным вычислительным инструментом для решения задач на распространение в сложных окружающих средах, в которых переменные не разделяются (радиоволновое распространение над искривленной местностью, распространение в неравномерном тропосферическом канале и т.п.) Особая трудность возникает, когда волновое поле должно находиться в бесконечной области. Чтобы решить задачу численно, нужно свести область к конечной полосе (в двумерном случае) или к цилиндру (в трехмерном случае) и преобразовать условие излучения, поставленное на бесконечности, в условие на границе (поверхности). Желательно сделать это точно, чтобы избежать ложных отражений от искусственно введенных границ. Точная форме граничного условия при полной прозрачности для произвольного решения параболического волнового уравнения в двух измерениях была найдена и исследована в [2]. Эквивалентная формула была опубликована независимо в [3]. Здесь, мы обсуждаем этот результат и делаем необходимые обобщения на случай трехмерных задач и квазислоистых окружающих сред.

## §1. Вывод прозрачного граничного условия в двумерном случае

Мы рассмотрим здесь простейший случай двумерной дифракции на конечном диэлектрическом препятствии в полу-пространстве $x > 0$. Если диэлектрическая постоянная $\epsilon(x, z)$ не отличается намного от единицы: $|\epsilon - 1| \ll 1$, то параксиальный волновой пучок $E = u(x, z)e^{ikx}$ может быть описан параболическим уравнением

$$2ik\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(\epsilon - 1)u = 0. \qquad (1)$$

Предполагая, что вариация $\varepsilon - 1$ приближается к нулю выше уровня $z = a$, мы можем аналитически решить уравнение (1) в квадрате $x > 0$, $z > a$. Тогда, для заданного начального значения $u(0, z) = u_0(z)$ и для произвольного граничного значения $u(x, a)$ точное решение уравнения (1), которое удовлетворяет условию излучения, может быть записано в следующем виде: $u = v + w$, где

$$v(x,z) = e^{-i\pi/4}\sqrt{k/2\pi x}\Bigg[\int\limits_{a-z}^{\infty} u_0(z+t)\exp\left(\frac{ikt^2}{2x}\right)dt - \\ - \int\limits_{z-a}^{\infty} u_0(2a-z+t)\exp\left(\frac{ikt^2}{2x}\right)dt\Bigg] \tag{2}$$

и

$$w(x,z) = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_0^x u(\xi,a)\exp\left[ik\frac{(z-a)^2}{2(x-\xi)}\right]\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}}. \tag{3}$$

Теперь мы можем вычислить нормальную производную $\partial u/\partial z(x, a)$. Дифференцирование уравнения (2)–(3) и использование уравнения (1) дает следующее соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,a) = -e^{-i\pi/4}\sqrt{2k/\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x u(\xi,a)\frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} + \frac{\partial v}{\partial z}(x,a). \tag{4}$$

Оно может быть рассмотрено как нелокальное обобщение граничного условия третьего рода, которое позволяет проинтегрировать уравнение (1) численно внутри полосы $-a < z < a$. Конечно-разностная аппроксимация уравнения (4) была рассмотрена в [2]. Численные проверки показали, что произвольные волновые пакеты, встречающие границу раздела $z = a$ изнутри полоски, полностью поглощаются. Если начальная функция $u_0(z)$ приближается к нулю для $z > a$, то граничное условие (4) – однородно

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x,a) = -e^{-i\pi/4}\sqrt{2k\frac{\partial}{\partial x}}u(x,a), \tag{5}$$

что вытекает из факторизации дифференциального оператора (1)

$$\left(2ik\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial z}+e^{-i\pi/4}\sqrt{2k\frac{\partial}{\partial x}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-e^{-i\pi/4}\sqrt{2k\frac{\partial}{\partial x}}\right)u. \quad (6)$$

## §2. Трехмерный случай

Рассмотрим трехмерное обобщение параболического волнового уравнения

$$2ik\frac{\partial u}{\partial x}+\Delta_{\perp}u+k^2(\epsilon-1)u=0 \quad (7)$$

предполагая, что вариации $\epsilon-1$ и начальное значение $u(0,r,\varphi)=u_0(r,\varphi)$ локализуются вблизи $r<a$ продольной оси (подходящим примером является параксиальный волновой пучок, усеченный конечным отверстием и распространяющийся через диэлектрическую квазиоптическую систему). Так как параболическое уравнение (7) может быть решено аналитически для $r>a$, мы можем перенести условия излучения из бесконечности на цилиндрическую границу $r=a$.

