В. Н. Троян, Г. А. Рыжиков

ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМОВ РЕКОНСТРУКТИВНОЙ ТОМОГРАФИИ

Чтобы построить алгоритм реконструкции, запишем модель сейсмограммы, используя понятие томографического функционала [1]:

$$u_n = \sum_{\mu=1}^{M} \langle \rho_{\mu n} | \nu_\mu(\delta\theta) \rangle + \varepsilon_n \tag{1}$$

u_n – отсчетные значения сейсмограммы, $\rho_{\mu n}$ – томографический функционал, $\nu_\mu(\delta\theta)$ – искомая функция вариации параметров (μ – индекс соответствующего поля, $\mu = 1 \div M$). Невязка ε_n включает как случайный компонент, генерируемый полями неидентифицируемых источников и аппаратурными шумами, так и возможную неадекватность модели, порожденную, во-первых, ощибками в задании аппаратной функции; во-вторых, ошибками в априорном представлении о среде, т.е. игнорированием диссипативных и нелинейных эффектов в описании процессов распространения зондирующих сигналов; в-третьих, ошибками вследствие линеаризации поля φ; в-четвертых, предположением о гладкости $\theta(x)$ и т.д. Исходя из физических представлений о стохастической структуре шумового поля как о сумме большого числа независимых источников, допустимо рассматривать случайную компоненту аддитивной и нормально распределенной [2, 3, 4]. Статистический анализ экспериментальных данных, как правило, ограничивается определением первых двух моментов случайного компонента. Как следует из работы [5], при заданных двух моментах максимально энтропийным распределением является нормальное, что служит еще одним аргументом в пользу выбора гауссовых случайных величин при построении модели.

Наиболее простой и чаще всего используемой моделью (K_ε) при построении практических алгоритмов является модель равноточечных некоррелированных ошибок, т.е. $K_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 I$ (I – единичная матрица, а единственный параметр σ_ε^2 – дисперсия случайного компонента). Для неравноточных некоррелированных наблюдений

$$K_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_N^2 \end{Vmatrix}.$$

Простейший для математической обработки способ описания коррелированных ошибок наблюдений – модель марковского случайного процесса с матрицей корреляций

$$K_\varepsilon = \begin{Vmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \dots & \dots & \gamma^{N-1} \\ \gamma & 1 & \gamma & \dots & \dots & \gamma^{N-1} \\ \gamma^2 & \gamma & 1 & \dots & \dots & \gamma^{N-2} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ \gamma^N & \dots & \dots & \dots & \gamma & 1 \end{Vmatrix}.$$

Эта форма удобна тем, что можно в явном виде записать обратную матрицу K_ε^{-1}:

$$K_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{Vmatrix} 1 & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 1+\gamma^2 & -\gamma & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & -\gamma & 1+\gamma^2 & -\gamma \\ 0 & \dots & \dots & -\gamma & 1 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что K_ε^{-1} представляет собой конечноразностный аналог симметричного положительного оператора $(-\Delta+\gamma I)$, который часто используется при регуляризации по А. Н. Тихонову [6].

В дальнейшем изложении будем предполагать матрицу ковариаций ошибок измерений известной, однако одновременное оценивание параметров распределения и искомых параметров среды не представляет принципиальных трудностей, хотя и требует дополнительных затрат машинного времени, поскольку задача оценивания становится при этом заведомо нелинейной [7].

