З. А. Янсон

ВОЛНЫ ЛЯВА ТИПА SH В НЕОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Изучение волн Лява вблизи поверхности изотропного упругого тела было предметом исследований многих авторов. Особый интерес (в связи с ее практической значимостью) представляет решение задачи о распространении волн шепчущей галереи, каковыми являются волны Лява, в анизотропной упругой среде. Одной из первых работ, где для математического описания волн Лява в анизотропном упругом теле использованы известные каустические разложения Ю. А. Кравцова и Д. Людвига, является [1].

В настоящей работе, идейно близкой [2], автор продолжает исследования поверхностных волн Лява для анизотропных упругих сред, см. [3–5]. Мы используем идеи и подход, которые были применены в [4] и где были получены условия, необходимые для возникновения поверхностных волн (аналогичных волнам Лява SH в изотропном случае). Условия эти увязывались с кинематикой поля лучей вблизи поверхности Σ, а точнее, с направлениями распространения волн, формирующих волну Лява. При построении равномерной асимптотики волнового поля мы опирались на результаты [2] и так же, как в [2, 5], использовали аппарат пространственно-временных (ПВ) лучевых разложений.

Хотя рассматриваемый тип симметрии среды является частным случаем анизотропии, трансверсально-изотропная упругая среда (упругие параметры среды инвариантны относительно вращения системы координат вокруг оси симметрии L) принадлежит к практически важному классу анизотропных сред. В окончательных формулах мы считаем систему координат прямоугольной, а поверхность Σ – плоскостью.

По сравнению с [3] проведенные в данной работе выкладки являются более полными. Существенным дополнением к [3] являются вычисления, связанные с необходимостью учета объемных волн, экспоненциально затухающих с глубиной, и с построением их лучевых разложений. В отличие от [2] таких волны две, а не одна, и процедура определения комплексных эйконалов этих волн достаточно нетривиальна. Коэффициенты каустических разложений для волн Лява и лучевых рядов для упомянутых объемных волн находятся рекуррентным образом, см. [2], в виде двухмасштабных разложений по расстоянию точки наблюдения и по расстоянию каустики поля лучей от поверхности.

§1. Постановка задачи. Построение асимптотических разложений для волн Лява

Математическая постановка задачи для волн Лява, сосредоточенных вблизи поверхности неоднородного упругого тела, не зависит от типа симметрии среды (т.е. является среда изотропной или анизотропной) и сводится к решению уравнений движения упругой среды для вектора смещения $\vec{u}$

$$\big(\vec{L}\vec{u}\big)_j \equiv \nabla_i\big(G^{i\alpha}\sigma_{\alpha j}\big) - \rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \quad i,j,\alpha = 1,2,3, \tag{1.1}$$

где $\sigma_{\alpha j}$ – тензор напряжений, ρ – плотность среды, t – время, ∇_i – ковариантная производная. На поверхности Σ должно выполняться краевое условие

$$\sigma_{3j}(\vec{u})\big|_\Sigma = \big(a_{3j\alpha\beta}G^{\alpha i}\nabla_i u^\beta\big)_\Sigma = 0, \quad j = 1,2,3, \tag{1.2}$$

где $a_{ij\alpha\beta}$ – симметричный тензор упругих постоянных среды (тензор теории упругости): $a_{ij\alpha\beta} = a_{\alpha\beta ij} = a_{ji\beta\alpha}$. В (1.1) и (1.2) G^{ij} – метрический тензор в криволинейной системе координат q^1, q^2, q^3; $q^3 = n$ – координата по нормали к Σ, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали, направленный внутрь тела; u_i, u^j – соответственно ковариантные и контравариантные компоненты вектора $\vec{u}$.

Волновое поле высокочастотной волны Лява будем искать, как и в [2], в виде каустического разложения

$$\vec{u}(q^1,q^2,q^3,t) = \Big\{\vec{A}v(-p^{2/3}m) + ip^{-1/3}\vec{B}v'(-p^{2/3}m)\Big\}e^{ipl}, \tag{1.3}$$

где v – функция Эйри, l, m – искомые функции координат q^1, q^2, q^3 и времени t, $p \gg 1$ (большой параметр задачи), $\vec{A}$, $\vec{B}$ имеют вид

$$\vec{A} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{A}^{\,k}}{(ip)^k}, \quad \vec{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\vec{B}^{\,k}}{(ip)^k}. \tag{1.3a}$$

По аналогии с [2] положим

$$m\big|_\Sigma = \gamma > 0, \quad \gamma = \mathrm{const} > 0. \tag{1.4}$$

Параметр γ в дальнейшем можем считать малым параметром задачи, вследствие чего коэффициенты $\vec{A}^{\,k}$ и $\vec{B}^{\,k}$ вблизи Σ представим, как и в [2], в виде двухмасштабных разложений

$$\vec{A}^{\,k} = \sum_{j=-k}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\vec{A}^{\,k}_{sj} n^s\gamma^j, \quad \vec{B}^{\,k} = \sum_{j=-k}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\vec{B}^{\,k}_{sj} n^s\gamma^j, \tag{1.5}$$

причем ряды для $\vec{A}^{\,0}$ и $\vec{B}^{\,0}$ не содержат отрицательных степеней γ. Функции l, m из (1.3) также будут построены в виде двойных рядов по целым степеням $n^i\gamma^j$, $i, j = 0, 1, 2, \cdots$, см. [2].

Краевое условие (1.2) в силу (1.3) записывается в виде линейной комбинации функций $v(-p^{2/3}\gamma)$ и $v'(-p^{2/3}\gamma)$. Полагая в полученном выражении, см. [2, 3],

$$v'(-p^{2/3}\gamma) = 0, \quad \gamma = \gamma_\nu = \frac{\varkappa_\nu}{p^{2/3}}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.6}$$

($-\varkappa_\nu$ – корни функции $v'(\tau)$), для коэффициентов $\sigma^k_{3j}\big|_{n=0}$ разложения $\sigma_{3j}\big|_{n=0}$ по степеням $1/ip$ получим выражения

$$\begin{aligned}\sigma^k_{3j}\big|_{n=0} = \big[a_{3j\alpha\beta}l^\alpha(A^k)^\beta + \gamma a_{3j\alpha\beta}m^\alpha(B^k)^\beta + \sigma_{3j}(\vec{A}^{\,k-1}\big]_{n=0}\times \\ \times v(-p^{2/3}\gamma_\nu)e^{ipl_0(q^1,q^2,t)}, \quad l_0 = l\big|_{n=0}, \quad j = 1, 2, 3,\end{aligned} \tag{1.7}$$

которые должны равняться нулю. В (1.7) l^α, m^α, $(A^k)^\beta$, $(B^k)^\beta$ – контравариантные компоненты векторов ∇l, ∇m, $\vec{A}^{\,k}$, $\vec{B}^{\,k}$. Индекс ν (номер собственной волны) у параметра γ будем в дальнейшем опускать и при фиксированном ν будем считать, что γ – мало.