Используя разложение Фурье

$$u(x,r,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}u_m(x,r)e^{im\varphi}, \quad (8)$$

и принцип Дюамеля, получим точное выражение

$$u(x,r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x\int_0^{2\pi}u(\xi,a,\psi)d\xi d\psi\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\varphi-\psi)}U_m(x-\xi,r) \quad (9)$$

решения $u(x,r,\varphi)$ вне цилиндра $r=a$ в терминах его граничных значений $u(x,a,\psi)$. Здесь,

$$U_m(x,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{H_m^{(1)}\left(r\sqrt{2ikp}\right)}{H_m^{(1)}\left(a\sqrt{2ikp}\right)}e^{px}\frac{dp}{\sqrt{p}} \quad (10)$$

частные ступенчатые функции, удовлетворяющие следующему граничному условию

$$U_m(x,a)=\begin{cases}1, & \text{при} \quad x>0\\ 0, & \text{при} \quad x<0\end{cases} \quad (11)$$

и условию излучения, когда $r \to \infty$. Простые вычисления дают идеально поглощающее граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x,a,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x\int\limits_0^{2\pi} u(\xi,a,\psi)K(x-\xi,\varphi-\psi)d\xi\,d\psi \qquad (12)$$

с функцией

$$K(x,\varphi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi}\sqrt{\frac{k}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{H_m^{(1)'}\left(a\sqrt{2ikp}\right)}{H_m^{(1)}\left(a\sqrt{2ikp}\right)}e^{px}\frac{dp}{\sqrt{p}}, \qquad (13)$$

что позволяет нам свести область вычислений к полуцилиндру $x > 0$, $r < a$.

## §3. Прозрачные границы для квазислоистых окружающих сред

Параболическое волнове уравнение для равномерного высокочастотного распространения в тропосферическом канале было введено в [1]

$$2ik\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2k^2\frac{z}{R^*}\left[1+g(x,z)\right]u = 0. \qquad (14)$$

Здесь член $z/R^*$, зависящий от глубины, описывает совместное влияние сферичности земной поверхности и барометрической рефракции ($R^*$ есть эквивалентный земной радиус) и корреляция $g(x,z)$ соответствует неравномерным вариациям индекса рефракции, локализованного ниже некоторой отсчетной высоты $z = b$ (см. [4]). Имея ввиду численное интегрирование уравнения (14), мы вывели граничное условие, сводящее задачу, поставленную в полупространстве $z > 0$, к задаче в полосе $0 < z < b$. Опуская детали, мы запишем результат в безразмерных переменных $\xi = \left(k/2R^{*2}\right)^{1/3}x$, $\zeta = \left(2k^2/R^*\right)^{1/3}z$, $\beta = \left(2k^2/R^*\right)^{1/3}b$:

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta}(\zeta,\beta) = \int\limits_0^{\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi',\beta)K^+(\xi-\xi')d\xi'. \qquad (15)$$

Здесь

$$K^+(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty-ic}^{\infty-ic} e^{it\xi}\frac{w_1'(t-\beta)}{tw_1(t-\beta)}dt \qquad (16)$$

и $w_1(t)$ есть функция Эйри-Фока. Очевидно, что подобные прозрачные граничные условия могут быть получены для другой зависимости от глубины.

## §4. Асимптотическое поведение граничных операторов

Наш подход к усечению вычислительной области порождает семейство специальных функций, являющихся ядрами интегральных граничных операторов. Простейший двумерный пример (4) показывает, что ядро имеет слабую особенность на конце пути интегрирования и некоторый нелокальный "хвост". Интересно исследовать с этой точки зрения менее тривиальные примеры, данные выше.

Рассмотрим трехмерное параболическое уравнение (7). В наиболее интересном осесимметрическом случае граничное условие (12) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x,a) = \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^x u(\xi,a)K_0(x-\xi)d\xi \tag{17}$$

с функцией

$$K_0(x) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\pi}\sqrt{\frac{k}{2}}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{H_0^{(1)'}\big(a\sqrt{2ikp}\big)}{H_0^{(1)}\big(a\sqrt{2ikp}\big)}e^{px}\frac{dp}{\sqrt{p}}. \tag{18}$$

Можно видеть, что его асимптотическое поведение зависит от величины френелевского параметра $q = x/2ka^2$. Для $q \ll 1$, используя асимптотику $H_0^{(1)}(z) \sim \sqrt{2/\pi z}e^{i(z-\pi/4)}$ для функции Ханкеля, получаем

$$K_0(x) \sim -e^{-i\pi/4}\sqrt{2k/\pi x}. \tag{19}$$

Мы видим, что граничный оператор (17) имеет ту же особенность, как и его двумерный прототип (4) и сводится к последнему для больших радиусов $a$. Противоположный предельный случай, когда $x \to \infty$, может быть рассмотрен с помощью замены $H_0^{(1)}(z)$ его аппроксимацией $2/\pi \log z$ для малых $z$. Это делает возможным асимптотически оценить интеграл (18)