В силу того, что случайный компонент ε принципиально неустраним, любая процедура решения обратной задачи, связанная с интерпретацией реальных данных, с неизбежностью становится задачей статистического оценивания. Отметим, что методы регуляризации позволяют строить формально устойчивые решения томографических задач, представляя искомые поля $\nu(\delta\theta)$ в любой точке исследуемой области пространства. Поля, представляющие среду, можно считать многокомпонентными [8]. Однако решение таких задач при интерпретации данных дистанционного зондирования теряет физический смысл вследствие информационной необеспеченности, т.е. практически не происходит уточнения априорных представлений о полях параметров среды. Идеология восстановления полей по значениям конечного числа функционалов измерений развивалась в геофизике в работах [9, 10]. В соответствии с этой идеологией попытаемся заменить поле параметров среды во всем пространстве восстановлением значений некоторого числа линейных функционалов l от поля $\nu(\delta\theta)$. Эта задача корректна только в том случае, когда искомый функционал l принадлежит линейной оболочке томографических функционалов $\{\rho_n,\, n = 1 + \div N\}$, т.е. лежит в подпространстве

$$\overset{\cap}{\theta}{}^* = \{l : \exists\alpha : (l - P^*\alpha)\nu(\delta\theta) = 0 \quad \forall\, \nu\}\,.$$

Этот способ регуляризации сложился стихийно в процессе решения практических обратных задач и широко используется в различных модификациях, хотя и без должного анализа.

Если априорная информация о $\nu(\delta\theta)$ отсутствует, то устойчивость решения, полученного по методу максимального правдоподобия, определяется оператором Фишера, который заведомо вырожден. Вырожденность оператора Фишера означает, что в пространстве Θ существует направление, определяющее также элементы функционального пространства, о которых отсутствует информация, а потому дисперсия соответствующего линейного функционала неограничена. В то же время функционал l является линейной комбинацией томографических функционалов $\{\rho_n\}$, иными словми, если разрешимо сопряженное уравнение $P^*\alpha - l = 0$, то его решение обладает конечной дисперсией.

На практике часто применяется способ решения обратных задач путем представления искомого решения $\nu(\delta\theta)$ в виде конечного ряда:

$$|\nu(\delta\theta)\,\rangle = \sum_q |\Psi_q\,\rangle\langle\,\Psi_q|\nu(\delta\theta)\,\rangle \overset{\Delta}{=} \sum_q \nu_q|\Psi_q\,\rangle.$$

В этом случае необходимо, чтобы оценки коэффициентов ν_q имели конечную дисперсию, т.е. должны быть разрешимы уравнения $P^*\alpha - \nu_q = 0$. В качестве базиса $\{\psi_q\}$ используется либо несколько функций из полного ортонормированного набора (например, ряд Фурье, Фурье–Бесселя, базис Карунена–Лоева и т.д. – выбор базиса, как правило, определяется интуитивными априорными представлениями о среде), но заведомо не полный базис (характеристические функции непересекающихся пространственных областей, B-сплайны и т.д. [11, 12], либо эвристический (неполный, неортогональный) – функции типа "модельных тел" (например, представление полей в магнито- и гравиразведке).

Ошибка Δ_ν в восстановлении поля $\nu(\delta\theta)$ при представлении в виде конечного ряда:

$$|\nu(\delta\theta)\rangle = \sum_q \nu_q |\Psi_q\rangle$$

определяется, во-первых, ошибками $\Delta\nu_q$ в восстановлении коэффициентов ν_q, т.е. значений линейных функционалов $\langle\Psi_\nu|\nu\rangle$; во-вторых, составляющей поля $\nu(\delta\theta)$, не вошедшей в данное разложение, т.е.

$$\Delta\nu(\delta\theta) = \sum_q \Delta\nu_q \mid \Psi_q\rangle + \widetilde{\nu},$$

где $\widetilde{\nu} \in \widetilde{\Theta} = (I - \sum_q |\Psi_q\rangle\langle\Psi_q|)\Theta$.

Отметим, что при анализе решений практических задач бесконечная ошибка, связанная с $\widetilde{\Theta}$, обычно игнорируется, т.е. интуитивно предполагается, что искомое решение действительно принадлежит подпространству, соответствующему выбранному базису.