Рекуррентная система для коэффициентов $\vec{A}^{\,k}$, $\vec{B}^{\,k}$ (результат подстановки (1.3), (1.3а) в (1.1)) имеет стандартный вид, см. [2]

$$\left\{\begin{array}{l}(\vec{N}_l + m\vec{N}_m)\vec{A}^{\,k} + m2\vec{N}_{lm}\vec{B}^{\,k} = -\vec{F_1}^{\,k-1}, \\ 2\vec{N}_{lm}\vec{A}^{\,k} + (\vec{N}_l + m\vec{N}_m)\vec{B}^{\,k} = -\vec{F_2}^{\,k-1},\end{array}\right. k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned}&\vec{F_1}^{\,k-1} \equiv \vec{M}_l\vec{A}^{\,k-1} + (\vec{N}_m + m\vec{M}_m)\vec{B}^{\,k-1} + \vec{L}\vec{A}^{\,k-2}, \\ &\vec{F_2}^{\,k-1} \equiv \vec{M}_m\vec{A}^{\,k-1} + \vec{M}_l\vec{B}^{\,k-1} + \vec{L}\vec{B}^{\,k-2}, \\ &\quad \vec{A}^{\,-r} = \vec{B}^{\,-r} \equiv 0, \quad r = 1, 2,\end{aligned} \tag{1.8a}$$

Операторы $\vec{N}_\xi$, $\vec{N}_{\xi\eta}$, $\vec{M}_\xi$ – известные операторы лучевого метода, которые для анизотропной упругой среды определены следующими выражениями

$$\left.\begin{aligned}(\vec{N}_\xi \vec{C})_j &\equiv a_{ij\alpha\beta}\xi^i\xi^\alpha C^\beta - \rho\Big(\frac{\partial\xi}{\partial t}\Big)^2 C_j,\\ 2(\vec{N}_{\xi\eta}\vec{C})_j &\equiv a_{ij\alpha\beta}\big(\xi^i\eta^\alpha + \xi^\alpha\eta^i\big)C^\beta - 2\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\,\frac{\partial\eta}{\partial t}\,C_j,\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}(\vec{M}_\xi\vec{C})_j \equiv G^{\alpha i}\big(\nabla_\alpha(a_{ij\delta\beta}\xi^\delta)\big)C^\beta + \big[a_{ij\delta\beta}\xi^i G^{\delta h}\nabla_h C^\beta +\\ + a_{ij\delta\beta}\xi^\beta G^{i\alpha}\nabla_\alpha C^\delta\big] - 2\rho\frac{\partial\xi}{\partial t}\,\frac{\partial C_j}{\partial t} - \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,C_j.\end{aligned} \tag{1.9a}$$

Положим в (1.8) $k = 0$ и рассмотрим соответствующую однородную систему для $\vec{A}^{\,0}$, $\vec{B}^{\,0}$. Условие разрешимости второго уравнения этой системы на Σ в нулевом приближении по γ ($\gamma = 0$) имеет вид

$$\big(2\vec{N}_{lm}\vec{A}^{\,0}, \vec{A}^{\,0}\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \tag{1.10}$$

или ввиду (1.4) ($\frac{\partial m}{\partial q^1} = \frac{\partial m}{\partial q^2} = 0$ на Σ)

$$\big(a_{3j\alpha\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta l^\alpha\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{1.10a}$$

Соотношение (1.10a) является необходимым условием возникновения волн Лява. Левая часть полученного равенства пропорциональна нормальной компоненте групповой скорости $\vec{g}$ волны Лява при $n = 0$, $\gamma = 0$, см. [3, 5], и следовательно, $\vec{g}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ направлена вдоль Σ.

Из первого уравнения упомянутой выше однородной системы следует, что

$$\big(\vec{N}_l\vec{A}^{\,0}\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \tag{1.11}$$

т.е. $\vec{A}^{\,0}$ (при $n = 0$, $\gamma = 0$) – собственный вектор симметричной матрицы $A = (a_{ij\alpha\beta}l^i l^\alpha)$, а $\lambda = \rho l_t^2$ – собственные значения этой матрицы.

Обратимся к краевым условиям (1.2), (1.7). Полагая в (1.7) $k = 0$, $\gamma = 0$, приходим к необходимости выполнения равенств

$$(\vec{\xi}_j, \vec{A}^{\,0})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \tag{1.12}$$

$$\vec{\xi}_j = \big(a_{3j\alpha 1}l^\alpha, a_{3j\alpha 2}l^\alpha, a_{3j\alpha 3}l^\alpha\big).$$

А затем, проецируя (1.11) на $\vec{n}$ и учитывая (1.12), получим на Σ

$$A_n^0\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = (\vec{A}^0, \vec{n})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \tag{1.13}$$

что является основной физической характеристикой главного члена асимптотики волны Лява типа SH на поверхности Σ, см. [2].

В силу (1.12) и (1.13) векторы $\vec{\xi}_j$ должны быть не только компланарны, но их касательные к Σ компоненты должны быть коллинеарны в любой точке поверхности ($n = 0$) в приближении $\gamma = 0$, а именно,

$$\begin{gathered} (\vec{\xi}_i)_s \times (\vec{\xi}_j)_s = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \\ (\vec{\xi}_j)_s = \left(a_{3j\alpha 1} l^\alpha, a_{3j\alpha 2} l^\alpha\right). \end{gathered} \tag{1.13a}$$

§2. Определение коэффициентов $\vec{A}^{\,0}, \vec{B}^{\,0}$ в трансверсально-изотропной упругой среде. Уравнение переноса

1. В силу свойств симметрии тензор упругих постоянных $a_{ij\alpha\beta}$, элементы которого – функции координат, сводится к симметричной квадратной 6×6 матрице (c_{rs}), $r, s = 1, 2, \ldots 6$, причем соответствие между парами индексов (ij), $(\alpha\beta)$ элементов $a_{ij\alpha\beta}$ и индексами r, s элементов c_{rs} дается схемой, см. [6]

$$\begin{gathered} (11) \longleftrightarrow 1, \ \ (22) \longleftrightarrow 2, \ \ (33) \longleftrightarrow 3, \\ (23) = (32) \longleftrightarrow 4, \ \ (13) = (31) \longleftrightarrow 5, \ \ (12) = (21) \longleftrightarrow 6. \end{gathered}$$

В случае трансверсально-изотропной упругой среды (упругие постоянные среды инвариантны относительно вращения системы координат вокруг оси L) ненулевые элементы матрицы (c_{rs}) определяются пятью независимыми параметрами и имеют следующий вид

$$\begin{gathered} c_{11} = c_{22}, \ \ c_{12} = c_{21}, \ \ c_{33}, \ \ c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32}, \\ c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2, \ \ c_{44} = c_{55}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Нулевые же элементы матрицы (c_{rs}) совпадают с нулевыми элементами этой матрицы для изотропной среды. Элементы c_{rs} в (2.1) получены в прямоугольной декартовой системе координат q^1, q^2, q^3, причем ось Oq^3 принимается за ось симметрии L, а поверхность Σ оказывается плоскостью. Ниже мы будем это предполагать, выражая элементы $a_{ij\alpha\beta}$ через c_{rs}. Заметим, что при этом $a_{3i'\alpha'\beta'\equiv 0}$, $i', \alpha', \beta' = 1, 2$.

Кроме того, элементы c_{rs} в (2.1) должны быть подчинены неравенствам

$$\begin{gathered} c_{11} > 0, \quad c_{33} > 0, \quad c_{12} + c_{66} > 0, \quad c_{66} > 0, \\ c_{44} = c_{55} > 0, \quad (c_{12} + c_{66})c_{33} > c_{13}^2, \end{gathered} \tag{2.2}$$

которые являются следствием положительной определенности квадратичной формы для плотности потенциальной энергии деформации.