$$
\begin{aligned}
K_0(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \int\limits_0^{\epsilon} e^{-tx} \log \frac{\log(a\sqrt{2kt}) + i3\pi/4}{\log(a\sqrt{2kt}) - i\pi/4} dt \\
\approx \frac{x}{a} \int\limits_0^{\epsilon} \frac{e^{-tx}}{\log(a\sqrt{2kt})} dt \underset{q\to\infty}{\sim} -\frac{2}{a\log\frac{x}{2ka^2}}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Это формула показывает, что в трехмерном пространстве хвост ядра убывает более медленно, чем $1/\sqrt{x}$.

Подобный анализ для параболического волнового уравнения (14) в квази-слоистой среде обнаруживает тот же тип особенности

$$
K^+(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty-ic}^{\infty-ic} e^{it\xi} \frac{w_1'(t-\beta)}{tw_1(t-\beta)} dt \underset{\xi\to 0}{\approx} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi\xi}} \tag{21}
$$

а “хвост” для больших $\xi$

$$
K^(\xi) = \frac{w_1'(-\beta)}{w_1(-\beta)} - e^{i\beta\xi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\exp(-t_s\xi e^{-i\pi/6})}{\beta + t_s e^{i\pi/3}} = \mathrm{Const} + O\big(e^{-C\xi}\big) \tag{22}
$$

стремится экспоненциально к постоянному пределу.

Эта константа не дает никакого нелокального вклада в интегральный граничный оператор, следовательно, в этом случае прозрачная граница имеет крайне короткую “память”. Это естественно, потому что лучи, соответствующие параболическому волновому уравнению (14), изгибаются вверх и быстро покидают верхнюю границу $z = b$. Напротив, если мы запишем аналогичное граничное условие, обеспечивающее идеальную прозрачность произвольно выбранного “дна” неравномерного слоя $a < z < b$, мы увидим, что граничный оператор имеет очень долгую “память”. Соответствующее ядро

$$
K^-(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty-ic}^{\infty-ic} e^{it\xi} \frac{v'(t-\alpha)}{tv(t-\alpha)} dt \underset{\xi\to 0}{\approx} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi\xi}} \tag{23}
$$

с помощью подстановки

$$
\frac{v'}{v} = \frac{w_2'}{w_2} - \frac{1}{vw_2} \tag{24}
$$

может быть сведено к следующему виду с

$$K^-(\xi) = -\frac{w_2'(-\alpha)}{w_2(-\alpha)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty e^{i\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} \frac{e^{it\xi}}{tv(t-\alpha)w_2(t-\alpha)}dt \qquad (25)$$

с $\alpha = (2k^2/R^*)^{1/3}a$. Этот интеграл тесно связан со специальной функцией, исследованной в задаче о распространении волн шепчущей галереи [5].

Граничные условия прозрачности, описанные выше, допускают эффективную численную реализацию в рамках метода конечных разностей. Они были использованы в ряде задач дифракции и волнового распространения. Среди которых: распространение радиоволн над нерегулярной местностью или в тропосферическом волновом канале, микроволновой и $X$-лучевой квазиоптической системах. Мы демонстрируем некоторые примеры вычислений и образного представления полей, используя прозрачные границы для устранения ложных отражений.

## Литература


1. V. A. Fock, *Electromagnetic diffraction and propagation problems.* Pergamon Press, Oxford, 1965.
2. V. A. Baskakov, A. V. Popov, *Implementation of transparent boundaries for numerical solution of the Schrödinger equation.* — Wave Motion **14, No. 1** (1991), 123–128.
3. S. W. Marcus, *A generalized impedance method for application of the parabolic approximation to underwater acoustic.* — J. Acoust. Soc. Am. **90, No. 1** (1986), 391–398.
4. F. D. Tappert, *The parabolic approximation method.* in: Lectures Notes in Physics, 70. J. B. Keller, J. S. Papadakis (eds.) Wave propagation and underwater acoustics. Springer, New York, 1977, pp. 224–287 .
5. V. M. Babich c and V. S. Buldyrev, *Short-wavelength diffraction theory (Asymptotic methods).* Springer, New York, 1991.



Popov A. B. Transparent boundaries for the parabolic wave equation.

The objective of this paper was to find an exact form of boundary conditions providing full absorption of arbitrary paraxial wave packets described by the parabolic equation. It would enable us to reduce rigorously an infinite domain to a strip or cylinder for numerical calculations. We proposed a general approach to this problem and demonstrated some practical examples.



Институт Земного магнетизма ионосферы
и распространения радиоволн РАН



Поступило 10 октября 1995 г.