Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

Ю.Базлов

ГОМОЛОГИИ ГРАДУИРОВАННЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ В СВЯЗИ С ТОЖДЕСТВАМИ МАКДОНАЛЬДА

В настоящей работе предлагается исправленный вариант имеющегося в [4] доказательства тождества Макдональда в следующей форме:

$$\prod_{r=1}^{\infty}\Bigg[(1-t_1^rt_2^r\dots t_n^r)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(1-t_1^{r-1}\dots t_{i-1}^{r-1}t_i^r\dots t_{j-1}^rt_j^{r-1}\dots t_n^{r-1})$$
$$\times\prod_{1\leqslant j<j\leqslant n}(1-t_1^r\dots t_{j-1}^rt_j^{r-1}\dots t_{i-1}^{r-1}t_i^r\dots t_n^r)\Bigg]=\sum\pm t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n} \tag{1}$$

где $n\geqslant 2$; суммирование в правой части происходит по всем мультииндексам $(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, являющимся нулями квадратичного полинома

$$Q(k_1,\dots,k_n)=\sum_{i=1}^{n}k_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(k_i-k_{i-1})^2$$

(здесь и всюду далее полагаем $k_0=k_n$) и удовлетворяющим условию:

$$\text{числа } k_i-k_{i-1}+i-1 (i=1,2,\dots,n)$$
$$\text{попарно несравнимы по } \bmod n. \tag{$*$}$$

Знак перед мономом $t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}$ в правой части есть четность перестановки

$$((k_1-k_n)\bmod n,(k_2-k_1+1)\bmod n,\dots,(k_n-k_{n-1}+n-1)\bmod n)$$

чисел $(0,1,2,\dots,n-1)$. Исходный вариант доказательства [4], использующего гомологии градуированных алгебр Ли, содержит ошибку в вычислении гомологий алгебры $T^+(n)$ и вследствие этого ошибку в формулировке тождества: отсутствует условие $(*)$, накладываемое на мультииндексы в правой части; без этого условия соотношение (1) (п.3.2.3 [4]) становится неверным при $n \geqslant 5$ (см. комментарий в Примечании). Подчеркнем однако, что целью данной заметки не является какой-либо пересмотр схемы доказательства из [4] или аппарата теории гомологий, на который оно опирается; эта цель состоит лишь в том, чтобы необходимым образом дополнить вычисление гомологий упомянутых алгебр, тем самым откорректировав его и доказав тождество (1) в соответствующей действительности формулировке.

Первоначально тождества Макдональда были получены Макдональдом [3] в результате попытки обобщения тождества Вейля [Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, гл.4, 5 и 6, М., Мир, 1972, с.230] на случай аффинных систем корней. Кац в [1] указал на эти тождества как на результат приложения теории представлений алгебр Каца-Муди; доказательство тождеств Макдональда путем вычисления характера тривиального представления аффинной алгебры Каца-Муди см. в [2, §12.1]. Гомологическое доказательство, о котором речь идет в [4] и в настоящей работе, являет собой иной подход к тождествам Макдональда. Следует отметить, что (1) есть частный случай тождеств Макдональда, отвечающий, если воспользоваться терминологией [2], алгебрам Каца-Муди типа $A_{n-1}^{(1)}$. Суммирование в (1) ведется непосредственно по узлам целочисленной решетки, тогда как переход к целочисленным мультииндексам в общем случае [2] требует дополнительного вычисления суммы по элементам группы Вейля. При $n = 2$ равенство (1) дает тождество Гаусса-Якоби для тройного произведения.

О других вариантах доказательств тождеств Макдональда см. в источниках из списка литературы [2].

Доказательство (1) основывается на стандартной схеме получения комбинаторных тождеств при помощи гомологий градуированных алгебр Ли (см. [4, п.3.2.2]). Именно, пусть в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ задана градуировка: $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in A} \mathfrak{g}_{(\alpha)}$, A — некоторая аддитивно записанная (коммутативная) полугруппа, и при этом $[\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha+\beta)}$. Предположим, что $d_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{(\alpha)} < \infty$. Пусть $C_q^{(\alpha)} = \left\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_q \;\middle|\; x_i \in \mathfrak{g}_{(\alpha_i)}, \sum_{i=1}^q \alpha_i = \alpha \right\rangle$ — однородные компоненты пространств цепей, образующие вместе со (стандартным) дифференциалом ∂ градуированный цепной комплекс; через $h_q^{(\alpha)}$ обозначим размерности гомологий $H_q^{(\alpha)}$ этого комплекса. Тогда имеет место тождество

$$\prod_{\alpha}(1-e^{\alpha})^{d_{\alpha}} = \sum_{q\geqslant 0,\alpha}(-1)^q h_q^{(\alpha)}e^{\alpha}, \tag{2}$$

в котором символы e^{α} суть формальные экспоненциалы элементов A. Для фиксированной градуированной алгебры $\mathfrak{g}$ параметры d_{α} и $h_q^{(\alpha)}$ становятся числами и (2) превращается в некоторое тождество, позволяющее разложить в ряд бесконечное произведение.