В обозначениях [6], удобных для сравнения с изотропным случаем,

$$\begin{gathered} c_{11} = c_{22} = \lambda + 2\mu, \;\; c_{33} = \lambda + 2\mu - \widetilde{p}, \;\; c_{44} = c_{55} = \mu - \widetilde{m}, \\ c_{12} = c_{21} = \lambda, \;\; c_{13} = c_{23} = \lambda - \widetilde{l}, \;\; c_{66} = \mu, \end{gathered} \tag{2.2a}$$

для оператора $\vec{N}_\xi$ из (1.9) получаем выражение

$$\begin{gathered} \vec{N}_\xi \vec{C} \equiv (\lambda + \mu)(\vec{C}\nabla\xi)\nabla\xi + \big(\mu(\nabla\xi)^2 - \rho\xi_t^2\big)\vec{C}_s + \\ + \big((\mu - \widetilde{m})(\nabla\xi)^2 - \rho\xi_t^2\big)C_n\vec{n} - \Big\{ \big[\xi_3(\widetilde{m} + \widetilde{l})C_n\nabla_s\xi + \xi_3^2\widetilde{m}\vec{C}_s\big] + \\ + \big[\xi_3(\widetilde{m} + \widetilde{l})(\vec{C}_s\nabla\xi) + \xi_3^2(\widetilde{p} - \widetilde{m})C_n\big]\vec{n} \Big\}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\vec{C} = \vec{C}_s + C_n\vec{n}$, $(\vec{C}_s, \vec{n}) = 0$, $\nabla\xi = \nabla_s\xi + \xi_3\vec{n}$, $\xi_3 = \frac{\partial\xi}{\partial n}$, $(\nabla_s\xi, \vec{n}) = 0$.

Соотношение (1.10), или (1.10a), для трансверсально-изотропной среды приводится на Σ при $\gamma = 0$ к виду

$$l_3\big[c_{44}\big|\vec{A}_s^0\big|^2 + c_{33}(A_n^0)^2\big] = -A_n^0\big(\vec{A}_s^0\nabla_s l\big)\big(c_{13} + c_{44}\big), \tag{2.4}$$

где $l_3 = \frac{\partial l}{\partial n}$, $\vec{A}^{\,0} = \vec{A}_s^0 + A_n^0\vec{n}$, $\nabla_s l$ – вектор с компонентами $\frac{\partial l}{\partial q^1}$, $\frac{\partial l}{\partial q^2}$. Так как $A_n^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$ и, по предположению, $|\vec{A}^{\,0}| \not\equiv 0$, из (2.4) следует

$$l_3\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \tag{2.5}$$

(будем предполагать, что $c_{13} + c_{44} \neq 0$). В изотропном случае равенство (2.5) выполнено при любом γ, [2].

Обращаясь к равенствам (1.12) и учитывая (2.5), при $j = 3$ получим

$$(\vec{\xi}_3, \vec{A}^{\,0})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = c_{13}(\vec{A}^{\,0}\nabla_s l)\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \tag{2.6}$$

а при $j = 1, 2$ условия (1.12) будут удовлетворены тождественно в силу (2.5) и $a_{3i'\alpha'\beta'} \equiv 0$, $i', \alpha', \beta' = 1, 2$. Так как при этом на Σ

$$(\vec{\xi}_1)_s \equiv 0, \quad (\vec{\xi}_2)_s \equiv 0 \quad (\gamma = 0),$$

то (1.13a) также выполнены.

Таким образом, собственный вектор $\vec{A}^{\,0}$ задачи (1.11) имеет при $n = 0$, $\gamma = 0$ поляризацию

$$\vec{A}^{\,0} = |\vec{A}^{\,0}|\frac{\vec{\zeta}}{|\vec{\zeta}|}, \tag{2.7}$$

где $\vec{\zeta} = \nabla_s l \times \vec{n}$, а $\vec{\zeta}$, $\nabla_s l$, $\vec{n}$ – тройка ортогональных векторов на Σ $(\gamma = 0)$.

Из (1.11) и (2.3), используя (2.5) и (2.7), получим на Σ при $\gamma = 0$ уравнение

$$c_{66}(\nabla_s l)^2 - \rho l_t^2 = 0, \quad c_{66} \equiv \mu, \tag{2.8}$$

которое есть ПВ-уравнение эйконала на поверхности Σ и совпадает с таковым в [2]. Функция $l_{00} \equiv l\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ (эйконал поверхностной волны) находится однозначно методом характеристик, если заданы значения $l_{00}\big|_{t=0}$.

Величина $\frac{(-l_t)}{|\nabla_s l|} = (\frac{c_{66}}{\rho})^{1/2}$, где $(-l_t) > 0$, есть фазовая скорость волн, формирующих поперечную волну Лява. Из физических соображений очевидно, что эта скорость должна быть наименьшей из скоростей v_r, $r = 1, 2, 3$, для трех типов волн, распространяющихся в анизотропной упругой среде. Этот факт подтверждается вычислениями, выполненными в §3, п. 2.

2. Обратимся к вычислению коэффициента $\vec{B}^{\,0}$. Проецируя при $k = 0$ второе уравнение системы (1.8) на $\nabla_s l$ и $\vec{n}$ и учитывая (2.5), (2.7), (2.8), (2.3), находим на Σ

$$(\vec{B}^{\,0}\nabla_s l)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad B_n^0\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \tag{2.9}$$

Положим теперь в (1.7) $k=0$ и запишем $\sigma^0_{3j}\big|_{n=0}$ в виде

$$\sigma^0_{33}\big|_{n=0} = $$
$$= \left[c_{13}(\vec{A}^{\,0}\nabla_s l) + c_{33}A^0_n l_3 + \gamma\frac{\partial m}{\partial n}c_{33}B^0_n\right]v(-\rho^{2/3}\gamma)e^{ipl}\big|_{n=0}, \quad (2.10)$$

$$\sigma^0_{3j'}\big|_{n=0} = $$
$$= c_{44}\left[\frac{\partial l}{\partial q^{j'}}A^0_n + l_3(A^0)_{j'} + \gamma\frac{\partial m}{\partial n}(B^0)_{j'}\right]v(-\rho^{2/3}\gamma)e^{ipl}\big|_{n=0}.$$
$$j'=1,2. \quad (2.11)$$

Спроецируем (2.11) на $\vec{\zeta}=\nabla_s l\times\vec{n}$. Полученная проекция обратится в нуль с точностью до членов $O(\gamma^2)$, если мы положим

$$(\vec{B}^{\,0},\vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0 \quad (2.9\text{a})$$

(причем мы учли, что $\frac{\partial l_3}{\partial\gamma} = \frac{\partial^2 l}{\partial n\,\partial\gamma} = 0$ при $n=0$, $\gamma=0$, см. ниже), и следовательно, в силу (2.9),

$$\vec{B}^{\,0}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0. \quad (2.10\text{a})$$

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (1.8) при $k=1$. Условие разрешимости полученного векторного уравнения для $\vec{A}^{\,1}$ на Σ при $\gamma=0$ имеет вид

$$(\vec{F}_1^{\,0},\vec{A}^{\,0})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$$

и вследствие (2.10a) и (1.9a) может быть записано в форме

$$(\vec{M}_l\vec{A}^{\,0},\vec{A}^{\,0})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \Big\{\nabla_{\alpha'}\big(G^{\alpha' i'}a_{i'j\delta\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta l^\delta\big) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial n}\big(a_{3j\delta'\beta}(A^0)^j(A^0)^\beta l^{\delta'}\big) + \frac{\partial^2 l}{\partial n^2}a_{3\alpha3\beta}(A^0)^\alpha(A^0)^\beta + \quad (2.12)$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\big(-\rho l_t|\vec{A}^{\,0}|^2\big)\Big\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0.$$

Равенство (2.12) сводится к уравнению переноса для $\vec{A}^{\,0}$ на Σ, если воспользоваться выражением для $\frac{\partial^2 l}{\partial n^2}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, которое вычисляется из второго уравнения системы (1.8) при $k=0$. Выпишем эту систему (полагая в (1.8) $k=0$) с целью удобства изложения полученных результатов:

$$\begin{cases} \vec{N}_l\vec{A}^{\,0} + m\vec{N}_m\vec{A}^{\,0} + m2\vec{N}_{lm}\vec{B}^{\,0} = 0, \\ 2\vec{N}_{lm}\vec{A}^{\,0} + \vec{N}_l\vec{B}^{\,0} + m\vec{N}_m\vec{B}^{\,0} = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Функции l и m строятся в виде разложений по n и γ, [1, 2],

$$l = \sum_{i,j=0}^{\infty} l_{ij} n^i \gamma^j, \quad m = \sum_{i,j=0}^{\infty} m_{ij} n^i \gamma^j,$$

причем коэффициенты этих разложений находятся рекуррентным образом при условии, что $l_{00} = l\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ известна на Σ.