Задача восстановления значения произвольного линейного функционала может быть введена в класс корректности, если использовать дополнительную информацию либо путем введения вероятностной (невырожденной) меры в пространстве Θ, либо введением детерминированных ограничений Как правило, квадратичных). Введение вероятностной меры, например. гауссовой с положительным коррелятором K_θ, приводит к тому, что дисперсия σ_l^2 любого линейного функционала l становится конечной:

$$\sigma_l^2 = l(K_\theta \Delta l) = l\left((F + K_\theta^{-1})^{-1} l\right),$$

здесь $F = P^* K_\varepsilon^{-1} P$ – оператор Фишера; $\Delta l = l - P^*\widehat{\alpha}$. Понятно, что если ввести детерминированное ограничение, зафиксировав замкнутую область в пространстве параметров, например, шар $\|\nu(\delta\theta)\|_{L_2} = 1$, то дисперсия любого линейного функционала будет конечной. Но далеко не всегда такая постановка содержательна: ошибка может достигать размеров поперечника априорной области, даже если разрешимо $P^*\alpha = l$ [13].

Регуляризация с введением компактов в пространстве Θ, например, множества монотонных ограниченных функций в L_2 [14], реализуется методами математического программирования – в отличие от случая квадратичных ограничений соотвествующие алгоритмы нельзя представить в виде замкнутой формулы: эти алгоритмы многошаговые.

Следует отметить, что все ранее приведенные выводы являются следствием связи $(\widehat{l,\nu}) = \widehat{l}(\nu)$, т.е. наилучшая оценка линейного функционала поля ν совпадает со значением этого функционала от наилучшей оценки поля. Все основные формулы и связи могут быть получены аналогично оптимальному решающему оператору, построение которого предложено в работе [15]. Тем не менее, чтобы подчеркнуть совпадающие и различающиеся моменты в подходе Бейкуса–Гильберта и в подходе, излагаемом в данной работе, представим схему решения обратной задачи.

По N значениям u_n суммы M линейных функционалов P_μ восстановить значение заданного линейного функционала l от неизвестного поля параметров среды ν_μ. Для произвольного линейного функционала $l(\nu)$ мы будем искать решение в форме линейной комбинации измерений:

$$l(\nu) = \sum_n \alpha_n u_n = (\alpha, u), \tag{2}$$

где $l(\nu) \equiv \langle\, l | u\, \rangle$. Используя модель экспериментыльного материала (1), запишем линейную оценку (2) в окрестности точки x:

$$\widehat{\nu}_\mu(\delta\theta) = \sum_{\mu'} (\alpha_{\mu'}, \rho_{\mu'}) \mid \nu_{\mu'}, (\delta\theta) \rangle_{\vee} + (\alpha_\mu, \varepsilon).$$

Уточним теперь формулировку “поле в окрестности точки X” в качестве $\nu(\delta\theta_\mu^X)$ можно принять, например, среднее значение в шаре радиуса ρ с центром в точке X, т.е. значение линейного функционала от неизвестного поля $\nu(\delta\theta_\mu^X)$:

$$\nu_\mu(\delta\mu^X) = \langle\, l^X | \nu_\mu \rangle_\vee,$$

$$l^X = \left(\frac{4}{3}\pi\rho^3\right)^{-1} H(\rho - |x - X|),$$

$$H(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \xi < 0, \\ 1 & \text{при} \quad \xi \geqslant 0. \end{cases}$$

Независимо от конкретного выбора линейной процедуры ошибку η_μ^X восстановления $\langle\, l^X | \nu_\mu \,\rangle$ можно формально записать в виде

$$\begin{aligned} \eta_\mu^l &= \langle\, l | \nu_\mu \,\rangle - \sum_{\mu'} (\alpha, \langle\, P_{\mu'}) \mid \nu_{\mu'} \,\rangle - (\alpha, \varepsilon) = \\ &= \langle\, l - (\alpha, P_\mu) l | \nu_\mu \,\rangle - \sum_{\mu' \neq \mu} \langle\, (\alpha, P_{\mu'}) \mid \nu_{\mu'} \,\rangle - (\alpha, \varepsilon). \end{aligned} \tag{3}$$