Тождество Макдональда (1) получается из (2), если в качестве A взять $\mathbb{Z}_+^n = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)|\alpha_i\in\mathbb{Z},\alpha_i\geqslant 0\}$, произвести спецификацию $e^{\alpha}=t_1^{\alpha_1}\ldots t_n^{\alpha_n}$ для $\alpha\in A$ и рассмотреть в качестве $\mathfrak{g}$ определяемую ниже градуированную алгебру $T^+(n)$.

Пусть $\widetilde{T}(n) = (\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})^{S^1})^{pol} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}] = \bigoplus\limits_{r\in\mathbb{Z}}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})t^r)$ — алгебра отображений из S^1 в $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, задаваемых тригонометрическими полиномами, с поточечным коммутатором, или, что то же самое, алгебра полиномов Лорана с коэффициентами из $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$. Введем градуировку на $\widetilde{T}(n)$. Обозначим через e_j^i матрицу, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца — единица, остальные элементы — нули; припишем $e_j^i t^r$ $(r\in\mathbb{Z})$ — базисному элементу $\widetilde{T}(n)$ — вес

$$(r,\ldots\ldots\ldots,r),\quad \text{если } i=j;$$

$$(r,\ldots,r,\underset{(i)}{r+1},\ldots,\underset{(j)}{r+1},r,\ldots,r),\quad \text{если } 1\leqslant i<j\leqslant n;$$

$$(r,\ldots,r,\underset{(j)}{r-1},\ldots,\underset{(i)}{r-1},r,\ldots,r),\quad \text{если } 1\leqslant j<i\leqslant n.$$

Однородной компонентой $\widetilde{T}(n)_{(\beta)}$ алгебры $\widetilde{T}(n)$, отвечающей весу $\beta\in\mathbb{Z}^n$, будет линейная оболочка тех базисных элементов, которым приписан вес β. Условие $[\widetilde{T}(n)_{(\alpha)},\widetilde{T}(n)_{(\beta)}]\subseteq\widetilde{T}(n)_{(\alpha+\beta)}$ проверяется непосредственно.

$T^+(n)$ — подалгебра $\widetilde{T}(n)$,

$$T^+(n) = N^+(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}))\oplus\left[\bigoplus_{r\in\mathbb{Z},r\geqslant 1}\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})t^r\right]$$

(здесь $N^+(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}))$ — подалгебра $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, составленная из верхних треугольных матриц с нулевой диагональю). Градуировка на $T^+(n)$ индуцируется из $\widetilde{T}(n)$:

$$T^+(n)_{(\alpha)} = T^+(n) \cap \widetilde{T}(n)_{(\alpha)}$$

Заметим, что хотя веса однородных компонент $\widetilde{T}(n)$ принадлежат $\mathbb{Z}^n$ и, вообще говоря, не лежат в $\mathbb{Z}^n_+$, тем не менее на $T^+(n)$ возникает именно $\mathbb{Z}^n_+$-градуировка.

Градуировка на $\mathfrak{g} = T^+(n)$ такова, что левая часть (2) становится левой частью (1). Убедиться в этом позволяет вычисление размерностей однородных компонент $\mathfrak{g}$: очевидно, если мультииндекс $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ не равен $(r,\ldots,r)$, $(r-1,\ldots,r-1,r,\ldots,r,r-1,\ldots,r-1)$ или $(r,\ldots,r,r-1,\ldots,r-1,r,\ldots,r)$, где $r \geqslant 1$, то $\mathfrak{g}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} = 0$; размерности же нетривиальных компонент — следующие: при $r \geqslant 1$

$$d_{(r,\ldots,r)} = \dim\ \mathfrak{g}_{(r,\ldots,r)} = n-1;$$

$$d_{(r-1,\ldots,r-1,r,\ldots,r,r-1,\ldots,r-1)} = 1;$$

$$d_{(r,\ldots,r,r-1,\ldots,r-1,r,\ldots,r)} = 1.$$

Для того, чтобы вычислить коэффициенты в правой части (2), необходимо найти размерности $h_q^{(k_1,\ldots,k_n)}$ градуированных гомологий алгебры $T^+(n)$. Для отыскания их используется оператор Лапласа

$$\Delta_q^{(k_1,\ldots,k_n)} = d\circ\partial + \partial\circ d : C_q^{(k_1,\ldots,k_n)} \to C_q^{(k_1,\ldots,k_n)}.$$