Дифференцируя 2-е уравнение однородной системы (2.13) по n и проецируя его на $\vec{A}^{\,0}$, получим

$$\frac{\partial^2 l}{\partial n^2}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 2l_{20} = -\frac{1}{\widetilde{a}_{33} m_{10}} \rho(-l_t) \frac{dm_{10}}{dt},$$

$$\widetilde{a}_{33} \equiv \frac{a_{3\alpha 3\beta}(A^0)^\alpha (A^0)^\beta}{|\vec{A}^{\,0}|^2}. \tag{2.14}$$

Для трансверсально-изотропной среды $\widetilde{a}_{33} = c_{44}$; $\frac{dm_{10}}{dt}$ – производная вдоль ПВ-луча – характеристики уравнения (2.8).

Коэффициент $m_{10} = \frac{\partial m}{\partial n}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ в (2.14), так же как и $l_{01} = \frac{\partial l}{\partial \gamma}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, находится в результате дифференцирования 1-го уравнения системы (2.13) соответственно по n и γ, так что

$$m_{10}^3 = -\left(\frac{2(l_{00})_t^2}{c_{44/\rho} R_Э}\right)_{n=0}, \quad l_{01} = -\frac{1}{(-l_{00})_t} \int\limits_{M_0}^{M} \frac{c_{44}}{\rho} \frac{m_{10}^2}{2}\, ds, \quad ds = dt,$$

где интеграл берется вдоль ПВ-луча, $\frac{2}{R_Э} = (\frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{c_{66}}{\rho})_{n=0} > 0$, $c_{66} = \mu$, $R_Э$ – эффективный радиус кривизны, совпадающий с соответствующей величиной в [2], если Σ – плоскость.

Равенство (2.12) теперь приводится к виду $(n=0, \gamma=0)$

$$\mathrm{div}_s\left(\vec{g}\frac{|\vec{A}^{\,0}|^2\rho}{|m_{10}|}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{|\vec{A}^{\,0}|^2\rho}{|m_{10}|} = 0, \tag{2.15}$$

где вектор $\vec{g}$ – групповая скорость поверхностной волны – имеет компоненты $g_{i'} = \frac{c_{66}}{\rho}\frac{\partial l}{\partial q^{i'}}/(-l_t)$, $i' = 1, 2$, см. [5].

Интегрируя (2.15) вдоль ПВ-луча, для $\vec{A}^0$ на Σ получаем формулу лучевого метода

$$\vec{A}_n^0\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \chi^0(\alpha_1,\alpha_2)\left(\frac{|m_{10}|}{\rho\Delta}\right)_{n=0}^{1/2}\vec{\zeta}, \tag{2.15a}$$

где $\Delta = \frac{D(t,q^1,q^2)}{D(s,\alpha_1,al_2)}$ – якобиан перехода от координат t, q^1, q^2 к лучевым координатам s, α_1, α_2, $\chi^0(\alpha_1,\alpha_2)$ – произвольная функция, постоянная вдоль ПВ-луча.

3. Предполагается, что процедура построения коэффициентов $\vec{A}_{ij}^0$, $\vec{B}_{ij}^0$, $i, j \geqslant 1$, разложений (1.5) является рекуррентной, см. [2], что и будет показано ниже. Дифференцируя по n однородную систему (2.13), из первого уравнения находим при $n=0$, $\gamma=0$ проекции

$$\frac{\partial\vec{A}^0}{\partial n}\bigg|_{\nabla_s l}, \quad \frac{\partial A_n^0}{\partial n},$$

а из второго уравнения полученной системы определяем при $n=0$, $\gamma=0$

$$\frac{\partial\vec{B}^0}{\partial n}\bigg|_{\nabla_s l}, \quad \frac{\partial B_n^0}{\partial n}.$$

Легко видеть при этом, используя (2.3), что для трансверсально-изотропной среды $(\frac{\partial\vec{A}^0}{\partial n}, \nabla_s l) = 0$, $\frac{\partial A_n^0}{\partial n} = 0$ $(n=0,\ \gamma=0)$.

Рассмотрим 2-е уравнение системы (1.8) при $k=1$. Нетрудно убедиться, что условие разрешимости этого уравнения для $\vec{B}^1$ при $n=0$, $\gamma=0$ имеет вид

$$(\vec{F}_2^0, \vec{A}^0)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$$

и, так же как в [2], определяет еще не найденную проекцию $(\frac{\partial\vec{A}^0}{\partial n}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$.

Дифференцируя теперь систему (2.13) по γ, из 1-го уравнения (проецируя его на $\nabla_s l$ и $\vec{n}$) получаем

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}(\vec{A}^0\nabla_s l)\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad \frac{\partial A_n^0}{\partial\gamma}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \tag{2.16}$$

а из 2-го уравнения соответственно найдем

$$\left(\frac{\partial\vec{B}^0}{\partial\gamma}, \nabla_s l\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad \frac{\partial B_n^0}{\partial\gamma}\bigg|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \tag{2.16a}$$

Продолжая процесс построения высших приближений асимптотики по γ и дифференцируя 1-е уравнение системы (2.13) дважды по γ, придем при $n=0$, $\gamma=0$ к равенству

$$\begin{gathered}(c_{12}+c_{66})(\nabla_s l)^2\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}(\vec{A}^{\,0}\nabla_s l)=\\=\left[2c_{44}m_{10}^2+4\rho(-l_t)\frac{dl_{01}}{dt}\right](\vec{A}^{\,0},\nabla_s\, l_{01}),\end{gathered}\tag{2.17}$$

где $\frac{dl_{01}}{dt}$ – производная вдоль ПВ-луча.

Первое из равенств (2.16) определяет $(\frac{\partial\vec{A}^{\,0}}{\partial\gamma},\nabla_s l)$, равенство же (2.17) дает проекцию $(\frac{\partial^2\vec{A}^{\,0}}{\partial\gamma^2},\nabla_s l)$.

При нахождении проекций (2.16а) и равенства (2.17) необходимо вычислить коэффициент $l_{11}\equiv\frac{\partial l_3}{\partial\gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}=\frac{\partial^2 l}{\partial n\,\partial\gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Это легко сделать, если воспользоваться равенством

$$\big(2\vec{N}_{lm}\vec{A}^{\,0},\vec{A}^{\,0}\big)=m\big(2\vec{N}_{lm}\vec{B}^{\,0},\vec{B}^{\,0}\big),\tag{2.18}$$

которое является следствием системы (2.13). Дифференцируя (при $n=0$) (2.18) по γ, получим, что $l_{11}=0$.

Процедура определения еще не найденных проекций $\frac{\partial\vec{A}^{\,0}}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\vec{B}^{\,0}}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\vec{B}^{\,0}}{\partial n}$ на направление $\vec{\zeta}$ (при $n=0$, $\gamma=0$) основана на использовании условий разрешимости, к которым приводит дифференцирование по n и γ системы (1.8) при $k=1$.