Проведем качественную интерпретацию этого выражения. Ошибка η зависит как от искомого поля $\nu_\mu(\delta\theta)$ (первый член в (3)), так и от других полей $\nu_\mu(\mu' \neq \mu)$, а также от случайной компоненты ε. Составляющая ошибки, зависящая от поля ν_μ, тем меньше, чем меньше норма функционала $l - (\alpha, \rho_\mu)$, т.е. чем лучше аппроксимация оцениваемого функционала l линейной комбинацией томографических функционалов ρ_μ. Нетрудно видеть, что удовлетворительную аппроксимацию l, носитель которого сосредоточен в окрестности точки X, можно осуществить только в том случае, когда в совокупность $\{\rho_{\mu n}\}$ входят такие функционалы, что их носители имеют пересечения с этой окрестностью. Ошибка η_μ^l – сумма линейных форм от неизвестных ν_μ $(\mu = 1 \div M)$ и ε, при этом каждая из форм зависит от вектора коэффициентов α, определяющего выбор конкретной процедуры восстановления.

Вектор α следует выбирать так, чтобы модельные ошибки восстановления $|\eta_\mu|$ или $(\eta_\mu)^2$ были минимальными. В свою очередь, квадрат ошибки можно охарактеризовать квадратичной формой, в которую должны войти все линейные формы, составляющие η_μ в (3).

Мы рассмотрим решение, которое минимизирует квадрат ошибки восстановления:

$$\widehat{\alpha} = \arg\inf \left[(\Lambda - Q^*\alpha)^* K (\Lambda - Q^*\alpha) \right],$$

где $Q = \|P|I\|$ и I – единичный оператор размерностью числа измерений;

$$(Q^*\alpha)^* = \|\alpha_1 \dots \alpha_n \dots \alpha_N\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} \langle\, \rho_{11}(x)| & \dots & \langle\, \rho_{\mu 1}(x) & \dots & \langle\, \rho_{M1}(x)|1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \langle\, \rho_{1n}(x)| & \dots & \langle\, \rho_{\mu n}(x) & \dots & \langle\, \rho_{Mn}(x)|0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle\, \rho_{1N}(x)| & \dots & \langle\, \rho_{\mu N}(x) & \dots & \langle\, \rho_{MN}(x)|0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$\Lambda^* = \left\| \lambda_1^* \dots \lambda_\mu^* \dots \lambda_M^* \dots \lambda_{M+1}^* \dots \lambda_{M+N}^* \right\|,$$

где λ^* с индексом $1 \div M$ равны $\langle\, 0|$ (кроме $\lambda_\mu^* = \langle\, l(x)|$), а λ^* с индексами $(M+1) \div (M+N)$ равны нулю. Оператор K должен быть положительным.

Оптимальная оценка $\widehat{\alpha}$, которая в силу линейности модели и линейности оценивания функционала определяет и оптимальную оценку самого функционала l, в этом случае дается выражением

$$\widehat{\alpha} = (QKQ^*)^{-1}\, QK\Lambda. \tag{4}$$

Поскольку ошибка оценки (3) зависит от неизвестных полей $\nu_\mu(\delta\theta)$ и случайных величин ε, выбор конкретного оператора K в критерии определяет класс функций $\{\nu_\mu, \mu = 1 \div M\}$ и статистическую структуру случайного компонента ε, что эквивалентно введению априорной информации.