Чтобы определить оператор Лапласа, нужно прежде при помощи метрической, т.е. унитарной, структуры отождествить пространство цепей C_* с сопряженным к нему пространством коцепей C^*, что предоставляет возможность считать дифференциал d коцепного комплекса действующим на пространстве цепей:

$$d_q^{(k_1,\ldots,k_n)} : C_q^{(k_1,\ldots,k_n)} \to C_{q+1}^{(k_1,\ldots,k_n)}$$

На $T^+(n)$ унитарная структура индуцируется из $\widetilde{T}(n)$, где $\{e^i_j t^r : 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ r \in \mathbb{Z}\}$ выбирается в качестве ортонормированного базиса; возникающее скалярное произведение на $T^+(n)$, скажем, $\langle\ ,\ \rangle_1$, определяет скалярное произведение $\langle\ ,\ \rangle_q$ на C_q:

$$\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_q, y_1\wedge\cdots\wedge y_q\rangle_q = \det(\langle x_i, y_j\rangle_1).$$

Воспользуемся следующими фактами, касающимися оператора Δ на $C_*(T^+(n))$:

Теорема 1. (вытекает, например, из [4, т.1.5.3])

$$h_q^{(k_1,\ldots,k_n)} = \dim\ker\Delta_q^{(k_1,\ldots,k_n)}$$

Теорема 2. (доказана в [4, п.2.5.1]) *Введенная метрическая структура на пространстве цепей такова, что на $C_q^{(k_1,\ldots,k_n)}$ оператор Лапласа Δ представляет собой умножение на $Q(k_1,\ldots,k_n)$.*

Эти две теоремы объясняют, почему условие $Q(k_1,\ldots,k_n)=0$ необходимо для того, чтобы коэффициент при $t_1^{k_1}\ldots t_n^{k_n}$ в правой части (1) был отличен от нуля. В самом деле, если $Q(k_1,\ldots,k_n)\neq 0$, то по теореме 2 ядро $\Delta^{(k_1,\ldots,k_n)}$ тривиально, следовательно (по теореме 1), $h_q^{(k_1,\ldots,k_n)}=0$ для всех q.

Таким образом, найдены коэффициенты при тех мономах $t_1^{k_1}\ldots t_n^{k_n}$ в правой части, для которых $Q(k_1,\ldots,k_n)\neq 0$; все эти коэффициенты — нули.

Из теорем 1 и 2 также следует, что при $Q(k_1,\ldots,k_n) = 0$ имеет место равенство $h_q^{(k_1,\ldots,k_n)} = \dim C_q^{(k_1,\ldots,k_n)}$. Значит, для нахождения оставшихся коэффициентов в правой части достаточно вычислить размерность пространств цепей $C_q^{(k_1,\ldots,k_n)}$ при $Q(k_1,\ldots,k_n)=0$. Согласно лемме 2 т.2.5.2 [4], в случае $Q(k_1,\ldots,k_n)=0$ пространство $C_*^{(k_1,\ldots,k_n)}$ порождается произведениями цепей

$$c_{ij}(m) = e_j^i t^\varepsilon \wedge e_j^i t^{\varepsilon+1} \wedge \cdots \wedge e_j^i t^{\varepsilon+m-1} \ (i\neq j)$$

где $\varepsilon=0$, если $i<j$, и $\varepsilon=1$, если $i>j$.

Следовательно, размерность $C_*^{(k_1,\ldots,k_n)}$ равна количеству наборов неотрицательных целых чисел $\{m_{ij}|1\leqslant i,j\leqslant n,\ i\neq j\}$, являющихся решениями уравнения

$$(k_1,\ldots,k_n) = \sum_{i\neq j} w_{ij}(m_{ij}), \tag{3}$$

относительно m_{ij}, где $w_{ij}(m_{ij})$ — вес цепи $c_{ij}(m_{ij})$.

