Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

А. М. Бородин

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ И ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ БОЛЬШИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

§1. Введение

В работе [1] был поставлен вопрос об изучении закономерностей поведения верхнетреугольных матриц порядка n при $n \to \infty$, который можно понимать следующим образом. Для каждой верхнетреугольной матрицы X над конечным полем $\mathbb{F}_q$, состоящим из q элементов, $X = (x_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_q)$,

$$x_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad i \geqslant j,$$

определим тип X как разбиение $\lambda = \{\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r\}$ числа n на натуральные слагаемые таким образом, что блоки жордановой нормальной формы матрицы X имеют размеры $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r$. Эта работа посвящена изучению распределения указанных матриц по их типу при $n \to \infty$. Основным результатом является следующая

Теорема A. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $c = c(\varepsilon) > 0$ и $\theta = \theta(\varepsilon)$, $0 < \theta < 1$, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{P}^{(n)}\left\{\sup_{k \in \mathbb{N}}\left|\frac{\lambda_k}{n} - \left(\frac{1}{q^{k-1}} - \frac{1}{q^k}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant c \cdot \theta^n,$$

где символ $\mathrm{P}^{(n)}$ означает отношение количества верхнетреугольных матриц порядка n, удовлетворяющих указанному условию, к количеству всех верхнетреугольных матриц порядка n (то есть, к $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$).

При поддержке Международного Научного Фонда и Международной Соровской Программы Образования.

Иными словами, теорема A указывает типичную жорданову форму рассматриваемого множества матриц. Эту теорему можно рассматривать как аналог закона больших чисел. Аналогом центральной предельной теоремы является следующее утверждение

Теорема B. *При любом $k = 1, 2, \dots$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}^{(n)}\left\{\frac{\lambda_i - p_i n}{\sqrt{n}} \leqslant x_i,\ i = 1, \dots, k\right\} = \\ = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int\limits_{-\infty}^{x_1} \dots \int\limits_{-\infty}^{x_k} e^{-\frac{1}{2}\langle Qt,t\rangle} dt$$

для любого $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, где матрица ковариаций

$$Q = \operatorname{diag}\{p_1, \dots, p_k\} - (p_i p_j)_{i,j=1}^k.$$

Отметим, что в данном случае центральная предельная теорема является непосредственным следствием закона больших чисел.

Автор рад возможности поблагодарить А. А. Кириллова за постановку задачи и внимание к работе, а также С. В. Керова и Г. И. Ольшанского за внимание, полезные обсуждения и поддержку.

§2. Теорема деления

Введем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{P}_n$ обозначает множество всех разбиений числа n:

$$\mathcal{P} = \{\lambda = \{\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_r\} | \lambda_i \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^r \lambda_i = n\}.$$

Обозначим множество всех верхнетреугольных матриц над полем $\mathbb{F}_q$ порядка n через $\mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)$ и через $\mathfrak{g}_{n,\lambda}(\mathbb{F}_q) \subset \mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)$ подмножество $\mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)$, состоящее из всех матриц данного типа $\lambda \in \mathcal{P}_n$. Элементы $\mathfrak{g}_{n+1}(\mathbb{F}_q)$ нам будет удобно записывать в блочной форме: $\chi \in \mathfrak{g}_{n+1}(\mathbb{F}_q)$,

$$\chi = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $x \in \mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)$ и $x \in \mathbb{F}_q^n$. Будем обозначать через $\mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda}(\mathbb{F}_q)$ множество элементов $\chi \in \mathfrak{g}_{n+1,\Lambda}(\mathbb{F}_q)$ вида (2.1), $\Lambda \in \mathcal{P}_{n+1}$, таких, что $X \in \mathfrak{g}_{n,\lambda}(\mathbb{F}_q)$. Целью этого параграфа является выяснение условий на λ и Λ, при которых $\mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda} \neq \varnothing$, и, более подробно, вычисление мощности $\mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda}$ при заданных $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $\Lambda \in \mathcal{P}_{n+1}$.

Нам будет также иногда удобно использовать для $\lambda \in \mathcal{P}_n$ обозначение, указывающее, сколько раз в него входит каждое число от 1 до n:

$$\lambda = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i = \operatorname{Card}\{j : \lambda_j = i\}.$$

Каждому разбиению $\lambda \in \mathcal{P}_n$ поставим в соответствие диаграмму Юнга $D(\lambda)$, состоящую из n клеток, расположенных в r рядов так, что s-тый ряд содержит λ_s клеток. (Формально мы можем определить $D(\lambda)$ как подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$D(\lambda) = \bigcup_{k=1}^{r} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k-1 \leqslant y \leqslant k,\ 0 \leqslant x \leqslant \lambda_k\}.)$$

Скажем, что диаграмма D j-смежна к диаграмме D', если D получается из D' удалением клетки в j-том столбце. Следуя работе [1], установим следующий факт.

Предложение 2.1. $\mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda} \neq \varnothing$ *если и только если существует* j, $1 \leqslant j \leqslant \lambda_1 + 1$, *такое, что* $D(\lambda)$ j*-смежна к* $D(\Lambda)$.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 2.2. *Пусть* $\chi \in \mathfrak{g}_{n+1}$ *и имеет вид* (2.1), $X \in \mathfrak{g}_{n,\lambda}$, $\lambda \in \mathcal{P}_n$. *Тогда* χ *имеет тип* $\Lambda \in \mathcal{P}_{n+1}$, *где* $D(\lambda)$ j*-смежна к* $D(\Lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant \lambda_1 + 1$, *если и только если выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} &1)\ X^{j-1}x \in \operatorname{Im} X^j \\ &2)\ X^{j-2}x \notin \operatorname{Im} X^{j-1} \ \ \textit{(это условие отсутствует при } j=1\textit{)} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть $\lambda = 1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n}$ и $\Lambda = 1^{A_1} \dots (n+1)^{A_{n+1}}$. Тогда $D(\lambda)$ j-смежна к $D(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда $A_j = \alpha_j + 1$, $A_{j-1} = \alpha_{j-1} - 1$ и $A_k = \alpha_k$ при $k \neq j, j-1$. Поскольку жорданова клетка размера l с нулевыми собственными значениями после возведения в k-ую степень имеет ранг $\max\{0, l-k\}$, и для всякой матрицы Y с жордановой формой J_Y имеет место равенство

$$\operatorname{rk} Y^k = \operatorname{rk} J_Y^k,$$

мы получаем

$$\operatorname{rk} X^k = \sum_i \max\{0, \lambda_i - k\} \text{ и } \operatorname{rk} X^k - \operatorname{rk} X^{k+1} = \sum_{i \geqslant k+1} \alpha_i \qquad (2.3)$$

Аналогично, $\operatorname{rk} \chi^l - rk\chi^{l+1} = \sum_{i \geqslant l+1} A_i$. Поэтому условие j-смежности $D(\lambda)$ к $D(\Lambda)$ равносильно тому, что

$$\operatorname{rk} \chi^l - \operatorname{rk} X^l = \begin{cases} 0, & l \geqslant j \\ 1, & l < j \end{cases} \qquad (2.4)$$

(Действительно, $\operatorname{rk} \chi^0 = n + 1 = \operatorname{rk} X^0 + 1$ и

$$(\operatorname{rk} \chi^{k+1} - \operatorname{rk} X^{k+1}) - (\operatorname{rk} \chi^k - \operatorname{rk} X^k) = \sum_{i \geqslant k+1} (\alpha_i - A_i) = \begin{cases} 1, & k = j-1 \\ 0, & k \neq j-1 \end{cases}.)$$

Но

$$\chi^l = \begin{pmatrix} X^l & X^{l-1}x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому (2.4) эквивалентно двум условиям

1) $X^{l-1}x \in \operatorname{Im} X^l, \quad l \geqslant j$

2) $X^{l-1}x \notin \operatorname{Im} X^l, \quad l < j$ (при $j = 1$ это условие отсутствует),

которые эквивалентны (2.2), поскольку

$$(X^{l-1}x \in \operatorname{Im} X^l) \Longrightarrow (X^l x \in \operatorname{Im} X^{l+1}). \qquad (2.5)$$

Лемма доказана.

Для завершения доказательства Предложения 2.1 достаточно показать, что

а) всякий вектор $x \in \mathbb{F}_q^n$ удовлетворяет (2.2) при некотором j;

б) для всякого j, $1 \leqslant j \leqslant \lambda_1 + 1 : D(\lambda)$ j-смежна к $D(\Lambda)$, найдется $x \in \mathbb{F}_q^n$, удовлетворяющий (2.2).