Рассмотрим (2.10), (2.11), используя полученные результаты. Коэффициент при γ^1 в этих выражениях равен нулю в силу $l_{11}=0$, $\vec{B}_{00}=0$ и равенств (2.16). Коэффициент же при γ^2 для выражения в квадратных скобках в (2.10) оказывается равным $c_{13}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}(\vec{A}^{\,0}\nabla_s l)\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и отличен от нуля вследствие (2.17).

Невозможность удовлетворить краевым условиям с точностью до $o(\gamma^2)$ препятствует процессу построения коэффициентов $\vec{A}^0_{ij}$, $\vec{B}^0_{ij}$, $j\geqslant 2$. Выход из этой ситуации – добавить к разложению (1.3) (к полю волны Лява) не одно, как в [2], а два ПВ лучевых разложения для двух более быстрых волн с комплексными эйконалами.

§3. Построение лучевых разложений для объемных волн с комплексными эйконалами

1. Волновые поля $\vec{u}_{1,2}$ объемных волн мы представим в виде

ПВ лучевых рядов

$$\vec{u}_{1,2} = \gamma e^{ip\theta_{1,2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{C}^k_{1,2}}{(ip)^k}. \tag{3.1}$$

Как и в [2], эти волны будут экспоненциально затухать с удалением от поверхности Σ, если эйконалы $\theta_{1.2}$ подчинены на Σ условиям

$$\theta_{1,2}\big|_\Sigma = l\big|_\Sigma, \quad \operatorname{Im}\frac{\partial\theta_{1,2}}{\partial n}\big|_\Sigma > 0. \tag{3.2}$$

Подстановка (3.1) в уравнения (1.1) приводит к рекуррентным уравнениям ПВ лучевого метода, а именно,

$$\begin{gathered}\vec{N}_{\theta_{1,2}}\vec{C}^k_{1,2} = -\big[\vec{M}_{\theta_{1,2}}\vec{C}^{k-1}_{1,2} + \vec{L}\vec{C}^{k-2}_{1,2}\big],\\ k = 0,1,2,\ldots \quad \vec{C}^{-1}_{1,2} = \vec{C}^{-2}_{1,2} \equiv 0,\end{gathered} \tag{3.3}$$

причем

$$\vec{C}^k_{1,2} = \Phi^k_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2} + \vec{U}^{k0}_{1,2}, \quad \vec{U}^{00}_{1,2} \equiv 0. \tag{3.4}$$

При $k = 0$ имеем $\vec{C}^0_{1,2} = \Phi^0_{1,2}\vec{\varkappa}_{1,2}$, где $\vec{\varkappa}_{1,2}$ – векторы поляризации – удовлетворяют однородной системе

$$\big(\vec{N}_{\theta_r}\vec{\varkappa}_r\big)_j \equiv a_{ij\beta\delta}\theta^i_r\theta^\beta_r\varkappa^\delta_r - \rho(\theta_r)^2_t(\varkappa_r)_j = 0, \quad r = 1,2; \quad j = 1,2,3 \tag{3.5}$$

и подчинены, например, условию нормировки $\rho|\,\vec{\varkappa}_r\,|^2 = 1$.

Эйконалы $\theta_{1,2}$, так же как и векторы поляризации $\vec{\varkappa}_{1,2}$, однозначно определяются условиями (3.2) и находятся в виде разложений по n и γ, см. ниже. Функции $\Phi^0_{1,2}$ подлежат определению из краевых условий (1.2) для суммарного волнового поля $\vec{u}+\vec{u}_1+\vec{u}_2$. Подстановка этой суммы в (1.2) приводит к требованию равенства нулю суммы выражений (1.7) и $\sigma^k_{kj}(\vec{u}_{1,2})\big|_{n=0}$, имеющих вид

$$\sigma^k_{3j}(\vec{u}_r)\big|_{n=0} = \gamma\big[a_{3j\beta\delta}\theta^\beta_r(C^k_r)^\delta + \sigma_{3j}(\vec{C}^{k-1}_r)\big]e^{ipl}\big|_{n=0}, \quad r = 1,2. \tag{3.6}$$

При $k = 0$ для правых частей (3.6) получим

$$\gamma\big\{\Phi^0_r\big[c_{13}(\vec{\varkappa}_r, \nabla_s l) + c_{33}(\theta_r)_n(\varkappa_r)_n\big]e^{ipl}\big\}_{n=0}, \tag{3.7}$$

$$\gamma\bigg\{\Phi^0_r c_{44}\big[(\varkappa_r)_n\frac{\partial l}{\partial q^{j'}} + (\theta_r)_n(\varkappa_r)_{j'}\big]e^{ipl}\bigg\}_{n=0}, \quad r = 1,2; \quad j' = 1,2. \tag{3.8}$$

Приравнивая нулю сумму (2.10) и двух слагаемых (3.7) ($r = 1, 2$), а также полагая равной нулю проекцию на $\nabla_s l$ суммы векторов (2.11) и (3.8) ($r = 1, 2$), получим на поверхности Σ линейную (неоднородную) систему для $\frac{\partial \Phi^0_{1,2}}{\partial \gamma}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Как очевидно из результатов §2, на Σ следует положить $\Phi^0_{1,2}\big|_{\gamma=0} = 0$.

Проецируя сумму векторов (2.11) и (3.8) на $\vec{\zeta} = \nabla_s l \times \vec{n}$, приравняем у этой проекции коэффициент при γ^2 нулю. Полученное равенство совместно с 1-ым уравнением системы (1.8) при $k = 1$ дает возможность найти $(\frac{\partial \vec{A}^{\,0}}{\partial \gamma}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $(\frac{\partial \vec{B}^{\,0}}{\partial \gamma}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Заметим, что проекция (3.8) на $\vec{\zeta}$ не влияет на значение упомянутого коэффициента, т.к. $(\vec{\varkappa}_{1,2}, \vec{\zeta}) = 0$ при $n = 0$, $\gamma = 0$, см. ниже.

Как и в [2], нахождение высших членов асимптотики $\vec{A}^{\,k}$ и $\vec{B}^{\,k}$, $k \geqslant 1$, подчиняется рекуррентному процессу. Мы остановимся на некоторых деталях соответствующих вычислений, но после того, как опишем процедуру построения комплексных эйконалов лучевых решений $\vec{u}_{1,2}$.

2. Пусть $(\theta_{1,2})_n = \frac{\partial \theta_{1,2}}{\partial n}$, согласно с (3.2), – комплексные величины на Σ, причем $|(\theta_{1,2})_n| \neq 0$. Проецируя векторные уравнения (3.5) на $\vec{n}$ и $\nabla_s l$, используя при этом (2.3) и уравнение эйконала (2.8), соответственно получим на Σ при $\gamma = 0$

$$\left\{\begin{array}{ll} (c_{13} + c_{44})\theta_n^2(\vec{\varkappa}\nabla_s l) + \left[c_{33}\theta_n^2 - \widetilde{m}(\nabla_s l)^2\right]\theta_n \varkappa_n = 0, & (3.9)\\ \left[(c_{12}+c_{66})(\nabla_s l)^2 + c_{44}\theta_n^2\right](\vec{\varkappa}\nabla_s l) + (c_{13}+c_{44})(\nabla_s l)^2\theta_n\varkappa_n = 0, & (3.10)\end{array}\right.$$

где $\widetilde{m} = (c_{66} - c_{44})$. Равенства (3.9), (3.10) представляют собой однородную систему для $(\vec{\varkappa}\nabla_s l)$ и $\theta_n \varkappa_n$, где под $\vec{\varkappa}$ и θ_n подразумеваем $\vec{\varkappa}_{1,2}$ и $(\theta_{1,2})_n$. Нас будут интересовать лишь ненулевые решения системы (3.9), (3.10) $(\vec{\varkappa}\nabla_s l) \neq 0$, $\theta_n \varkappa_n \neq 0$. В противном случае должно выполняться $(\vec{\varkappa}_{1,2}, \vec{\zeta}) \not\equiv 0$ (предполагаем, что $\vec{\varkappa}_{1,2} \not\equiv 0$), и из (3.5), (2.3) немедленно следуют равенства $(\theta_{1,2})_n = 0$ при $n = 0$, $\gamma = 0$, что противоречит (3.2). Возможность обращения в нуль выражений в квадратных скобках в (3.9), (3.10) исключается, так как в этих случаях также $(\vec{\varkappa}_{1,2}\nabla_s l) = (\varkappa_{1,2})_n = 0$.