Он равен, как нетрудно видеть,

$$\left(\sum_{i\neq j}\binom{m_{ij}}{2},\dots,\sum_{i\neq j}\binom{m_{ij}}{2}\right)+\left\{\begin{array}{ll}(0,\dots,0,\ \underset{(i)}{1},\dots,1,\ \underset{(j)}{0},\dots,0), & i<j,\\ (1,\dots,1,\ \underset{(j)}{0},\dots,\ 0,\underset{(i)}{1},\dots,1), & i>j.\end{array}\right. \tag{4}$$

Если такое решение ровно одно, то существует одна (с точностью до скалярного множителя) цепь с весом $(k_1,\dots,k_n)$, и, следовательно,

$$h_q^{(k_1,\dots,k_n)}=\dim C_q^{(k_1,\dots,k_n)}=\begin{cases}1, & \text{если } q=q(k_1,\dots,k_n),\\ 0, & \text{если } q\neq q(k_1,\dots,k_n),\end{cases}$$

где

$$q(k_1,\dots,k_n)=\sum_{i\neq j}m_{ij}$$

— длина этой единственной цепи; коэффициент при $t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}$ в случае единственности решения отличен от нуля и равен $(-1)^{q(k_1,\dots,k_n)}$. В [4] ошибочно утверждается, что при $Q(k_1,\dots,k_n) = 0$ решение (3) существует и единственно (это означало бы, что в случае $Q(k_1,\dots,k_n)=0$ коэффициент при $t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}$ в правой части всегда отличен от 0). На самом деле при условии $Q(k_1,\dots,k_n)=0$ верны три нижеследующих утверждения:

а) *если решение* (3) *существует, то оно единственно;*

б) *решение* (3) *существует, если и только если для* $(k_1,\dots,k_n)$ *выполнено условие* (*);

в) *если выполнено* (*) *и* $\{m_{ij}\}$ *— решение* (3), *то четность числа* $q(k_1,\dots,k_n)=\sum_{i\neq j}m_{ij}$ *совпадает с четностью перестановки*

$$((k_1-k_n)\bmod n,(k_2-k_1+1)\bmod n,\dots,(k_n-k_{n-1}+n-1)\bmod n).$$

Из утверждений а), б) и в) вытекает, что значения коэффициентов в правой части (2) в точности таковы, что правая часть (2) обращается в правую часть (1). Таким образом, доказательство тождества (1) свелось к проверке справедливости трех утверждений о решении в неотрицательных целых числах уравнения (3). Далее мы установим их справедливость.

а) Начнем с единственности решения.

Доказательство единственности решения (3), то есть утверждения а), содержится в [4]; для полноты изложения мы приведем его здесь, заимствовав из [4], добавив лишь некоторые комментарии.

Пусть $\{m_{ij}\}$ — решение (3). Введем обозначения:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & i<j<k \text{ или } j<k<i \text{ или } k<i<j; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$A_{ij} = \{k : \varepsilon_{ikj} = 1\}, \ B_{ij} = \{i\} \cup A_{ij}, \ a_{ij} = \sharp A_{ij}$$

Заметим, что

$$a_{ij} = \begin{cases} j-i-1+n, & \text{если } j<i, \\ j-i-1, & \text{если } j>i. \end{cases} \tag{5}$$

Складывая выражения (4) для всех $i \neq j$, получаем, что

$$\sum_{i\neq j} w_{ij}(m_{ij}) = \left(\sum_{i\neq j}\binom{m_{ij}}{2} + \sum_{1\in B_{ij}} m_{ij}, \ldots, \sum_{i\neq j}\binom{m_{ij}}{2} + \sum_{n\in B_{ij}} m_{ij}\right).$$

Разность между i-й и $(i-1)$-й компонентами этого вектора равна $\sum_{s\neq i} m_{is} - \sum_{t\neq i} m_{ti}$. Значит,

$$k_i - k_{i-1} = \sum_{s\neq i} m_{is} - \sum_{t\neq i} m_{ti},$$

и, следовательно,

$$0 = Q\left(\sum_{i\neq j} w_{ij}(m_{ij})\right) = n\sum_{i\neq j}\binom{m_{ij}}{2} + \sum_{i\neq j} a_{ij}m_{ij} - \sum_{i\neq j} m_{ij}^2$$
$$+ \sum_{i\neq s, i\neq t} m_{is}m_{ti} = \sum_{j\in A_{ik}} [(m_{ij}+m_{jk}+m_{ki}-m_{ik}-m_{kj}-m_{ji})^2$$
$$-(m_{ij}+m_{jk}+m_{ki}-m_{ik}-m_{kj}-m_{ji})] + 2n\sum_{i\neq j} m_{ij}m_{ji}.$$