Из (2.5) следует, что первое условие (2.2) определяет при $j = 1, \dots, \lambda_1 + 1$ возрастающую цепочку подпространств $\{V_j\}$,

$$\operatorname{Im} X = V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{\lambda_1+1} = \mathbb{F}_q^n,$$

а выполнение обоих условий (2.2) равносильно тому, что $x \in V_j \setminus V_{j-1} \quad (V_0 = \varnothing)$. Утверждение а) следует из того, что

$$\bigcup_{j=1}^{\lambda_1+1} (V_j \setminus V_{j-1}) = \mathbb{F}_q^n.$$

Заметим теперь, что

$$\dim V_j = \operatorname{rk} X^j + \dim \operatorname{Ker} X^{j-1} = n + \operatorname{rk} X^j - \operatorname{rk} X^{j-1}. \tag{2.6}$$

Теперь же при $j \neq 1$ мы имеем (см. (2.3) и начало Леммы 2.2)

$$\dim V_j - \dim V_{j-1} = (\operatorname{rk} X^j - \operatorname{rk} X^{j-1}) - (\operatorname{rk} X^{j-1} - \operatorname{rk} X^{j-2}) = \\ = \sum_{i\geqslant j} \alpha_i - \sum_{i \geqslant j-1} \alpha_i = \alpha_{j-1} = A_{j-1} + 1 > 0, \tag{2.7}$$

если $D(\lambda)$ j-смежна к $D(\Lambda)$, поэтому $V_j \setminus V_{j-1} \neq \varnothing$. Если же $j = 1$, то вектор $x = \vec{0}$ удовлетворяет условиям (2.2). Пункт б) и Предложение 2.1 доказаны.

Перейдем теперь к рассмотрению количественных характеристик множеств $\mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda}$. Пусть $X \in \mathfrak{g}_{n,\lambda}$. Положим

$$\mathrm{P}_X(\Lambda|\lambda) = \frac{1}{q^n} \cdot \operatorname{Card} \left\{ x \in \mathbb{F}_q^n | \chi = \begin{pmatrix} X & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{n+1,\Lambda} \right\}.$$

Вообще говоря, $\mathrm{P}_X(\Lambda|\lambda)$ зависит от выбора матрицы X, однако, следующее, основное в этом параграфе, утверждение показывает, что $\mathrm{P}_X(\Lambda|\lambda)$ зависит лишь от λ и Λ.

Теорема 2.3 (деления). *Пусть* $\lambda = 1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n} \in \mathcal{P}_n$, $\Lambda \in \mathcal{P}_{n+1}$, $D(\lambda)$ *j-смежна к* $D(\Lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant \lambda_1 + 1$. *Тогда для любой матрицы* $X \in \mathfrak{g}_{n,\lambda}$

$$\mathrm{P}_X(\Lambda|\lambda) = \begin{cases} q^{-\sum\limits_{k\geqslant j} \alpha_k} (1 - q^{-\alpha_{j-1}}) & \text{\textit{при} } j > 1 \\ q^{-\sum\limits_{k\geqslant 1} \alpha_k} & \text{\textit{при} } j = 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательство. Из рассмотрения пункта а) в доказательстве Предложения 2.1 мы знаем, что условие j-смежности $D(\lambda)$ к $D(\Lambda)$ равносильно тому, что $x \in V_j \setminus V_{j-1}$, поэтому $(j > 1)$

$$\mathrm{P}_X(\Lambda|\lambda) = \frac{1}{q^n} (\operatorname{Card} V_j - \operatorname{Card} V_{j-1}) = \frac{1}{q^n} (q^{\dim V_j} - q^{\dim V_{j-1}}),$$

и, воспользовавшись (2.3), (2.6) и (2.7), получим

$$\mathrm{P}_X(\Lambda|\lambda) = q^{\dim V_j - n} (1 - q^{\dim V_{j-1} - \dim V_j}) = q^{-\sum\limits_{k\geqslant j} \alpha_k} (1 - q^{-\alpha_{j-1}}),$$

что и требовалось. Если же $j=1$, то

$$\mathrm{P}_X(\Lambda|\lambda)=q^{-n}\operatorname{Card}V_1=q^{\dim V_1-n}=q^{-\dim\operatorname{Ker}X}=q^{-\sum\limits_{k\geqslant 1}\alpha_k}.$$

Теорема доказана.

Посмотрим на рассматриваемые объекты с несколько другой точки зрения. Будем называть элементы $X\in\mathfrak{g}_{n,\lambda}$ (n,λ)-частицами массы $q^{\frac{-n(n-1)}{2}}=|\mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)|^{-1}$ и обозначать общую массу (n,λ) частиц через $\mathrm{P}(\lambda)$. Заметим теперь, что для данной (n,λ)-частицы X масса $(n+1)$-частиц χ вида (2.1) равна $q^n\cdot q^{\frac{-n(n+1)}{2}}=q^{\frac{-n(n-1)}{2}}$, то есть совпадает с массой X. Таким образом, мы можем говорить о делении каждой (n)-частицы на $q^n(n+1)$-частиц. Теорему деления можно теперь переформулировать так: масса $(n+1,\Lambda)$-частиц, находящихся в потомстве данной (n,λ)-частицы, равна $\mathrm{P}(\Lambda|\lambda)q^{\frac{-n(n-1)}{2}}$; или так: масса $(n+1,\Lambda)$-частиц, предок каждой из которых есть (n,λ)-частица, равна $\mathrm{P}(\Lambda|\lambda)\mathrm{P}(\lambda)$ (иными словами, $|\mathfrak{g}^{\Lambda}_{n,\lambda}|\cdot q^{\frac{-n(n+1)}{2}}=\mathrm{P}(\Lambda|\lambda)\cdot|\mathfrak{g}_{n,\lambda}|\cdot q^{\frac{-n(n-1)}{2}}$). Отсюда немедленно следует, что

$$\mathrm{P}(\Lambda)=\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n,\,D(\lambda)\subset D(\Lambda)}\mathrm{P}(\Lambda|\lambda)\cdot\mathrm{P}(\lambda),$$

и, учитывая, что существует лишь одна (1)-частица массы 1,

$$\mathrm{P}(\Lambda)=\sum_{1^1=\lambda^{(1)}\subset\lambda^{(2)}\subset\ldots\subset\lambda^{(n)}\subset\Lambda}\mathrm{P}(\Lambda|\lambda^{(n)})\cdot\mathrm{P}(\lambda^{(n)}|\lambda^{(n-1)})\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(\lambda^{(2)}|\lambda^{(1)}),\tag{2.9}$$

где суммирование ведется по всем последовательностям $\{\lambda^{(1)}\subset\lambda^{(2)}\subset\ldots\subset\lambda^{(n)}\subset\Lambda\}$, $\lambda^{(i)}\in\mathcal{P}_i$, а знак вложения означает вложение соответствующих диаграмм Юнга. (Отметим, что условия $\lambda\in\mathcal{P}_n$, $\Lambda\in\mathcal{P}_{n+1}$ и $\lambda\subset\Lambda$ равносильны j-смежности $D(\lambda)$ к $D(\Lambda)$, $1\leqslant j\leqslant\lambda_1+1$.)

Приведем еще одну переформулировку Теоремы 2.3. Каждому разбиению $\lambda\in\mathcal{P}_n$ поставим в соответствие сопряженное разбиение $\lambda'\in\mathcal{P}_n$, диаграмма которого получается из диаграммы λ отражением относительно главной диагонали. Таким образом, λ'_i есть число клеток в i-том столбце диаграммы λ, или, что эквивалентно,

$$\lambda'_i=\operatorname{Card}\{j:\lambda_j\geqslant i\}=\sum_{k\geqslant i}\alpha_k,$$

где $\lambda = 1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n}$. Отсюда следует, что $\lambda'_i - \lambda'_{i+1} = \alpha_i$, и формула (2.8) переписывается в виде

$$\mathrm{P}\,(\Lambda|\lambda) = \begin{cases} q^{-\lambda'_j}(1 - q^{\lambda'_j - \lambda'_{j-1}}), & j > 1 \\ q^{-\lambda'_1}, & j = 1 \end{cases} \tag{2.10}$$

Докажем в заключание параграфа следствие, которое не будет использоваться в дальнейшем, но представляет, на наш взгляд, некоторый самостоятельный интерес.