Таким образом, мы приходим к необходимости выполнения при $n=0$, $\gamma=0$ равенства

$$\Delta \equiv c_{33}c_{44}\theta_n^4 + \big\{(c_{12}+c_{66})c_{33} - (c_{13}+c_{44})^2 - \widetilde{m}c_{44}\big\}(\nabla_s l)^2\theta_n^2 - \\ -\widetilde{m}(c_{12}+c_{66})(\nabla_s l)^4 = 0, \qquad (3.11)$$

где Δ – определитель системы (3.9), (3.10).

Векторы поляризации $\vec{\varkappa}_{1,2}$, как и следовало ожидать, удовлетворяют на Σ условию ортогональности

$$(\vec{\varkappa}_{1,2}, \vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \qquad (3.11\text{a})$$

что непосредственно следует из (3.5), (2.3), а точнее, из равенства $\big(\vec{N}_{\theta_{1,2}}\vec{\varkappa}_{1,2}, \vec{\zeta}\big)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$ при учете (2.8).

Итак, искомые значения $(\theta_{1,2})_n$ при $n=0$, $\gamma=0$ должны быть корнями биквадратного уравнения (3.11), так что

$$(\theta_n)_{1,2}^2 = \frac{-f \mp [f^2 + 4\widetilde{m}(c_{12}+c_{66})c_{33}c_{44}]^{1/2}}{2c_{33}c_{44}}(\nabla_s l)^2, \qquad (3.12)$$

$$f \equiv (c_{12}+c_{66})c_{33} - (c_{13}+c_{44})^2 - \widetilde{m}c_{44}, \quad \widetilde{m} = c_{66} - c_{44}.$$

Очевидно, значения $(\theta_n)_{1,2}^2$ определяются знаками f и $\widetilde{m}$. Кроме того, ясно, что если $f>0$ и $\widetilde{m}<0$, то $(\theta_n)_{1,2}^2 < 0$. В изотропной упругой среде имеем $\widetilde{m}=0$ ($c_{44}=c_{66}=\mu$), $f=\mu(\lambda+\mu)>0$, $(\theta_n)_2 = 0$, $(\theta_n)_1^2 = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\,(\nabla_s l)^2$, что соответствует [2].

Обозначим в (3.12)

$$F \equiv f^2 + 4\widetilde{m}(c_{12}+c_{66})c_{33}c_{44}.$$

Найдем условия (они сводятся к соотношениям между элементами матрицы (c_{rs})), которые обеспечивают выполнение неравенств:

а) $f>0$, б) $F>0$,

причем в обоих случаях должен существовать конечный интервал изменения $\widetilde{m}<0$, включающий $\widetilde{m}=0$.

а) Неравенство $f>0$ будет выполнено, если, во-первых, $\widetilde{m}<0$, и, во-вторых,

$$\widetilde{f} \equiv (c_{12}+c_{66})c_{33} - (c_{13}+c_{44})^2 > 0. \qquad (3.13)$$

Так как $c_{44} > 0$ (см. (2.2)), то должно выполняться неравенство

$$\left[(c_{12}+c_{66})c_{33}\right]^{1/2} > c_{13} \quad \text{или} \quad (c_{12}+c_{66})c_{33} > c_{13}^2, \tag{3.14}$$

если $c_{13} > 0$. Но именно это неравенство присутствует в (2.2) и возникает при исходной постановке задачи.

Используя $c_{44} = c_{66} - \widetilde{m}$, легко видеть, что неравенство (3.13) выполнено, если

$$\widehat{f} \equiv (c_{12}+c_{66})c_{33} - (c_{13}+c_{66})^2 > 0, \tag{3.15}$$

$$\widetilde{m} \in (-|\widetilde{m}_1|, 0], \quad |\widetilde{m}_1| = \frac{\widehat{f}}{\left[(c_{13}+c_{66}) + \sqrt{(c_{12}+c_{66})c_{33}}\right]}. \tag{3.16}$$

б) Пусть $\widetilde{m} < 0$. Тогда неравенство $F > 0$, как легко видеть, будет тем более выполнено при $\widetilde{m} < 0$, если

$$F > -4\widetilde{m}^{\,2}\tilde{\tilde{f}} + 4\widetilde{m}g + \widehat{f}^{\,2} > 0, \tag{3.17}$$

где

$$\tilde{\tilde{f}} \equiv (c_{12}+c_{66})c_{33} - (c_{13}+c_{66})c_{13}, \quad g \equiv (c_{13}+c_{66})\tilde{\tilde{f}} + c_{66}\widehat{f}.$$

Если $c_{13} > 0$ и выполнено (3.15), то $\tilde{\tilde{f}} > \widehat{f} > 0$, и (3.17) справедливо, если

$$\widetilde{m} \in (-\mid \widetilde{m}_2 \mid, 0], \quad \mid \widetilde{m}_2 \mid = \frac{\sqrt{g^2 + \widehat{f}^{\,2}\tilde{\tilde{f}}} - g}{2\tilde{\tilde{f}}}, \tag{3.18}$$

причем,

$$\mid \widetilde{m}_2 \mid > \frac{\widehat{f}}{2\tilde{\tilde{f}}}\;\frac{\widehat{f}}{(c_{13}+2c_{66}) + [2(c_{13}+2c_{66})c_{66} + (c_{12}+c_{66})c_{33}]^{1/2}}.$$

Итак, можем сформулировать

Утверждение. *Пусть выполнены неравенства*

$$(c_{12}+c_{66})c_{33} - (c_{13}+c_{66})^2 > 0, \quad c_{13} > 0, \tag{3.19}$$

(*при этом будут справедливы* (3.14)). *Тогда существует такой интервал* $(-\mid \widetilde{m}_0 \mid, 0]$ *изменения* $\widetilde{m} = c_{66} - c_{44} \leqslant 0$, $\mid \widetilde{m}_0 \mid = \min\{\mid \widetilde{m}_1 \mid, \mid \widetilde{m}_2 \mid\}$, *где* $\mid \widetilde{m}_1 \mid, \mid \widetilde{m}_2 \mid$ *имеют соответственно вид* (3.16) (3.18), *что корни биквадратного уравнения* (3.11), *определяемые* (3.12), *различны и* $(\theta_n)^2_{1,2} < 0$.