Приведем статистическую интерпретацию оператора K и оценки $\widehat{\alpha}$. Если множество полей $\{\nu_\mu(\delta\theta)\}$, принимаемых в качестве допустимых решений, характеризуется гауссовой мерой в соответствующем функциональном пространстве и случайная компонента имеет нормальное распределение, то решение, реализующее минимум квадрата ошибки восстановления $E(\eta_\mu^l)$ (среднее по полям $\{\nu_\mu(\delta\theta)\}$ и реализациям ε):

$$K = \left\| \begin{matrix} K_{\nu_1\nu_1} & \dots & K_{\nu_1\nu_\mu} & \dots & K_{\nu_1\nu_M} & K_{\nu_1\varepsilon} \\ K_{\nu_\mu\nu_1} & \dots & K_{\nu_\mu\nu_\mu} & \dots & K_{\nu_\mu\nu_M} & K_{\nu_\mu\varepsilon} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\varepsilon\nu_1} & \dots & K_{\varepsilon\nu_\mu} & \dots & K_{\varepsilon\nu_M} & K_{\varepsilon\varepsilon} \end{matrix} \right\|.$$

Здесь $K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}}$ – оператор интегрального типа, такой, что для любых линейных функционалов ξ и η выполняется условие

$$\langle\, \xi \mid K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}} \mid \eta\,\rangle = E\langle\, \xi \mid \nu_\mu\,\rangle\langle\, \nu_{\mu'} \mid \eta\,\rangle,$$

$$K_{\varepsilon\varepsilon} = E(\varepsilon\varepsilon^T),$$

$$K_{\varepsilon\nu_\mu} : E\varepsilon\langle\, \nu_\mu \mid \eta\,\rangle = K_{\varepsilon\nu_\mu} \mid \eta\,\rangle.$$

Оптимальная оценка $\widehat{\alpha}$ из (4) определяет структуру алгоритма восстановления с минимальной дисперсией ошибок. Можно записать оценку, в которой в явной форме представлены статистические связи полей ν_μ и $\nu_{\mu'}$ (предположении отсутствия связей между полями ν_μ и случайным компонентом ε $K_{\mu\varepsilon} = 0$):

$$\widehat{\alpha} = \Bigg[P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} P_\mu^* + \sum_{\mu'\neq\mu} \left(P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_\mu} P_{\mu'}^* + P_\mu K_{\nu_\mu\nu_{\mu'}} P_{\mu'}^*\right) +$$

$$+ \sum_{\mu'\neq\mu}\sum_{\mu''\neq\mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_{\mu''}} P_{\mu''}^* + K_{\varepsilon\varepsilon}\Bigg]^{-1} \cdot \left(P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} + \sum_{\mu'\neq\mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_\mu}\right) \mid l\,\rangle.$$

В частном случае, когда отсутствуют статистические связи различных полей $\nu_\mu(\delta\theta)$ и $\nu_{\mu'}(\delta\theta)$, а также связи $\nu_\mu(\delta\theta)$ и ε, оптимальная оценка (4) примет вид

$$\widehat{\alpha}_\mu = \Bigg[P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} P_\mu^* + \sum_{\mu'\neq\mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\varepsilon\varepsilon}\Bigg) \cdot P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} |l\rangle \qquad (5)$$

$$P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} P_\mu^* =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \langle\,\rho_{1\mu}|K_{\nu_\mu\nu_\mu}|\rho_{1\mu}\,\rangle & \ldots & \langle\,\rho_{1\mu}|K_{\nu_\mu\nu_\mu}|\rho_{N\mu}\,\rangle \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \langle\,\rho_{n\mu}|K_{\nu_\mu\nu_\mu}|\rho_{1\mu}\,\rangle & \ldots & \langle\,\rho_{n\mu}|K_{\nu_\mu\nu_\mu}|\rho_{N\mu}\,\rangle \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \langle\,\rho_{N\mu}|K_{\nu_\mu\nu_\mu}|\rho_{1\mu}\,\rangle & \ldots & \langle\,\rho_{N\mu}|K_{\nu_\mu\nu_\mu}|\rho_{N\mu}\,\rangle \end{array} \right\|$$