Следствие 2.4. *Пусть* $\lambda = \{\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_s\} \in \mathcal{P}_n$. *Тогда*

$$\frac{d(\lambda)}{q^{c(\lambda)}} \geqslant \frac{d(\lambda)}{q^{c(\lambda)}} \prod_{k=2}^{s} \prod_{i=\lambda'_{k-1}-\lambda'_k+1}^{\lambda'_{k-1}} (1 - q^{-i}) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{P}\,(\lambda) = \frac{|\mathfrak{g}_{n,\lambda}|}{|\mathfrak{g}_n|} \geqslant \frac{d(\lambda)}{q^{c(\lambda)}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{n-\lambda'_1},$$

где $d(\lambda) = \dim \pi_\lambda$*-размерность неприводимого комплексного представления симметрической группы* S_n, *соответствующего разбиению* λ, *а*

$$c(\lambda) = \sum_{i\geqslant 1} \frac{\lambda'_i(\lambda'_i - 1)}{2} = \sum_{i\geqslant 1} (i-1)\lambda_i.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.9). Из теории представлений симметрических групп известно, что число слагаемых суммы (2.9) равно $d(\lambda)$. (Это есть число путей в графе Юнга, ведущих от $D(\{1\})$ к $D(\lambda)$, см. [2]). Оценим теперь каждое из слагаемых этой суммы. Пусть $1^1 = \lambda^{(1)} \subset \dots \subset \lambda^{(n)} = \lambda$. Занумеруем клетки $D(\lambda)$ числами от 1 до n так, чтобы клетка с координатами (1,1) (находящаяся в первой строке и первом столбце) имела номер 1, а клетка с координатами $(i,j) \neq (1,1)$ (i-я строка, j-й столбец) имела томер k, если $D(\lambda^{(k-1)})$ получается из $D(\lambda^{(k)})$ удалением этой клетки. В силу формулы (2.10) множитель $\mathrm{P}\,(\lambda^{(k)}|\lambda^{(k-1)})$, соответствующий клетке с номером k и координатами (i_k, j_k), заключен между

$$q^{(1-i_k)}(1 - q^{i_k - 1 - \lambda'_{j_k - 1}}) \geqslant \mathrm{P}\,(\lambda^{(k)}|\lambda^{(k-1)}) \geqslant q^{(1-i_k)}\left(1 - \frac{1}{q}\right), \; j_k > 1$$

$$\mathrm{P}\,(\lambda^{(k)}|\lambda^{(k-1)}) = q^{(1-i_k)}, \qquad j_k = 1.$$

Перемножив полученные неравенства при $k = 2, \dots, n$ и умножив на количество слагаемых в (2.9), получим требуемое.

§3. Доказательство теоремы А

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма из теории вероятностей (см. [3], стр. 81).

Лемма 3.1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин с $\mathrm{P}\{\xi_1 = 1\} = p$, $\mathrm{P}\{\xi_1 = 0\} = 1-p$, $0 \leqslant p \leqslant 1$, и $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$ и $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$, что*

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant c_1 \cdot e^{-c_2 n} \tag{3.1}$$

при всех $n = 1, 2, \dots$.

В дальнейшем нам будет удобно рассуждать о введенных в §2 объектах на языке теории вероятностей, считая $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ целочисленными случайными величинами, определенными на вероятностных пространствах $\mathfrak{g}_n$, каждое из которых состоит из $|\mathfrak{g}_n| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ равновероятных элементарных событий-матриц. При этом мы будем использовать обозначение $\lambda_k^{(n)}$ для случайной величины λ_k, определенной на $\mathfrak{g}_n$.

Лемма 3.2. *Для всех $n = 1, 2, \dots$ и любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство*

$$F_{\lambda_1^{(n)}}(x) \leqslant F_n(x), \tag{3.2}$$

где $F_{\lambda_1^{(n)}}(x) = \mathrm{P}\{\lambda_1^{(n)} \leqslant x\}$ – функция распределения $\lambda_1^{(n)}$, а $F_n(x) = \mathrm{P}\{S_n \leqslant x\}$ – функция распределения случайной величины $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ из Леммы 3.1 при $p = 1 - q^{-1}$.

Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно. Так как все рассматриваемые случайные величины принимают целые неотрицательные значения, то достаточно доказать неравенство (3.2) для целых неотрицательных x. С одной стороны,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) = \mathrm{P}\{S_{n+1} \leqslant x\} = \mathrm{P}\{S_n \leqslant x-1\} + \mathrm{P}\{S_n = x, \xi_{n+1} = 0\} = \\ = F_n(x-1) + (1-p)(F_n(x) - F_n(x-1)) = pF_n(x-1) + (1-p)F_n(x) = \\ = (1-q^{-1})F_n(x-1) + q^{-1}F_n(x). \quad (3.3) \end{aligned}$$

С другой стороны, из теоремы деления следует, что

$$F_{\lambda_1^{(n+1)}}(x) = \mathrm{P}\,\{\lambda_1^{(n+1)} \leqslant x\} =$$
$$= \mathrm{P}\,\{\lambda_1^{(n)} \leqslant x-1\} + \mathrm{P}\,\{\chi \in \mathfrak{g}_{n+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda},$$
$$\lambda_1 = \Lambda_1 = x\} = F_{\lambda_1^{(n)}}(x-1) + \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n\\ \lambda_1=x}} \sum_{\substack{\lambda\subset\Lambda\in\mathcal{P}_{n+1}\\ \Lambda_1=x}} \mathrm{P}\,(\Lambda|\lambda)\mathrm{P}\,(\lambda) =$$
$$= F_{\lambda_1^{(n)}}(x-1) + \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n\\ \lambda_1=x}} (1-\mathrm{P}\,(\widetilde{\Lambda}|\lambda))\mathrm{P}\,(\lambda),$$

где $\widetilde{\Lambda} \supset \lambda$ и $\widetilde{\Lambda}_1 = x+1$. Это означает, что $D(\lambda)$ (λ_1+1)-смежна к $D(\widetilde{\Lambda})$, и $\mathrm{P}\,(\widetilde{\Lambda}|\lambda) = 1-q^{-\alpha_{\lambda_1}} \geqslant 1-q^{-1}$ (где $\lambda = 1^{\alpha_1}\dots n^{\alpha_n}$). Учитывая полученное неравенство, получаем

$$F_{\lambda_1^{(n+1)}}(x) \leqslant F_{\lambda_1^{(n)}}(x-1) + \frac{1}{q}\sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_n\\ \lambda_1=x}} \mathrm{P}\,(\lambda) = F_{\lambda_1^{(n)}}(x-1) + q^{-1}\cdot\mathrm{P}\,\{\lambda_1^{(n)} = x\} =$$
$$= (1-q^{-1})F_{\lambda_1^{(n)}}(x-1) + q^{-1}F_{\lambda_1^{(n)}}(x) \qquad (3.4)$$

Индукционный шаг теперь немедленно следует из равенства (3.3) и неравенства (3.4). Лемма доказана.

Непосредственным следствием Лемм 3.1 и 3.2 является следующее

Предложение 3.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$ и $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$, что при всех $n = 1, 2, \dots$*

$$F_{\lambda_1^{(n)}}\left(\left(1-\frac{1}{q}-\varepsilon\right)n\right) \leqslant c_1\cdot e^{-c_2 n}. \qquad (3.5)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство утверждения, аналогичного Предложению 3.3, для λ_k при $k = 2, 3, \dots$. Дополнительные трудности создает тот факт, что для любого разбиения $\lambda \in \mathcal{P}_n$ существует $\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{P}_{n+1}$: $\widetilde{\Lambda} \supset \lambda$, $\widetilde{\Lambda}_1 = \lambda_1 + 1$, тогда как если потребовать $\widetilde{\Lambda}_2 = \lambda_2 + 1$, то требуемого разбиения $\widetilde{\Lambda}$ может не найтись.

Предложение 3.4. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ существуют такие константы $c_1 = c_1(\varepsilon, k) > 0$ и $c_2 = c_2(\varepsilon, k) > 0$, что*

$$F_{\lambda_k^{(n)}}((p_k-\varepsilon)n) \leqslant c_1\cdot e^{-c_2 n} \qquad (3.6)$$

при всех $n = 1, 2, \ldots,$ *где* $p_k = q^{1-k} - q^{-k}$.

Доказательство. При $k = 1$ (3.6) совпадает с утверждением уже доказанного Предложения 3.3. Пусть $k \geqslant 2$. Для доказательства (3.6) мы построим три последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ случайных величин, определенных на общем вероятностном пространстве, принимающих целые неотрицательные значения и обладающих следующими свойствами.

(I) $\beta_n \geqslant \alpha_n \geqslant \beta_n - \gamma_n$, $n = 1, 2, \ldots$

(II) $F_{\lambda_k^{(n)}}(x) \leqslant F_{\alpha_n}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$

(III) $F_{\beta_n}(x) \equiv F_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, где $F_n(x)$ взята из Леммы 3.1 при $p = p_k = q^{1-k} - q^{-k}$, т.е. β_n доставляет биномиальное распределение.