Итак, если элементы матрицы (c_{rs}) удовлетворяют условиям (3.19) (а следовательно, и (3.14)), то

$$\theta_{1,2} = l_{00} + i \mid (\theta_n)^2_{1,2} \mid^{1/2} n + O(n^2) + O(\gamma)$$

(где $(\theta_n)^2_{1,2}$ имеют вид (3.12)) суть комплексные эйконалы затухающих с глубиной волн $\vec{u}_{1,2}$ вида (3.1). Уравнения системы (3.9), (3.10) сводятся к одному уравнению и в силу нормировки $\rho \mid \vec{\varkappa}_{1,2} \mid^2 = 1$ определяют компоненты $\vec{\varkappa}_s$ и $\varkappa_n$ векторов $\vec{\varkappa}_{1,2}$ (при $n = 0$, $\gamma = 0$).

Замечание. Если выполнено (3.13) и $c_{13} > 0$, то при условии $c_{11} > c_{33}$ (или, в обозначениях (2.2a), $0 < \widetilde{p} < c_{11}$, $\widetilde{p} = c_{11} - c_{33}$) легко видеть, что $c_{11} > c_{44}$. Но тогда в силу доказанного выше утверждения имеем

$$c_{11} > c_{44} > c_{66}, \tag{3.20}$$

и именно эти неравенства показывают, что скорость волн Лява, при $n = 0$, $\gamma = 0$ равная $(c_{66}/\rho)^{1/2}$, является наименьшей из скоростей v_r, $r = 1, 2, 3$, распространяющихся по поверхности Σ волн, см. также Приложение.

Процесс построения высших приближений по γ (при $n = 0$) для коэффициентов $\vec{A}^{\,0}$, $\vec{B}^{\,0}$ теперь связан с разложениями по γ как векторов $\vec{\varkappa}_{1,2}$, так и эйконалов $\theta_{1,2}$. Процедура определения коэффициентов при γ^1 в этих разложениях описана в Приложении. Коэффициенты же разложений $\Phi^0_{1,2}\big|_{n=0}$ по целым степеням γ^s, $s > 1$, находятся из краевых условий, см. пункт 2. Что же касается приближений по n для $\vec{\varkappa}_r$, θ_r, Φ^0_r, $r = 1, 2$, то они определяются, с одной стороны, из уравнений (3.5), а с другой – из условий разрешимости уравнений (3.3) при $k = 1$. В результате функции $\vec{\varkappa}_r$, θ_r, Φ^0_r представляем в виде

$$\theta_r = \sum_{i,j=0}^{\infty} (\theta_r)_{ij} n^i \gamma^j\,, \quad \vec{\varkappa}_r = \sum_{i,j=0}^{\infty} (\,\vec{\varkappa}_r)_{ij} n^i \gamma^j\,, \quad \Phi^0_r = \sum_{i,j=0}^{\infty} (\Phi^0_r)_{ij} n^i \gamma^j\,.$$

3. Остановимся на вычислении следующих приближений по k асимптотических рядов (1.3), (3.1), а именно, на определении

$\vec{A}^{\,k}$, $\vec{B}^{\,k}$, $\vec{C_r}^{\,k}$, $k \geqslant 1$. Вследствие (1.5), так же как и в [2], введем функции

$$\vec{\mathcal{A}}^{\,k} \equiv \gamma^k \vec{A}^{\,k}, \quad \vec{\mathcal{B}}^{\,k} \equiv \gamma^k \vec{B}^{\,k}, \quad \vec{\mathcal{C}_r}^{\,k} \equiv \gamma^k \vec{C_r}^{\,k}. \tag{3.21}$$

При этом левые части уравнений системы (1.8) для коэффициентов (3.21) будут иметь прежний вид, а правые части приобретут множитель γ. То же будет иметь место и в краевых условиях, так что в правых частях (1.7) множитель γ появится у слагаемого $\sigma_{3j}(\vec{\mathcal{A}}^{\,k-1})$, а в правых частях (3.6) – у слагаемого $\sigma_{3j}(\vec{\mathcal{C}_r}^{\,k-1})$.

Если $\gamma = 0$, то $\vec{\mathcal{A}}^{\,k}$ и $\vec{\mathcal{B}}^{\,k}$ удовлетворяют на Σ однородной системе, следующей из (2.13) при $\gamma = 0$. Коэффициенты $\vec{\mathcal{A}}^{\,k}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ будут иметь ту же поляризацию, что и $\vec{A}^{\,0}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$. Вычисление коэффициентов разложений $\vec{\mathcal{A}}^{\,k}$, $\vec{\mathcal{B}}^{\,k}$, $\vec{\mathcal{C}_r}^{\,k}$ по степеням $n^i\gamma^j$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$, будет проходить по аналогии с описанной выше схемой определения этих коэффициентов при $k = 0$.

Приложение

1. Дадим математическую интерпретацию неравенствам (3.20), которые означают, что волны Лява, как и в изотропной среде, являются результатом наложения медленных волн с фазовыми скоростями $(c_{66}/\rho)^{1/2}$.

Рассмотрим задачу (1.11), где $\vec{A}^{\,0}$ – собственный вектор симметричной матрицы $A = (a_{ij\alpha\beta} l^i l^\alpha)$. Собственные значения этой матрицы – корни характеристического уравнения, которое при $n = 0$, $\gamma = 0$ можно представить в виде

$$\det(A - \lambda I) = -\big\{(\lambda - \widehat{a}_{i3\alpha3})\big[(\lambda - \widehat{a}_{i1\alpha1})(\lambda - \widehat{a}_{i2\alpha2}) - (\widehat{a}_{i1\alpha2})^2\big]\big\} + \\ + l_3^2 b(q^1, q^2, l^j) = 0, \tag{1}$$

где $\widehat{a}_{ij\alpha\beta} \equiv a_{ij\alpha\beta} l^i l^\alpha$, b – однородная функция (степени 4) по переменным $l_i = \frac{\partial l}{\partial q^i}$, $i = 1, 2, 3$ $(q^3 = n)$, I – единичная матрица.

Учтем (2.5), т.е. равенство $l_3\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0$ (одно из необходимых условий существования волн Лява). Нетрудно убедиться, см. также [4], что корни выражения в квадратных скобках в (1) в этом случае имеют вид

$$\lambda_1 = (\rho l_t^2)_1 = c_{66}(\nabla_s l)^2, \quad \lambda_2 = (\rho l_t^2)_2 = c_{11}(\nabla_s l)^2, \quad c_{66} < c_{11}. \tag{2}$$

Для третьего же корня уравнения (1) получим $\lambda_3 = c_{44}(\nabla_s l)^2$.

Матрица A, у которой все собственные значения различны, будучи приведена к диагональной форме, согласно [7] может рассматриваться как двуосный тензор – инвариантное представление трехмерного вещественного симметричного тензора (матрицы). Специфический вид выражения в фигурных скобках (1), см. [7], означает, что $\lambda_1 < \lambda_2$ (это согласуется с (2)) и что λ_3 лежит в промежутке между λ_1, λ_2. Собственные векторы, соответствующие λ_1 и λ_2, лежат в плоскости осей тензора, а третий – перпендикулярен этой плоскости. Итак, приходим к неравенствам

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_2 \quad \text{или} \quad c_{66} < c_{44} < c_{11}.$$

Если выполнено неравенство $\lambda_3 < \lambda_1$, т.е. $c_{44} < c_{66}$ ($\widetilde{m} > 0$), то задача построения асимптотики волн Лява типа SH неразрешима, и данное неравенство обеспечивает существование (в рассматриваемом случае анизотропии) поверхностных волн типа SV, см. [5]. Тензор A при этом по-прежнему является двуосным, но с иной ориентацией плоскости его осей.