Отсюда

$$\text{при } \varepsilon_{ijk}=1 \qquad m_{ij}+m_{jk}+m_{ki}-m_{ik}-m_{kj}-m_{ji} = 0 \text{ или } 1$$
$$\text{и } m_{ij}=0 \text{ или } m_{ji}=0 \text{ при любых } i\neq j. \tag{6}$$

Зададим на множестве индексов $\{1,2,\ldots,n\}$ бинарное отношение $\preccurlyeq$:

$$i \preccurlyeq j, \text{ если } i = j \text{ или } m_{ij} > 0.$$

$\preccurlyeq$ есть частичный порядок:

1) (рефлексивность) $i \preccurlyeq i$ по определению $\preccurlyeq$;

2) (антисимметричность) случай $i \preccurlyeq j, j \preccurlyeq i, i \neq j$ исключен, т.к. в силу (6) невозможно $m_{ij} > 0$ и $m_{ji} > 0$;

3) (транзитивность) пусть $i \preccurlyeq j$ и $j \preccurlyeq k$. Покажем, что $i \preccurlyeq k$. Это тривиально, если $i = j$ или $j = k$; иначе $m_{ij} > 0, m_{jk} > 0 \Rightarrow m_{ji} = m_{kj} = 0$. Считаем, что $\varepsilon_{ijk} = 1$ (в случае $\varepsilon_{ijk} = 0$ нужно воспользоваться тем, что $\varepsilon_{ikj} = 1$). Тогда из (6) $(m_{ij} - m_{ji}) + (m_{jk} - m_{kj}) + (m_{ki} - m_{ik}) = 0$, откуда $m_{ik} = m_{ij} + m_{jk} + m_{ki} > 0 \Rightarrow i \preccurlyeq k$.

Будучи частичным порядком, $\preccurlyeq$ вкладывается в некоторый линейный порядок, который реализуется перестановкой $\sigma \in S_n$. Условия (6) записываются в виде

$$\begin{aligned} &m_{ij} = 0, \text{ если } \sigma(i) > \sigma(j); \\ &m_{ik} = m_{ij} + m_{jk} - \varepsilon_{ijk} + (0 \text{ или } 1) = m_{ij} + m_{jk} + \varepsilon_{kij} - (0 \text{ или } 1). \end{aligned} \tag{6'}$$

При $\sigma(i) < \sigma(j)$

$$\begin{aligned} &(k_i - k_{i-1}) - (k_j - k_{j-1}) = \\ &= \Big(\sum_s m_{is} - \sum_t m_{ti}\Big) - \Big(\sum_u m_{ju} - \sum_v m_{vj}\Big) = \\ &= \sum_{\sigma(s)<\sigma(i)<\sigma(j)} (-m_{si} + m_{sj}) + \sum_{\sigma(i)<\sigma(s)<\sigma(j)} (m_{is} + m_{sj}) + \\ &+ \sum_{\sigma(i)<\sigma(j)<\sigma(s)} (m_{is} - m_{js}) + 2m_{ij} = \\ &= nm_{ij} - \sum_{s\neq i,j} \varepsilon_{sij} + \sum_{s \neq i,j} (0 \text{ или } 1) = \\ &= nm_{ij} - a_{ji} + (0, 1, \ldots \text{ или } n-2). \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma(i) > \sigma(j); \\ \left[\frac{(k_i - k_{i-1}) - (k_j - k_{j-1}) + a_{ji}}{n}\right] & \text{при } \sigma(i) < \sigma(j). \end{cases} \tag{8}$$

Значит, если решение $\{m_{ij}\}$ существует, то оно единственно и задается формулой

$$m_{ij} = \max\{0, \left[\tfrac{(k_i - k_{i-1}) - (k_j - k_{j-1}) + a_{ji}}{n}\right]\}. \tag{8'}$$

Единственность решения проверена.

б) В дальнейщем будем использовать обозначения

$$d_i = k_i - k_{i-1}, \qquad \widetilde{d}_i = k_i - k_{i-1} + i - 1, \qquad g_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } i < j \\ 0, & \text{если } i > j \end{cases}.$$

Докажем *необходимость* и *достаточность* условия (*) для существования решения уравнения (3).