(IV) Для любого $\delta > 0$ существуют такие константы $d_1 = d_1(\delta, k) > 0$ и $d_2 = d_2(\delta, k) > 0$, что

$$\mathrm{P}\left\{\gamma_n \geqslant \delta n\right\} \leqslant d_1 e^{-d_2 n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Покажем сначала, как из существования таких последовательностей следует требуемое неравенство (3.6). Из условий (I) и (II) следует, что

$$F_{\lambda_k^{(n)}}(x) \leqslant F_{\alpha_n}(x) \leqslant F_{\beta_n - \gamma_n}(x).$$

Далее,

$$\begin{aligned} F_{\beta_n-\gamma_n}((p_k-\varepsilon)n) &= \mathrm{P}\left\{(\beta_n - \gamma_n) \leqslant (p_k - \varepsilon)n\right\} \leqslant \\ &\leqslant \mathrm{P}\left\{\beta_n \leqslant \left(p_k - \frac{\varepsilon}{2}\right) n\right\} + \mathrm{P}\left\{\gamma_n \geqslant \frac{\varepsilon}{2} n\right\}. \end{aligned}$$

Из (III) и Леммы 3.1 следует, что первое слагаемое не превосходит $c_3 \cdot e^{-c_4 n}$, а из (IV) следует, что и второе слагаемое не превосходит $c_5 \cdot e^{-c_6 n}$, откуда

$$\begin{aligned} F_{\lambda_k^{(n)}}((p_k-\varepsilon)n) &\leqslant F_{\beta_n-\gamma_n}((p_k-\varepsilon)n) \leqslant \\ &\leqslant c_3 e^{-c_4 n} + c_5 e^{-c_6 n} \leqslant c_1 e^{-c_2 n}, \end{aligned}$$

что и требуется.

Перейдем к построению $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$. Общим вероятностным пространством будет служить полуинтервал $[0, 1)$ с мерой Лебега в качестве вероятности. Дополнительно к условиям (I)–(IV) мы будем требовать выполнение условия

(V) при каждом $n = 1, 2, \ldots$ существует разбиение отрезка [0,1], $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$, такое, что α_n и β_n постоянны на каждом из полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Построение проведем индукцией по n. При $n = 1$ положим

$$\alpha_1(x) \equiv 0; \quad \beta_1(x) = \gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, p_k) \\ 0, & x \in [p_k, 1) \end{cases}.$$

Очевидно, условия (I)–(III), (V) выполнены. Предположим, последовательности построены при $n = 1, 2, \ldots, r$, причем при этих n условия (I)–(III), (V) выполнены. Построим α_{r+1}, β_{r+1}, γ_{r+1}. Пусть $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$ – разбиение из (V) при $n = r$. Обозначим через A_s^r множество полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$, на которых $\alpha_r = s$ (каждый полуинтервал войдет в A_s^r при некотором $s \in \mathbb{Z}_+$), а через μA_s^r – сумму длин полуинтервалов, вошедших в A_s^r. Положим также

$$a_s^r = \mathrm{P}\,\{\lambda_{k-1}^{(r)} = s\}.$$

Наши дальнейшие действия зависят от соотношения величин μA_s^r и a_s^r. Пусть сначала $\mu A_s^r \leqslant a_s^r$. Пусть $[a, b) \in A_s^r$. Положим $d = a + p_k(b-a) \in [a, b)$; $(d-a) : (b-a) = p_k : 1$, и

$$\begin{aligned} &\alpha_{r+1}(x) = \alpha_r(x) = s, \quad x \in [a, b) \\ &\beta_{r+1}(x) = \begin{cases} \beta_r(x) + 1, & x \in [a, d) \\ \beta_r(x), & x \in [d, b) \end{cases} \\ &\gamma_{r+1}(x) = \gamma_r(x) + 1, \quad x \in [a, b) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Действуя таким образом, мы зададим α_{r+1}, β_{r+1} и γ_{r+1} на всех полуинтервалах из A_s^r.

Пусть теперь $\mu A_s^r > a_s^r$. Положим ($[a, b) \in A_s^r$)

$$d_1 = a + \left(1 - \frac{a_s^r}{\mu A_s^r}\right)(b-a), \quad d_2 = a + p_k(d_1 - a), \quad d_3 = d_1 + p_k(b - d_1),$$

так что $a < d_2 < d_1 < d_3 < b$ и

$$\frac{b - d_1}{b - a} = \frac{a_s^r}{\mu A_s^r}, \quad \frac{d_2 - a}{d_1 - a} = \frac{p_k}{1}, \quad \frac{d_3 - d_1}{b - d_1} = \frac{p_k}{1},$$

и положим

$$\begin{gathered}
\alpha_{r+1}(x)=\begin{cases}\alpha_r(x)+1=s+1, & x\in[a,d_2)\\ \alpha_r(x)=s, & x\in[d_2,b)\end{cases}\\
\beta_{r+1}(x)=\begin{cases}\beta_r(x)+1, & x\in[a,d_2)\cup[d_1,d_3)\\ \beta_r(x), & x\in[d_2,d_1)\cup[d_3,b)\end{cases}\\
\gamma_{r+1}(x)=\begin{cases}\gamma_r(x), & x\in[a,d_1)\\ \gamma_r(x)+1, & x\in[d_1,b)\end{cases}
\end{gathered}\tag{3.8}$$

Действуя таким образом, зададим α_{r+1}, β_{r+1} и γ_{r+1} на всех полуинтервалах $[a,b)\in A^r_s$.

Проделав описанную процедуру при всех $s\in\mathbb{Z}_+$, мы полностью зададим α_{r+1}, β_{r+1}, γ_{r+1}. Докажем теперь выполнение условий (I)–(III), (V) для $n=r+1$.

(I) вытекает из следующих импликаций

$$\begin{gathered}
(\alpha_{r+1}(x)=\alpha_r(x)+1)\Longrightarrow(\beta_{r+1}(x)=\beta_r(x)+1),\\
(\beta_{r+1}(x)=\beta_r(x)+1)\Longrightarrow((\alpha_{r+1}(x)=\\
=\alpha_r(x)+1)\vee(\gamma_{r+1}(x)=\gamma_r(x)+1)),
\end{gathered}$$

которые непосредственно следуют из определений (3.7), (3.8).

(II) В силу условия (II) при $n=r$, мы имеем при всех $x\in\mathbb{R}$

$$F_{\lambda_k^{(r)}}(x)\leqslant F_{\alpha_r}(x).$$

Так как все рассматриваемые случайные величины принимают целые неотрицательные значения, то достаточно доказать (II) при $x\in\mathbb{Z}_+$. Рассмотрим 2 случая: а) $\mu A^r_x\leqslant a^r_x$ и б) $\mu A^r_x>a^r_x$.

а) Из определения (3.7) следует, что, если при некотором $y\in[0,1)$ $\alpha_r(y)=x$, то $\alpha_{r+1}(y)=x$. Учитывая, что $|\alpha_{r+1}(z)-\alpha_r(z)|\leqslant 1$ при $z\in[0,1)$, имеем

$$F_{\alpha_{r+1}}(x)=F_{\alpha_r}(x).$$

Но из теоремы деления следует, что $\mathrm{P}\{\lambda_k^{(r)}>x\}\leqslant\mathrm{P}\{\lambda_k^{(r+1)}>x\}$, поэтому

$$F_{\alpha_{r+1}}(x)=F_{\alpha_r}(x)\geqslant F_{\lambda_k^{(r)}}(x)\geqslant F_{\lambda_k^{(r+1)}}(x),$$

что и требовалось.

б) Из определения (3.8) следует, что мера тех точек $y \in [0,1)$, в которых $\alpha_{r+1}(y) = \alpha_r(y) + 1 = x + 1$, равна

$$\sum_{[a,b)\in A_x^r} (d_2 - a) = p_k \left(1 - \frac{a_x^r}{\mu A_x^r}\right) \mu A_x^r = p_k(\mu A_x^r - a_x^r),$$

поэтому, учитывая, что $|\alpha_{r+1}(z) - \alpha_r(z)| \leqslant 1$ при $z \in [0,1)$, имеем

$$\begin{aligned} F_{\alpha_{r+1}}(x) &= F_{\alpha_r}(x) - p_k(\mu A_x^r - a_x^r) = \\ &= F_{\alpha_r}(x) - p_k(F_{\alpha_r}(x) - F_{\alpha_r}(x-1)) + p_k a_x^r = \\ &= p_k F_{\alpha_r}(x-1) + (1-p_k) F_{\alpha_r}(x) + p_k a_x^r. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Перейдем к рассмотрению $\lambda_k^{(r+1)}$. Заметим, что, если $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $\Lambda \in \mathcal{P}_{n+1}$, $\Lambda \supset \lambda$ и $\Lambda_k = \lambda_k + 1$, то $\lambda_{k-1} > \lambda_k$, и из теоремы деления следует, что

$$\mathrm{P}\,(\Lambda|\lambda) = \begin{cases} q^{1-k} - q^{1-k-\alpha_{\lambda_k}} \geqslant q^{1-k} - q^{-k} = p_k, & \lambda_k \neq 0 \\ q^{-k+1} \geqslant q^{-k+1} - q^{-k} = p_k, & \lambda_k = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