– ковариационная матрица полезного – относительно восстанавливаемого μ-го поля параметров – сигнала; $(\sum_{\mu'\neq\mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_{\mu'}} P_{\mu'}^*$ $+K_{\varepsilon\varepsilon})$ – ковариационная матрица эффективного шума, включающая статистические связи полей $\{\nu_{\mu'},\ \mu'\neq\mu\}$, а также случайного компонента ε. Запишем дисперсию ошибки оценки (5):

$$E\left(\eta_\mu^l\right)^2 = \langle\, l \mid K_{\nu_\mu\nu_\mu} -$$

$$- K_{\nu_\mu\nu_\mu} P_\mu^* \left(P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} P_\mu^* + \sum_{\mu'\neq\mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_{\mu'}} P_{\mu'}^* + K_{\varepsilon\varepsilon}\right)^{-1} P_\mu K_{\nu_\mu\nu_\mu} \mid l\,\rangle$$

или, вводя оператор Фишера

$$E\left(\eta_\mu^l\right)^2 = \langle\, l|F_\mu^{-1}|l\,\rangle,$$

$$F_\mu = \left[P_\mu^* \left(\sum_{\mu'\neq\mu} P_{\mu'} K_{\nu_{\mu'}\nu_{\mu'}} P_{\mu'} + K_{\varepsilon\varepsilon}\right)^{-1} P_\mu + K_{\nu_\mu\nu_\mu}^{-1}\right].$$

Из последнего выражения с очевидностью следует, что качество оценки μ-го поля тем лучше, чем выше чувствительность обрабатываемых данных к вариациям μ-го поля и чем меньше влияние вариаций остальных полей ($\mu' \neq \mu$) на экспериментальные данные.

Модель экспериментального материала (1) формально включает [16] все поля параметров среды, которые входят в уравнения распространения зондирующего сигнала. Априори ясно, что не все поля $\nu_\mu(\delta\theta)$ обладают необходимой величиной отношения сигнал/помеха, учитывая систему наблюдений при выбранном плане эксперимента. Чтобы построить адекватную модель экспериментального материала, надо ввести количественную меру влияния вариаций каждого параметра на поле измерений. С этой целью введем понятие информационной чувствительности поля наблюдений (u) по отношению к фиксированному линейному полю параметров ($\nu(\delta\theta)$) – как предел производной информации Шеннона $I_\alpha(l(\nu)/u)$ по α (отношение сигнал/помеха) при $\alpha \to 0$:

$$S_l^p = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\partial}{\partial\alpha} I_\alpha(l(\nu)/u_p),$$

$$I_\alpha(l(\nu)/u_p) = \frac{1}{2}\ln\frac{E(\eta^l_{\text{apr}})^2}{E(\eta^l_\alpha)^2},$$

$$E(\eta^l_{\text{apr}})^2 = \langle\, l \mid K_{\nu\nu} \mid l\,\rangle,$$

$$E(\eta^l_\alpha)^2 = \langle\, l \mid \left(P^* K_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} P + K_{\nu\nu}^{-1}\right)^{-1} \mid l\,\rangle,$$

$$K_{\varepsilon\varepsilon} = \sigma_\varepsilon^2, \quad K_{\nu\nu} = \sigma_\nu^2 I, \quad \alpha = \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\varepsilon^2}.$$

Найдем явный вид производной по α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} I_\alpha\left(l(\nu)/u_p\right) = -\frac{1}{2}\frac{\langle\, l|l\,\rangle}{\langle\, l|I - \alpha P^*(\alpha PP^* + I)^{-1}P|l\,\rangle}\cdot$$
$$\cdot\left[-\frac{\langle\, l|P^*(\alpha PP^* + I)^{-1}P|l\,\rangle}{\langle\, l|l\,\rangle} + \right.$$
$$\left. +\alpha\frac{\langle\, l|P^*(\alpha PP^* + I)^{-1}PP^*(\alpha PP^* + I)^{-1}P|l\,\rangle}{\langle\, l|l\,\rangle}\right]$$

и, переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получим:

$$S_l^P = \lim_{\alpha \to 0} I_\alpha\left(l(\nu)/u_p\right) = \frac{1}{2}\frac{\langle\, l|P^*P|l\,\rangle}{\langle\, l|l\,\rangle} = \frac{1}{2}\frac{\|P|l\rangle\|_R^2 N}{\|\,|l\rangle\|_{L_2}^2}. \qquad (6)$$

Сфера применения информационной чувствительности – формирование модели экспериментального материала и планирование томографического эксперимента.