1.) *Необходимость.*

Если $\{m_{ij}\}$ — решение (3), то выполняется равенство (7), которое можно, учитывая введенные обозначения и выражение (5) для чисел a_{ij}, записать так:

$$d_i - d_j = nm_{ij} - (i - j - 1 + ng_{ij}) + (0, 1, \ldots \text{ или } n-2),$$

откуда

$$(d_i + i - 1) - (d_j + j - 1) - 1 \not\equiv n - 1 \pmod n,$$

то есть

$$\widetilde{d}_i \not\equiv \widetilde{d}_j \pmod n,$$

что и означает (*).

2.) *Достаточность.*

Покажем, что если (*) выполнено, то формула (8′) дает решение уравнения (3). Перепишем (8′) в виде

$$m_{ij} = \max\{0, \left[\tfrac{\widetilde{d}_i - \widetilde{d}_j - 1}{n}\right] + g_{ji}\}.$$

Отметим, что по аналогии с (8) существует перестановка $\sigma \in S_n$, такая, что

$$m_{ij} = \begin{cases} \left[\frac{\widetilde{d}_i - \widetilde{d}_j - 1}{n}\right] + g_{ji}, & \sigma(i) < \sigma(j); \\ 0, & \sigma(i) > \sigma(j). \end{cases}$$

(Для того, чтобы найти такую — возможно, не единственную — перестановку, рассмотрим снова частичный порядок $\preccurlyeq$:

$$i \preccurlyeq j, \text{ если } i = j \text{ или } \left[\tfrac{\widetilde{d}_i - \widetilde{d}_j - 1}{n}\right] + g_{ji} > 0,$$

и вложим $\preccurlyeq$ в линейный порядок, который и должна реализовать σ. Аксиомы частичного порядка для $\preccurlyeq$ проверяются непосредственно из определения $\preccurlyeq$.)

Нужно проверить, что заданные таким образом числа m_{ij} обращают при подстановке уравнение (3) в верное равенство. Покажем, что у векторов в правой и левой частях (3) совпадают разности между соседними компонентами.

Разность между i-й и $i-1$-й компонентами в левой части составляет $k_i - k_{i-1}$, в правой $\sum_s m_{is} - \sum_t m_{ti}$. Вычислим $\sum_s m_{is} - \sum_t m_{ti}$; для краткости обозначим $\widetilde{d}_i - \widetilde{d}_j - 1$ через D_{ij}.

$$\sum_s m_{is} - \sum_t m_{ti} = \sum_{\sigma(i)<\sigma(s)} \left[\tfrac{D_{is}}{n}\right] + \sum_{\sigma(i)<\sigma(s)} g_{si} - \sum_{\sigma(t)<\sigma(i)} \left[\tfrac{D_{ti}}{n}\right] - \sum_{\sigma(t)<\sigma(i)} g_{it};$$

так как $\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{1}{n}(m - m \mod n)$ и $g_{ij} = 1 - g_{ji}$, то последнее равно

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{\sigma(i)<\sigma(s)} D_{is} - \sum_{\sigma(t)<\sigma(i)} D_{ti} - \sum_{\sigma(i)<\sigma(s)} D_{is} (\mod n) + \right.$$
$$\left. + \sum_{\sigma(t)<\sigma(i)} D_{ti} (\mod n)\right) + \sum_{\sigma(i)<\sigma(s)} g_{si} - \sum_{\sigma(t)<\sigma(i)} (1 - g_{ti}).$$

Подставим в первые два слагаемых выражения для D_{ij}. Воспользуемся тем, что в силу (*)
$D_{ij} \not\equiv -1 (\mod n) \;\Rightarrow\; D_{ji} \mod n = (-2 - D_{ij}) \mod n = (n-2) - D_{ij} \mod n.$
После приведения подобных членов получим

$$\frac{1}{n}\left((n-1)\widetilde{d}_i - \sum_{u\neq i} \widetilde{d}_u - n + 2\sigma(i) - 1 + (n-2)(\sigma(i)-1) - \right.$$
$$\left. - \sum_{v\neq i} D_{iv} \mod n\right) + \sum_{w\neq i} g_{wi} - (\sigma(i)-1),$$

что преобразуем, принимая во внимание соотношения $\sum_j \widetilde{d}_j = \binom{n}{2}$ и $\sum_{w\neq i} g_{wi} = n - i$, а также учитывая, что $\sum_{v\neq i} D_{vi} = \binom{n-1}{2}$ (так как опять же в силу (*) D_{vi} $(v \neq i)$ имеют попарно различные и отличные от $n-1$ остатки по $\mod n$), к виду

$$\frac{1}{n}\left(n\widetilde{d}_i - \binom{n}{2} - n + 2\sigma(i) - 1 - \binom{n-1}{2}\right) + n - i - \sigma(i) + 1 =$$
$$= \widetilde{d}_i - (i-1) = d_i = k_i - k_{i-1},$$

что нам и требовалось.