и

$$\begin{aligned} F_{\lambda_k^{(r+1)}}(x) &= F_{\lambda_k^{(r)}}(x) - \mathrm{P}\,\{\chi \in \mathfrak{g}_{r+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{r,\lambda}^{\Lambda}; \Lambda_k = \lambda_k + 1 = x + 1\} = \\ &= F_{\lambda_k^{(r)}}(x) - \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_r \\ \lambda_k = x}} \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{P}_{r+1} \\ \Lambda\supset\lambda, \Lambda_k = x+1}} \mathrm{P}\,\{\chi \in \mathfrak{g}_{r,\lambda}^{\Lambda}\} = \\ &= F_{\lambda_k^{(r)}}(x) - \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{P}_r \\ \lambda_{k-1} > \lambda_k = x}} \mathrm{P}\,(\widetilde{\Lambda}|\lambda)\mathrm{P}\,(\lambda), \end{aligned}$$

где $\widetilde{\Lambda} \in \mathcal{P}_{r+1}$, $\widetilde{\Lambda} \supset \lambda$, $\widetilde{\Lambda}_k = \lambda_k + 1 = x + 1$. Тогда в силу (3.10)

$$\begin{aligned} F_{\lambda_k^{(r+1)}}(x) &\leqslant F_{\lambda_k^{(r)}} - p_k \mathrm{P}\,\{\lambda_{k-1}^{(r)} > \lambda_k^{(r)} = x\} = \\ &= F_{\lambda_k^{(r)}}(x) - p_k(\mathrm{P}\,\{\lambda_k^{(r)} = x\} - \mathrm{P}\,\{\lambda_{k-1}^{(r)} = \lambda_k^{(r)} = x\}) \leqslant \\ &\leqslant F_{\lambda_k^{(r)}}(x) - p_k \mathrm{P}\,\{\lambda_k^{(r)} = x\} + p_k \mathrm{P}\,\{\lambda_{k-1}^{(r)} = x\} = \\ &= p_k F_{\lambda_k^{(r)}}(x-1) + (1-p_k) F_{\lambda_k^{(r)}}(x) + p_k a_x^r. \end{aligned}$$

Сравнение полученного и равенства (3.9) вместе с предположением о справедливости (II) при $n = r$ завершает проверку (II) при $n = r + 1$.

(III) Из определений (3.7) и (3.8) следует, что при $x \in \mathbb{Z}_+$

$$F_{\beta_{n+1}}(x) = F_{\beta_n}(x) - p_k(F_{\beta_n}(x) - F_{\beta_n}(x-1)),$$

поскольку в силу условия (V) на каждом из полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$, $i = 0, \dots, m-1$, $\beta_n(x) = \mathrm{const}$. С другой стороны,

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) - \mathrm{P}\{S_n = x, \xi_{n+1} = 1\} = F_n(x) - p_k(F_n(x) - F_n(x-1)).$$

Сравнивая полученные равенства и вспоминая, что $F_1 \equiv F_{\beta_1}$, получаем $F_{\beta_n}(x) \equiv F_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$.

(V) Нужное разбиение при $n = r+1$ доставляет измельчение разбиения при $n = r$ всеми точками d, d_1, d_2, d_3, участвующими в построении $\alpha_{r+1}, \beta_{r+1}, \gamma_{r+1}$.

Итак, мы построили $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ и проверили свойства (I)–(III) и (V). Для завершения доказательства осталось проверить условие (IV).

(IV) Поскольку $\gamma_{r+1}(x) - \gamma_r(x) = 0$ или 1, $r = 1, 2, \dots$, и $|\gamma_1| \leqslant 1$, то

$$\mathrm{P}\{\gamma_n \geqslant \delta n\} \leqslant \sum_{i=[\delta n]}^{n} \mathrm{P}\{\gamma_i - \gamma_{i-1} = 1\}.$$

Из определений (3.7) и (3.8) следует, что

$$\mathrm{P}\{\gamma_{r+1} - \gamma_r = 1\} = \sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \min\{\mu A_s^r, a_s^r\} \leqslant \\ \leqslant \sum_{s \leqslant \frac{1}{2}(p_k + p_{k-1})r} a_s^r + \sum_{s > \frac{1}{2}(p_k + p_{k-1})r} \mu A_s^r.$$

Далее, так как из (I) следует, что $\beta_r \geqslant \alpha_r$, то

$$\sum_{s > \frac{1}{2}(p_k + p_{k-1})r} \mu A_s^r = \mathrm{P}\{\alpha_r > \frac{1}{2}(p_k + p_{k-1})r\} = \\ = 1 - F_{\alpha_r}\left(\frac{1}{2}(p_k + p_{k-1})r\right) \leqslant \\ \leqslant 1 - F_{\beta_r}\left(\frac{1}{2}(p_k + p_{k-1})r\right) \leqslant d_3(k) e^{-d_4(k)r}$$

для некоторых $d_3, d_4 > 0$ из Леммы 3.1 $\left(\frac{p_k + p_{k-1}}{2} > p_k\right)$.

Пусть на время $k = 2$. Тогда

$$\sum_{s \leqslant \frac{1}{2}(p_2+p_1)r} a_s^r = \mathrm{P}\left\{\lambda_1^{(r)} \leqslant \frac{(p_1+p_2)r}{2}\right\} = F_{\lambda_1^{(r)}}\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right) \leqslant d_5 \cdot e^{-d_6 \cdot r} \tag{3.11}$$

для некоторых констант $d_5, d_6 > 0$ в силу Предложения 3.3. Таким образом,

$$\mathrm{P}\left\{\gamma_{r+1} - \gamma_r = 1\right\} \leqslant d_3 \cdot e^{-d_4 \cdot r} + d_5 \cdot e^{-d_6 \cdot r} \leqslant d_7 \cdot e^{-d_8 \cdot r},$$

$$\mathrm{P}\left\{\gamma_n \geqslant \delta n\right\} \leqslant \sum_{i=[\delta n]}^{n} \mathrm{P}\left\{\gamma_i - \gamma_{i-1} = 1\right\} \leqslant \sum_{i=[\delta n]}^{n} d_7 e^{-d_8 \cdot r} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{[\delta n]-1}^{+\infty} d_7 e^{-d_8 x} dx = \frac{d_7}{d_8} e^{-d_8([\delta n]-1)} \leqslant d_1 \cdot e^{-d_2 n},$$

что и составляет (IV).

При рассмотрении $k = 2$ мы сослались (см. (3.11)) на Предложение 3.3, которое совпадает с Предложением 3.4 при $k = 1$. Выполнение условия (IV) при $k = 2$ влечет утверждение Предложения 3.4 при $k = 2$, с помощью которого мы совершенно аналогично получим (IV) при $k = 3$, т.к. $p_1 > \frac{p_1+p_2}{2} > p_2 > \frac{p_2+p_3}{2} > p_3 > \dots$. Индукция по k завершает доказательство.

Только что доказанное Предложение 3.4 утверждает, что $\lambda_k^{(n)} > (p_k - \varepsilon)n$ с вероятностью, стремящейся к единице, т.е. доказана "оценка снизу" для λ_k. Следующее предложение доказывает "оценку сверху" и объединяет эти "оценки".

Предложение 3.5. *Для любого $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ существуют такие константы $c_1 = c_1(\varepsilon, k) > 0$ и $c_2 = c_2(\varepsilon, k) > 0$, что*

$$\mathrm{P}\left\{|\lambda_k^{(n)} - p_k n| \geqslant \varepsilon n\right\} \leqslant c_1 \cdot e^{-c_2 n}$$

при всех $n = 1, 2, \dots$.