Физический смысл выражения (6) следующий: информационная чувствительность данной системы томографических функционалов тем выше, чем больше энергия полезного сигнала, прошедшего через среду с неоднородностью, поле которой совпадает с весовой функцией оцениваемого функционала l. В случае лучевой томографии и оцениваемого функционала типа среднего в элементе объема подобный качественный вывод очевиден. Но важной особенностью введенной меры информационной чувствительности является то, что она позволяет получить количественную характеристику для произвольных томографических функционалов (напомним, что дифракционные томографические функционалы знакопеременны [1]) и произвольных оцениваемых функционалов (например, оценивания коэффициентов пространственного Фурье-преобразования искомого поля параметра). Мера информационной чувствительности позволяет определить вклад каждого из входящих в модель (1) полей и построить адекватную модель, исключив из нее поля, информационно не обуспеченные данным планом эксперимента (набором томографических функционалов).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект No. 96-05-65904).

Литература

1. В. Н. Троян, Г. А. Рыжиков, *Дифракционная томография: построение и интерпретация томографических функционалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 176–196.
2. Ф. М. Гольцман, *Статистические модели интерпретации.* М., (1971).
3. В. Н. Троян, *Оценивание параметров сейсмических сигналов корректным методом момента.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, Л., вып. 24, 1984, с. 238–254.
4. В. Н. Троян, *Метод локального оценивания параметров сейсмических волн.* — Вестн. Ленингр. ун-та вып. **11** (1985), 24–35.
5. С. Р. Рао, *Линейные статистические методы и их применение.* М., (1968).

6. А. Н. Тихонов, В. А. Арсенин, *Методы решения некорректных задач.* М., (1968).
7. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, Н. С. Малкевич, *Использование методов математической статистики для решения некорректных задач.* — Успехи физических наук т. **102**, вып. **3** (1970), 13–48.
8. A. Tarantola, *Inverse problem theory.* Amsterdam (1987).
9. G. Backus, F. Gilbert, *Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems.* — Geophys. J. R. Astr. Soc. **13** (1967), 136–152.
10. G. Backus, F. Gilbert, *The resolving power of gross Earth data.* — Geophys. J. R. Astr. Soc. **16** (1968), 213–234.
11. В. Н. Троян, *Применение сплайн-функций для аппроксимации геофизической информации.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., вып. 20, (1981), с. 184–197.
12. В. Н. Троян, *Решение интерпретационных сейсмических задач методом конечных элементов.* — Вестник Ленингр. ун-та вып. **16** (1983), 25–37.
13. В. А. Морозов, *Регудярные методы решения некорректно поставленных задач.* М., (1987).
14. А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский, *Некорректнеы задачи.* — В кн.: Численные методы и приложения. М., (1989), с. 123–178.
15. В. Н. Троян, Ю. М. Соколов, *Методы аппроксимации геофизических данных на ЭВМ.* Л., (1987).
16. В. Н. Троян, *Статистические методы обработки сейсмической информации при исследовании сложных сред.* М., (1982).

Troyan V. N., Ryzhikov G. A. Construction of algorithms of the reconstruction tomography.

It is suggested the reconstruction algorithm of the parameter field of elastic waves by the diffraction tomography method. A priory information is taken into account in the probabilistic form. It is considered modifications of the algorithm, by various suggestions about the statistical connections of the parameter field. It is introduced the notion of the information sensetivity of the measurement field with respect to fixed linear field of the parameters. It is showed that the information sensetivity of the given system of tomographic functionals the higher, the more energy of the useful signal passed through the medium with a nonhomogeneity.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 23 октября 1996 г.