Разности между соседними компонентами векторов $(k_1,\dots,k_n)$ и $\sum w_{ij}(m_{ij})$ совпадают. При этом $Q(k_1,\dots,k_n) = 0$ и $Q\left(\sum_{i\neq j} w_{ij}(m_{ij})\right) = 0$ (последнее — потому, что для чисел m_{ij} выполняется условие $(6')$). Отсюда следует, что совпадают и сами векторы $(k_1,\dots,k_n)$ и $\sum w_{ij}(m_{ij})$. Достаточность условия (*) для разрешимости уравнения (3) доказана.

Доказанные утверждения а) и б) уже позволяют установить, что в правую часть тождества (1) входят с ненулевыми (равными ±1) коэффициентами такие и только такие мономы $t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}$, что для чисел k_i выполнены условия $Q(k_1,\dots,k_n) = 0$ и (*). Утверждение в), доказательство которого сейчас последует, дает возможность определить знак перед $t_1^{k_1}\dots t_n^{k_n}$: “$+$”, если перестановка $(\widetilde{d}_1 \bmod n,\dots,\widetilde{d}_n \bmod n)$ четная, и “$-$” в противном случае. Напомним, что $\widetilde{d}_i = k_i - k_{i-1} + i - 1$.

в) Требуется выяснить четность числа

$$q(k_1,\dots,k_n) = \sum_{i\neq j} m_{ij} = \sum_{i\neq j} \max\{0, \left[\tfrac{\widetilde{d}_i-\widetilde{d}_j-1}{n}\right] + g_{ij}\}.$$

Рассмотрим функцию

$$L(c_1,\dots,c_n) = \sum_{i\neq j} \max\{0, \left[\tfrac{c_i-c_j-1}{n}\right] + g_{ij}\} \tag{9}$$

от n абстрактных целочисленных переменных $c_1,\dots,c_n$. Функция q выражается через функцию L так:

$$q(k_1,\dots,k_n) = L(\widetilde{d}_1,\dots,\widetilde{d}_n).$$

Введем в рассмотрение следующие преобразования на $\mathbb{Z}^n$:

$$T_i(c_1,\dots,c_i,c_{i+1},\dots,c_n) = (c_1,\dots,c_{i+1},c_i,\dots,c_n);$$
$$S(c_1,c_2,\dots,c_n) = (c_1+n,c_2,\dots,c_n).$$

Проследим, как меняется четность значения функции L, если переменные подвергнуть этим преобразованиям. Считаем, что c_i попарно несравнимы по $\bmod n$; иной случай нам не потребуется.

Если совершить преобразование T_i, то есть поменять местами соседние i-ю и $i+1$-ю переменные, то в правой части (9) изменятся только два слагаемых — с индексами $i, i+$

1 и $i+1, i$. При этом $L(T_i(c_1,\ldots,c_n)) - L(c_1,\ldots,c_n) = B - A$, где $A = \max\{0, \left[\frac{c_i-c_{i+1}-1}{n}\right]+1\} + \max\{0, \left[\frac{c_{i+1}-c_i-1}{n}\right]\}$, $B = \max\{0, \left[\frac{c_{i+1}-c_i-1}{n}\right]+1\}+\max\{0, \left[\frac{c_i-c_{i+1}-1}{n}\right]\}$. Но A и B отличаются на 1: если $c_{i+1}-c_i<0$, то $A=\left[\frac{c_i-c_{i+1}-1}{n}\right]+1$, $B=\left[\frac{c_i-c_{i+1}-1}{n}\right]$, а если $c_{i+1}-c_i>0$ и $c_{i+1}-c_i\neq n$, то $A=\left[\frac{c_{i+1}-c_i-1}{n}\right]$, $B=\left[\frac{c_{i+1}-c_i-1}{n}\right]+1$. Случаи $c_{i+1}-c_i=0$ или n исключаются условием попарной несравнимости c_j. Таким образом, T_i всегда меняет четность значения L.

Как меняется четность значения L, если совершить над переменными преобразование S, т.е. прибавить n к c_1? В этом случае изменяются $2(n-1)$ слагаемых в правой части (9) с индексами $1, j$ и $j, 1$.