Доказательство является нетрудным следствием Предложения 3.4. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, что $q^{-m} < \varepsilon/2$ и положим $k_0 = \max\{m, k\} + 1$. Положим $\delta = \varepsilon/2(k_0 - 1) < \varepsilon$. Из Предложения 3.4 следует, что существуют такие константы $d_1^1, \dots, d_{k_0}^1, d_1^2, \dots, d_{k_0}^2 > 0$, не зависящие от n, что

$$\mathrm{P}\left\{\lambda_i^{(n)} \leqslant (p_i - \delta)n\right\} \leqslant d_i^1 \cdot e^{-d_i^2 n}, \quad i = 1, 2, \dots, k_0,$$

откуда

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\,\{\lambda_i^{(n)} > (p_i-\delta)n,\ i=1,\ldots,k_0\} \geqslant \\ \geqslant 1 - \mathrm{P}\,\{\lambda_1^{(n)} \leqslant (p_1-\delta)n\} - \ldots - \mathrm{P}\,\{\lambda_{k_0}^{(n)} \leqslant (p_{k_0}-\delta)n\} \geqslant \\ \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{k_0} d_i^1 e^{-d_i^2 n} \geqslant 1 - c_1\cdot e^{-c_2\cdot n}\end{aligned}$$

Покажем теперь, что $(\lambda_i^{(n)} > (p_i-\delta)n,\ i=1,2,\ldots,k_0) \Longrightarrow (\lambda_k^{(n)} < (p_k+\delta)n)$. Действительно, из определения $\{\lambda_i^{(n)}\}$ следует, что

$$\lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n)} + \ldots + \lambda_{k_0}^{(n)} \leqslant n,$$

поэтому из $(\lambda_i^{(n)} > (p_i-\delta)n,\ i=1,2,\ldots,k_0)$ имеем

$$\lambda_k^{(n)} + \sum_{i=1,\neq k}^{k_0} (p_i-\delta)n < \lambda_1^{(n)} + \ldots + \lambda_{k_0}^{(n)} \leqslant n,$$

$$\lambda_k^{(n)} < n\left(1 - \sum_{i=1,\neq k}^{k_0} p_i + (k_0-1)\delta\right) = n(p_k + q^{-k_0} + (k_0-1)\delta) < n(p_k+\varepsilon)$$

в силу выбора k_0 и δ. Так как $\delta < \varepsilon$,

$$\mathrm{P}\,\{|\lambda_k^{(n)} - p_k n| < \varepsilon n\} \geqslant \mathrm{P}\,\{\lambda_i^{(n)} > (p_i-\delta)n,\ i=1,\ldots,k_0\} > 1 - c_1 e^{-c_2 n},$$

что и требовалось доказать.

Похожими рассуждениями из Предложения 3.5 получаем

Теорема 3.6 (теорема A). *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$, $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$, что при всех $n = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{\lambda_k^{(n)}}{n} - p_k\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant c_1\cdot e^{-c_2 n}$$

Доказательство. Выберем $m \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ так, что $q^{-m} < \varepsilon/2$ и $\delta < \varepsilon/2m < \varepsilon$. Из Предложения 3.5 следует, что существуют такие константы $d_1^1, \ldots, d_m^1, d_1^2, \ldots, d_m^2 > 0$, не зависящие от n, что

$$\mathrm{P}\,\{|\lambda_i^{(n)} - p_i n| \geqslant \delta n\} \leqslant d_i^1\cdot e^{-d_i^2 n}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

откуда

$$\mathrm{P}\left\{|\lambda_i^{(n)} - p_i n| < \delta n,\ i = 1, \dots, m\right\} > 1 - \sum_{i=1}^{m} d_i^1 e^{-d_i^2 n} \geqslant 1 - c_1 \cdot e^{-c_2 n}.$$

Покажем теперь, что

$$\left\{|\lambda_i^{(n)} - p_i n| < \delta n,\ i = 1, \dots, m\right\} \Longrightarrow \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{\lambda_k^{(n)}}{n} - p_k \right| < \varepsilon.$$

Поскольку $\delta < \varepsilon$, достаточно рассмотреть $k > m$. Так как

$$\lambda_1^{(n)} + \ldots + \lambda_m^{(n)} + \lambda_k^{(n)} \leqslant n,$$

то из $(\lambda_i^{(n)} > (p_i - \delta)n,\ i = 1, \dots, m)$ следует, что

$$\lambda_k^{(n)} + \sum_{i=1}^{m} (p_i - \delta) n < \lambda_1^{(n)} + \ldots + \lambda_m^{(n)} + \lambda_k^{(n)} \leqslant n,$$

$$\lambda_k^{(n)} < n \left(1 - \sum_{i=1}^{m} p_i + \delta m \right) = n(q^{-m} + \delta m) < \varepsilon n.$$

Кроме того, $p_k = q^{-k+1} - q^{-k} < q^{-k+1} \leqslant q^{-m} < \varepsilon/2 < \varepsilon$, то есть

$$\left(0 < p_k < \varepsilon,\ 0 < \frac{\lambda_k^{(n)}}{n} < \varepsilon \right) \Longrightarrow \left(\left| \frac{\lambda_k^{(n)}}{n} - p_k \right| < \varepsilon \right),$$

что и требовалось. Итак,

$$\mathrm{P}\left\{ \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{\lambda_k^{(n)}}{n} - p_k \right| \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \mathrm{P}\left\{|\lambda_i^{(n)} - p_i n| < \delta n,\ i = 1, \dots, m\right\} \leqslant c_1 \cdot e^{-c_2 n}.$$

Теорема доказана.

Следствие 3.7. *Для любых $k,\ m \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{E}\,(\lambda_k^{(n)})^m \sim (p_k n)^m \ \text{\textit{при}}\ n \to \infty.$$

Доказательство следует из того, что с вероятностью, экспоненциально стремящейся к единице, $\lambda_k^{(n)} \in [(p_k - \varepsilon)n, (p_k + \varepsilon)n]$ для любого $\varepsilon > 0$.

Следствие 3.8. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $c_1 = c_1(\varepsilon) > 0$, $c_2 = c_2(\varepsilon) > 0$, что при $n = 1, 2, \ldots$*

$$\mathrm{P}\{X \in \mathfrak{g}_n : \operatorname{rk} X \leqslant (1-\varepsilon)n\} \leqslant c_1 \cdot e^{-c_2 n}.$$

Доказательство. Выберем $m \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ так, что $q^{-m} < \varepsilon/4$ и $\delta < \varepsilon/4m$. Из Теоремы 3.6 следует, что существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что при всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\mathrm{P}\{\lambda_k^{(n)} > (p_k - \delta)n,\ k = 1, \ldots, m\} > 1 - c_1 e^{-c_2 n}.$$

Заметим теперь, что количество ненулевых $\lambda_k^{(n)}$ не превосходит $n - \lambda_1^{(n)} - \ldots - \lambda_m^{(n)}$ при $k > m$, поэтому с вероятностью $> 1 - c_1 e^{-c_2 n}$ количество ненулевых $\lambda_k^{(n)}$ не превосходит

$$m + n - \sum_{k=1}^{m} (p_k - \delta)n = m + n(q^{-m} + m\delta) < m + n \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon n$$

при достаточно больших n. Осталось заметить, что ранг матрицы $X \in \mathfrak{g}_n$ равен ее порядку минус количество клеток в ее жордановой форме. Следствие доказано.

§4. Доказательство теоремы B

Пусть $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots$ – последовательность независимых k-мерных одинаково распределенных случайных величин с

$$\mathrm{P}\{\xi_l^{(1)} = \delta_l^m,\ l = 1, 2, \ldots, k\} = p_m, \quad m = 1, 2, \ldots, k$$

$$\mathrm{P}\{\xi_l^{(1)} = 0,\ l = 1, 2, \ldots, k\} = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i;$$

и пусть $S^{(n)} = \xi^{(1)} + \ldots + \xi^{(n)}$ (здесь δ_l^m – символ Кронекера).

Лемма 4.1.

$$\frac{S^{(n)} - \mathrm{E}\, S^{(n)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X, \quad n \to \infty,$$

где X – это k-мерный случайный нормальный вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций

$$Q = \operatorname{diag}\{p_1, \ldots, p_k\} - (p_i p_j)_{i,j=1}^{k},$$

а знак $\xrightarrow{d}$ *означает сходимость случайных величин по распределению.*

Доказательство. Из Теоремы 7.6, [4], следует, что достаточно доказать поточечную сходимость характеристических функций рассматриваемых случайных величин. Проделаем это.