2. Приведем, в силу их значимости, результаты вычислений коэффициентов в разложениях по γ (при $n = 0$) комплексных эйконалов $\theta_{1,2}$ и векторов поляризации $\vec{\varkappa}_{1,2}$ из (3.4). Располагая значениями $(\theta_r)_n\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $\vec{\varkappa}_r\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, см. §3, найдем $\frac{\partial(\theta_r)_n}{\partial\gamma}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $\frac{\partial\vec{\varkappa}_r}{\partial\gamma}\big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $r = 1, 2$.

Дифференцируя по γ уравнения (3.5), проецируя их соответственно на $\vec{n}$ и $\nabla_s l$ и учитывая (3.9), (3.10), получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\vec{N}_\theta\vec{\varkappa}, \vec{n}\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \left\{\frac{1}{\varkappa_n}\widetilde{\Delta} + c_{33}\varkappa_n\frac{\partial\theta_n^2}{\partial\gamma} + (c_{13}+c_{44})(\vec{\varkappa}\nabla_s l)\frac{\partial\theta_n}{\partial\gamma} + \right.$$

$$\left. +(c_{13}+c_{44})\theta_n(\vec{\varkappa}\nabla_s l_{01}) + \left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\big(c_{44}(\nabla_s l)^2 - \rho l_t^2\big)\right]\varkappa_n\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\gamma}\vec{N}_\theta\vec{\varkappa}, \nabla_s l\right)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} =$$

$$= \left\{ -\frac{(\nabla_s l)^2}{(\vec{\varkappa}\nabla_s l)}\widetilde{\Delta} + c_{44}(\vec{\varkappa}\nabla_s l)\frac{\partial\theta_n^2}{\partial\gamma} + (c_{13}+c_{44})(\nabla_s l)^2\varkappa_n\frac{\partial\theta_n}{\partial\gamma} + \right.$$

$$+(c_{12}+c_{66})(\nabla_s l)^2(\vec{\varkappa}\nabla_s l_{01}) + (\nabla_s l_{01}, \nabla_s l)\big[(c_{12}+c_{66})(\vec{\varkappa}\nabla_s l) +$$

$$+(c_{13}+c_{44})\theta_n\varkappa_n\Big] + \left[\frac{\partial}{\partial\gamma}(c_{66}(\nabla_s l)^2-\rho l_t^2)\right](\vec{\varkappa}\nabla_s l)\Big\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = 0, \quad (4)$$

где обозначено

$$\widetilde{\Delta} \equiv (c_{13}+c_{44})\theta_n\left[\varkappa_n\left(\frac{\partial\vec{\varkappa}}{\partial\gamma},\nabla_s l\right) - (\vec{\varkappa}\nabla_s l)\frac{\partial\varkappa_n}{\partial\gamma}\right]$$

и под θ, $\vec{\varkappa}$ подразумеваем $\theta_{1,2}$, $\vec{\varkappa}_{1,2}$.

Исключая из (3) с помощью (4) (или наоборот) слагаемое, содержащее $\widetilde{\Delta}$, используя при этом уравнение (2.8) и равенства (3.10), (3.11a), для $(\frac{\partial\theta_n}{\partial\gamma})|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ получим

$$\frac{\partial\theta_n}{\partial\gamma}\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \big\{\big[c_{33}\varkappa_n^2+c_{44}\vec{\varkappa}_s^2\big]\theta_n + (c_{13}+c_{44})\varkappa_n(\vec{\varkappa}\nabla_s l)\big\}^{-1}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}\times$$
$$\times(-1)\left\{\rho(-l_{00})_t\left(\frac{d}{dt}l_{01}\right)\big[\varkappa_n^2+\vec{\varkappa}_s^2\big] - \widetilde{m}(\nabla_s l_{01},\nabla_s l)\varkappa_n^2 - \right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}c_{44}\frac{\theta_n^2}{(\nabla_s l)^2}(\vec{\varkappa}\nabla_s l)\big[(\nabla_s l_{01},\vec{s}_0)(\vec{\varkappa}_s,\vec{s}_0)+(\vec{\varkappa}\nabla_s l_{01})\big]\right\}_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \qquad (5)$$

где $\vec{s}_0 \equiv \nabla_s l/|\nabla_s l|$, $\frac{d}{dt}l_{01}$ – производная вдоль ПВ-луча,

$$\vec{\varkappa} = \vec{\varkappa}_s + \varkappa_n\vec{n}, \quad (\vec{\varkappa}_s,\vec{n}) = 0.$$

Располагая (5), из (3) (или (4)) и условий нормировки $|\vec{\varkappa}_r|^2\rho=1$ определяем $(\frac{\partial\vec{\varkappa}_r}{\partial\gamma},\nabla_s l)_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$ и $(\frac{\partial\vec{\varkappa}_r}{\partial\gamma},\vec{n})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, $r=1,2$. Далее, из равенства $(\frac{\partial\vec{N}_{\theta_r}\vec{\varkappa}_r}{\partial\gamma},\vec{\zeta})=0$ найдем $(\frac{\partial\vec{\varkappa}_r}{\partial\gamma},\vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}$, а именно,

$$(\frac{\partial\vec{\varkappa}_r}{\partial\gamma},\vec{\zeta})_{\substack{n=0\\ \gamma=0}} = \frac{(\nabla_s l_{01},\vec{\zeta})}{(\nabla_s l)^2}(\vec{\varkappa}_r,\nabla_s l)\Big|_{\substack{n=0\\ \gamma=0}}, \quad r=1,2.$$

Очевидно, что процесс построения разложений $\theta_{1,2}$ и $\vec{\varkappa}_{1,2}$ по степеням γ при $n=0$ является рекуррентным, и следующие приближения по γ, т.е. соответствующие коэффициенты этих разложений, находятся последовательным дифференцированием по γ уравнений (3.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 96-01-00666.

Литература

1. В. Д. Ажоткин, В. М. Бабич, *О распространении волн Лява вдоль поверхности анизотропного тела произвольной формы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 9–14.
2. В. М. Бабич, З. А. Янсон, *О распространении волн Лява вдоль поверхности упругого тела произвольной формы.* — Изв. АН СССР, Физика Земли **No. 5** (1985), 17–27.
3. З. А. Янсон, *Нестационарные волны Лява вблизи поверхности трансверсально-изотропного упругого неоднородного тела.* — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, т. 30, Л., (1990) с. 113–125.
4. З. А. Янсон, *Волны Лява типа SH в анизотропной упругой среде. Кинематический подход* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 206–218.
5. З. А. Янсон, *О распространении волн Рэлея типа SV в трансверсально-изотропных упругих средах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 278–292.
6. Г. И. Петрашень, *Распространение волн в анизотропных упругих средах.* Л., 1980.
7. Ф. И. Федоров, *Оптика анизотропных сред.* Минск, 1958.

Yanson Z. A. Love waves of SH type in an inhomogeneous transversely-isotropic elastic medium.

The asymptotics of high-frequency Love waves, which are counterparts of transverse surface waves of SH type in isotropic media, is studied for a special type of anisotropy of elastic media. The wave field is represented as the sum of a space-time (ST) caustic expansion and two ST ray series for two faster waves attenuating exponentially with depth. The complex eikonals of these waves and the coefficients of caustic ST and ray series are found by recursion in the form of two-variable expansions: one in the distance from the surface and the other in a small parameter, which characterizes the proximity of the caustic of the ray field to the surface of the elastic body. The specific structure of the elasticity tensor for a transversely-isotropic medium suggests the use of a rectangular coordinate system, hence the surface is to be regarded as a plane. For the elements of the elasticity tensor we obtained relations which accord with the initial formulation of the problem and ensure the initiation of the waves under study. In the formulas deduced, one can easily see the transition from an anisotropic medium to an isotropic one.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 15 ноября 1996 г.