Непосредственная проверка, сходная с проверкой для преобразования T_i, показывает, что при увеличении c_1 на n каждая из $n-1$ сумм $\max\{0, \left[\frac{c_1-c_j-1}{n}\right]+1\}+\max\{0, \left[\frac{c_j-c_1-1}{n}\right]\}$ изменяется опять-таки на 1. Значит, преобразование S при четном $n-1$ не меняет четности значения L, а при нечетном $n-1$ всегда изменяет ее на противоположную. Точно так же, конечно, действует преобразование S^{-1}, состоящее в вычитании n из первого аргумента.

Имеющаяся у нас теперь информация о действии преобразований переменных на четность значения функции L позволяет выяснить, какова четность значения L на векторе $(\widetilde{d}_1,\ldots,\widetilde{d}_n)$. Во-первых, $L(0,1,2,\ldots,n-1)=0$; во-вторых, любой вектор $(\widetilde{d}_1,\ldots,\widetilde{d}_n)$, где $\widetilde{d}_i = k_i-k_{i-1}+i-1$ и $\widetilde{d}_i$ попарно несравнимы по $\bmod n$, получается из вектора $(0,1,2,\ldots,n-1)$ действием преобразований T_i, S и S^{-1}, при этом четность количества преобразований вида T_i совпадает с четностью перестановки $(\widetilde{d}_1 \bmod n,\ldots,\widetilde{d}_n \bmod n)$, а количество преобразований вида S и S^{-1} всегда четно, потому каждое из них изменяет сумму компонент вектора на n; сумма же компонент $(\widetilde{d}_1,\ldots,\widetilde{d}_n)$ равна $\binom{n}{2}$, т.е. совпадает с суммой компонент исходного вектора $(0,1,2,\ldots,n-1)$. Таким образом, четность числа $q(k_1,\ldots,k_n) = L(\widetilde{d}_1,\ldots,\widetilde{d}_n)$ равна четности количества транспозиций T_i, нужных для получения $(\widetilde{d}_1, \ldots, \widetilde{d}_n)$ из $(0, 1, \ldots, n-1)$, а она, в свою очередь, совпадает с четностью перестановки $(\widetilde{d}_1 \bmod n, \ldots, \widetilde{d}_n \bmod n)$ чисел $(0, 1, \ldots, n-1)$. Доказано утверждение в), а с ним — окончательно — и тождество (1).

Примечание. Условие (*), накладываемое на мультииндексы в правой части, существенно только при $n \geqslant 5$. При $n = 2, 3, 4$ оно есть следствие условия $Q(k_1, \ldots, k_n) = 0$; лишь начиная с $n = 5$ существуют наборы $(k_1, \ldots, k_n)$, такие, что $Q(k_1, \ldots, k_n) = 0$, но числа $k_1 - k_n$, $k_2 - k_1 + 1$, $\ldots$, $k_n - k_{n-1} + n - 1$ не являются попарно несравнимыми по $\bmod n$. (Для $n = 5$ наименьшие по сумме компонент такие наборы — циклические перестановки набора $(1, 2, 2, 1, 4)$.) Формула из [4, п.3.2.3] верна, следовательно, лишь для $n = 2, 3$ и 4.

Автор благодарит А.М.Вершика за предложение темы данной работы, постоянное внимание к последней и за множество ценных указаний, которыми автор неизменно руководствовался. Автор признателен также М.А.Всемирнову за сообщение о несовпадении коэффициентов в правой и левой частях равенства в п.3.2.3 [4] при $n = 7$, замеченном им при попытке нового — аналитического — доказательства тождеств Макдональда (см. работу М.А.Всемирнова в настоящем сборнике) и за информацию о знаке слагаемого в правой части (см. тот же источник).

Литература

1. В. Г. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли и η-функция Дедекинда.* — Функц. анал. и его прил., **8**(1), 1974, с.77–78.
2. В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли.* М., Мир, 1993.
3. I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's η-function.* — Invent. math. **15** (1972), 91–143.
4. Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.* М., Наука, 1984.

Bazlov Yu. M. The homology of infinite-dimensional Lie algebras in connection with Macdonald identity.

D.Fuchs' monograph devoted to the cohomology of infinite-dimensional Lie algebras contains an error in calculating the homology of graded affine Kac-Moody algebra of type $A_n^{(1)}$, so that the proof of the corresponding Macdonald identity which is based on that calculation appears to be incorrect. In the present paper the corrected proof is suggested.