$\mathrm{E}\, S^{(n)} = (p_1 \cdot (1,0,\ldots,0)^T + \ldots + p_k \cdot (0,0,\ldots,1)^T)n = n \cdot (p_1,\ldots,p_k)^T.$

Положим $r_k = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$. Тогда

$$\mathrm{E}\, e^{i\langle t, \xi^{(1)} - \mathrm{E}\,\xi^{(1)}\rangle} = \sum_{l=1}^{k} p_l \cdot e^{i(t_l - \sum\limits_{j=1}^{k} t_j p_j)} + r_n \cdot e^{-i\sum\limits_{j=1}^{n} t_j p_j}.$$

Обозначим $u = t/\sqrt{n}$. Получаем ($\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(n)}$ независимы)

$$\mathrm{E}\, e^{i\langle t, \frac{S^{(n)} - \mathrm{E}\, S^{(n)}}{\sqrt{n}}\rangle} = \left(\mathrm{E}\, e^{i\langle t, \frac{\xi^{(1)} - \mathrm{E}\,\xi^{(1)}}{\sqrt{n}}\rangle}\right)^n = \left(\mathrm{E}\, e^{i\langle u, \xi^{(1)} - \mathrm{E}\,\xi^{(1)}\rangle}\right)^n =$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{k} p_l e^{i(u_l - \sum\limits_{j=1}^{k} p_j u_j)} + r_k e^{-i\sum\limits_{j=1}^{k} p_j u_j}\right)^n =$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{k} p_l + r_k + i\sum_{l=1}^{k} p_l \left(u_l - \sum_{j=1}^{k} p_j u_j\right) + (-i) r_k \sum_{j=1}^{k} p_j u_j - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} p_l \left(u_l - \sum_{j=1}^{k} p_j u_j\right)^2 - r_k \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{k} p_j u_j\right)^2 + O(n^{-3/2})\right)^n =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n}\left(\sum_{l=1}^{k} p_l \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j - t_l\right)^2 + r_k \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j\right)^2\right) + O(n^{-3/2})\right)^n \to$$

$$\to \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{k} p_l \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j - t_l\right)^2 + r_k \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j\right)^2\right)\right\}$$

при $n \to \infty$. Преобразуем выражение под экспонентой.

$$\sum_{l=1}^{k} p_l \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j - t_l\right)^2 + r_k \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j\right)^2 =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} p_l t_l^2 - 2\left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{k} p_l\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j\right)^2 + r_k \left(\sum_{j=1}^{k} t_j p_j\right)^2 =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} p_l t_l^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} p_j t_j\right)^2 = (t_1, \dots, t_k) \cdot Q \cdot (t_1, \dots, t_k)^T.$$

Поскольку $\mathrm{E}\, e^{i(t,X)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1 \dots t_k) Q (t_1 \dots t_k)^T\right\}$, лемма доказана.

Будем обозначать вектор $(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_k^{(n)})^T$ через $\lambda_{[k]}^{(n)}$. Наша задача состоит в том, чтобы получить утверждение Теоремы B из Леммы 4.1, показав “малое отличие” $\lambda_{[k]}^{(n)}$ от $S^{(n)}$. Ключевым моментом доказательства является следующее наблюдение. Каждая (n,λ)-частица (т.е. матрица из $\mathfrak{g}_{n,\lambda}$, см. §2) при $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k > \lambda_{k+1}$ при делении увеличивает длину l-ой строки, $l = 1, \dots, k$, соответствующей диаграммы Юнга на единицу с вероятностью p_l и оставляет первые k строк неизменными с вероятностью $r_k = 1 - \sum\limits_{j=1}^{k} p_j$, т.е. ведет себя как при прибавлении независимой k-мерной случайной величины $\xi^{(1)}$ (см. начало параграфа). Количество же (n,λ)-частиц, для которых неверно, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{k+1}$, т.е. тех, которые “плохо делятся”, мало́, поскольку из Теоремы A следует, что $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ концентрируются с большой вероятностью около $p_1 n > p_2 n > \ldots > p_{k+1} n$. Дальнейшие рассуждения являются формализацией вышесказанного.

Обозначим через $L^{(n)}$ множество матриц порядка n, для которых выполнены неравенства $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{k+1}$; $L = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L^{(n)}$. Из Теоремы A немедленно следует, что существует такая константа $c = c(k) > 0$, что

$$\mathrm{P}\{L^{(n)}\} \geqslant 1 - \frac{c}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{4.1}$$

Лемма 4.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при $l \geqslant n_0 + 1$*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^k} \left| F_{\lambda_{[k]}^{n_0} + \xi^{(n_0+1)} + \ldots + \xi^{(l)}}(x) - F_{\lambda_{[k]}^{(l)}}(x) \right| \leqslant \delta/2$$

(Мы считаем, что случайные величины $\lambda_{[k]}^{(n_0)}$, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}, \ldots$ определены на одном вероятностном пространстве и независимы.)

Доказательство. Выберем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, что

$$c \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\delta}{2}. \tag{4.2}$$

Для доказательства леммы мы построим две последовательности $\{\alpha_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ случайных величин, определенных на общем вероятностном пространстве – полуинтервале $[0,1)$ с мерой Лебега в качестве вероятности, – принимающих целые неотрицательные значения и обладающих следующими свойствами.

(1) $F_{\alpha_n} \equiv F_{\lambda_{[k]}^{(n)}}$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$

(2) $F_{\beta_n} \equiv F_{\lambda_{[k]}^{(n_0)} + \xi^{(n_0+1)} + \ldots + \xi^{(n)}}$, $F_{\beta_{n_0}} \equiv F_{\lambda_{[k]}^{(n_0)}}$, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$

(3) $\mathrm{P}\left\{\alpha_n \neq \beta_n\right\} \leqslant c \cdot \sum\limits_{m=n_0}^{n-1} \frac{1}{m^2} < \frac{\delta}{2}$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$

Из существования таких последовательностей сразу следует утверждение леммы, поскольку

$$\left| \left(F_{\lambda_{[k]}^{(n_0)} + \xi^{(n_0+1)} + \ldots + \xi^{(n)}} = F_{\beta_n} \right) - \left(F_{\alpha_n} = F_{\lambda_{[k]}^{n}} \right) \right| > a \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathrm{P}\left\{\alpha_n \neq \beta_n\right\} > a.$$

Дополнительно будем требовать выполнения условия

(4) при каждом $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ существует разбиение отрезка $[0,1]$ $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$ такое, что α_n и β_n постоянны на каждом полуинтервале $[a_i, a_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Опишем идею построения. Последовательности строятся индукцией по n. При $n = n_0$ определяем α_{n_0} и β_{n_0} так что $F_{\alpha_{n_0}} \equiv F_{\beta_{n_0}} \equiv F_{\lambda_{[k]}^{(n_0)}}$. При переходе от n к $n+1$ действуем следующим образом. Та часть вероятностного пространства, на которой $\alpha_n = \beta_n$, делится на две части, одна из которых соответствует матрицам из $L^{(n)}$, а вторая – дополнению $L^{(n)}$. Для матриц, соответствующих первой из этих частей, деление, с вероятностной точки зрения, совпадает с прибавлением независимой случайной величины $\xi^{(n+1)}$, поэтому на этой части $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$. На остатке вероятностного пространства мы определяем α_{n+1} и β_{n+1} так, чтобы выполнялись условия (1) и (2). При этом вероятность того, что $\alpha_{n+1} \neq \beta_{n+1}$, превосходит вероятность того, что $\alpha_n \neq \beta_n$, не более чем на $1 - \mathrm{P}(L^{(n)}) \leqslant c/n^2$, т.е. $\mathrm{P}\{\alpha_{n+1} \neq \beta_{n+1}\} \leqslant \mathrm{P}\{\alpha_n \neq \beta_n\} + c/n^2$, что и требуется.

Ниже мы формально проведем построение $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ при $k = 1$. При $k > 1$ построения аналогичны.

Далее $k = 1$, $\lambda_{[1]}^{(n)} = \lambda_1^{(n)}$. При $n = n_0$ разобьем [0,1) на $n_0 + 1$ частей точками $0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_{n_0+1} = 1$ так, что $(b_{i+1} - b_i) = \mathrm{P}\{\lambda_1^{(n_0)} = i\}$, $i = 0, 1, \ldots, n_0$, и положим

$$\alpha_{n_0}(x) = \beta_{n_0}(x) = i \quad \text{при} \quad x \in [b_i, b_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, n_0.$$

Выполнение (1)–(4) очевидно. Предположим, что последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ построены при $n = n_0, \ldots, r$, причем условия (1)–(4) при этих n выполнены. Построим α_{r+1} и β_{r+1}. Пусть $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$ – разбиение из условия (4) при $n = r$. Обозначим через A_s^r множество полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$, на которых $\alpha_r = s$, а через μA_s^r сумму длин полуинтервалов из A_s^r. Обозначим также через

$$a_s^r = \mathrm{P}\{\lambda_1^{(r)} = \lambda_2^{(r)} = s\}.$$

Пусть $[a, b) \in A_s^r$. Из условия (1) при $n = r$ следует, что $\mu A_s^r = \mathrm{P}\{\lambda_1^{(r)} = s\}$, поэтому $\mu A_s^r \geqslant a_s^r$. Положим

$$\theta = \frac{\mathrm{P}\{\chi \in \mathfrak{g}_{n+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda}; \Lambda_1 = s+1, \lambda_1 = \lambda_2 = s\}}{\mathrm{P}\{\chi \in \mathfrak{g}_{n+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{n,\lambda}^{\Lambda}; \Lambda_1 = s, \lambda_1 = \lambda_2 = s\}}$$

$$d_1 = a + \left(1 - \frac{a_s^r}{\mu A_s^r}\right)(b - a), \qquad d_2 = a + p_1(d_1 - a),$$
$$d_3 = d_1 + \frac{\theta}{1+\theta}(b - d_1), \qquad d_4 = d_1 + p_1(b - d_1),$$

так что $a < d_2 < d_1 < d_3$, $d_4 < b$ и

$$\frac{b - d_1}{b - a} = \frac{a_s^r}{\mu A_s^r}, \qquad \frac{d_2 - a}{d_1 - a} = p_1, \qquad \frac{d_3 - d_1}{b - d_3} = \theta, \qquad \frac{d_4 - d_1}{b - d_1} = p_1$$

и

$$\alpha_{r+1}(x) = \begin{cases} \alpha_r(x) + 1 = s + 1, & x \in [a, d_2) \cup [d_1, d_3) \\ \alpha_r(x) = s, & x \in [d_2, d_1) \cup [d_3, b) \end{cases}$$

$$\beta_{r+1}(x) = \begin{cases} \beta_r(x) + 1, & x \in [a, d_2) \cup [d_1, d_4) \\ \beta_r(x), & x \in [d_2, d_1) \cup [d_4, b). \end{cases}$$

Действуя таким образом при всех $[a, b) \in A_s^r$ и $s \in \mathbb{Z}_+$, мы зададим α_{r+1} и β_{r+1} на всем полуинтервале [0,1). Покажем выполнение условий (1)–(4) при $n = r + 1$.

(1) Рассмотрим множество $\{\chi \in \mathfrak{g}_{r+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{r,\lambda}^{\Lambda}; \lambda_1 = s\}$, его вероятность из свойства (1) при $n = r$ равна μA_s^r. Разобьем это множество на 4 части.

$$B_1 = \{\chi \in \mathfrak{g}_{r+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{r,\lambda}^{\Lambda}; \Lambda_1 = \lambda_1 = S,\ \lambda_2 < \lambda_1\}$$

$$B_2 = \{\chi \in \mathfrak{g}_{r+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{r,\lambda}^{\Lambda}; \Lambda_1 - 1 = \lambda_1 = S,\ \lambda_2 < \lambda_1\}$$

$$B_3 = \{\chi \in \mathfrak{g}_{r+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{r\lambda}^{\Lambda}; \Lambda_1 = \lambda_1 = S,\ \lambda_2 = \lambda_1\}$$

$$B_4 = \{\chi \in \mathfrak{g}_{r+1} : \chi \in \mathfrak{g}_{r,\lambda}^{\Lambda}; \Lambda_1 - 1 = \lambda_1 = S,\ \lambda_2 = \lambda_1\}$$

Из теоремы деления следует, что при $\lambda_2 < \lambda_1$

$$\mathrm{P}\,(B_2) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_r, \lambda_1 = S \\ \lambda_2 < \lambda_1}} \mathrm{P}\,(\tilde{\Lambda}|\lambda)\mathrm{P}\,(\lambda) = p_1 \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_r, \lambda_1 = s \\ \lambda_2 < \lambda_1}} \mathrm{P}\,(\lambda) = p_1(\mu A_s^r - a_s^r),$$

где $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}_{r+1}$, $\tilde{\Lambda} \supset \lambda$, $\tilde{\Lambda}_1 = \lambda_1 + 1 = s + 1$. Далее,

$$\mathrm{P}\,(B_1) = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}_r \\ \lambda_2 < \lambda_1 = S}} \mathrm{P}\,(\lambda) - \mathrm{P}\,(B_2) = (1 - p_1)(\mu A_s^r - a_s^r).$$

Отсюда

$$\mathrm{P}\,(B_2) = p_1(\mu A_s^r - a_s^r) = \sum_{[a,b) \in A_s^r} (d_2 - a)$$

$$\mathrm{P}\,(B_1) = (1 - p_1)(\mu A_s^r - a_s^r) = \sum_{[a,b) \in A_s^r} (d_1 - d_2).$$

Поскольку $\mathrm{P}\,(B_3 \cup B_4) = \mathrm{P}\,(B_3) + \mathrm{P}\,(B_4) = a_s^r$ и $\mathrm{P}\,(B_4)/\mathrm{P}\,(B_3) = \theta$,

$$\mathrm{P}\,(B_4) = \frac{\theta}{1 + \theta}\, a_s^r = \sum_{[a,b) \in A_s^r} (d_3 - d_1)$$

$$\mathrm{P}\,(B_3) = \frac{1}{1 + \theta}\, a_s^r = \sum_{[a,b) \in A_s^r} (b - d_3).$$

Но тогда

$$F_{\lambda_1^{(r)}}(s) - F_{\lambda_1^{(r+1)}}(s) = \mathrm{P}\,(B_2) + \mathrm{P}\,(B_4) = \sum_{[a,b)\in A_s^r} ((d_2 - a) + (d_3 - d_1)) =$$
$$= F_{\alpha_r}(s) - F_{\alpha_{r+1}}(s),$$

что вместе с (1) при $n = r$ дает, в силу произвольности $s \in \mathbb{Z}_+$, выполнение условия (1) при $n = r + 1$.

(2) Из определения β_{r+1} следует, что при $x \in \mathbb{Z}_+$

$$F_{\beta_{r+1}}(x) = F_{\beta_r}(x) - p_k(F_{\beta_r}(x) - F_{\beta_r}(x-1)).$$

Но

$$F_{\lambda_1^{(n_0)}+\xi^{(n_0+1)}+\ldots+\xi^{(r+1)}}(x) = F_{\lambda_1^{(n_0)}+\xi^{(n_0+1)}+\ldots+\xi^{(r)}}(x) -$$
$$- \mathrm{P}\,\{\lambda_1^{(n_0)} + \xi^{(n_0+1)} + \ldots + \xi^{(r)} = x; \xi^{(r+1)} = 1\} =$$
$$= F_{\beta_r}(x) - p_1(F_{\beta_r}(x) - F_{\beta_r}(x-1))$$

из независимости $\lambda_1^{(n_0)}, \xi^{(n_0+1)}, \ldots, \xi^{(r+1)}$ и условия (2) при $n = r$. Сравнивая полученные равенства, получаем условие (2) для $n = r + 1$.

(3) Так как из определений α_{r+1}, β_{r+1} следует, что при $x \notin [d_1, b)$

$$(\alpha_{r+1}(x) = \alpha_r(x) + 1) \Longleftrightarrow (\beta_{r+1}(x) = \beta_r(x) + 1),$$

то получаем

$$\mathrm{P}\,\{\alpha_{r+1} \neq \beta_{r+1}\} \leqslant \mathrm{P}\,\{\alpha_r \neq \beta_r\} + \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \sum_{[a,b)\in A_s^r} (b - d_1) \leqslant$$
$$\leqslant c \cdot \sum_{m=n_0}^{r-1} \frac{1}{m^2} + \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} a_s^r = c \cdot \sum_{m=n_0}^{r-1} \frac{1}{m^2} + (1 - \mathrm{P}\,\{\lambda_2^{(r)} < \lambda_1^{(r)}\}) \leqslant$$
$$\leqslant c \cdot \sum_{m=n_0}^{r} \frac{1}{m^2}$$

из условия (3) при $n = r$ и неравенства (4.1). Условие (3) для $n = r + 1$ проверено.

(4) Нужное разбиение при $n = r + 1$ доставляет измельчение разбиения при $n = r$ всеми точками d_1, d_2, d_3, d_4, участвующими в построении α_{r+1} и β_{r+1}.

Таким образом, условия (1)–(4) проверены при $n = r + 1$, мы завершили шаг индукции и доказательство Леммы 4.2.

Теорема 4.3 (теорема B). *Пусть* $p_{[k]} = (p_1, \dots, p_k)^T$. *Тогда*

$$\frac{\lambda^{(n)}_{[k]} - n \cdot p_{[k]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} X, \quad n \to \infty$$

где X *– это* k*-мерный нормальный случайный вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций* Q,

$$Q = \operatorname{diag}\{p_1, \dots, p_k\} - (p_i p_j)^k_{i,j=1}.$$

Доказательство. Обозначим через $\Phi(x) = \mathrm{P}\{X_l \leqslant x_l,\ l = 1, \dots, k\}$ функцию распределения случайной величины X. Введем норму на пространстве $\mathbb{R}^k : \|x\| = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant k} |x_l|$. Выберем $L_1 \in \mathbb{N}$ так, что (фиксируем $\varepsilon > 0$)

$$\frac{2n_0}{\sqrt{L_1}} < \varepsilon,$$

где n_0 выбиралось из неравенства (4.2). Тогда, поскольку $\|\lambda^{(n_0)}_{[k]}\| \leqslant n_0$, при $l \geqslant \max(L_1, n_0)$ имеем

$$\left\| \frac{(\xi^{(1)} + \ldots + \xi^{(l)}) - p_{[k]} l}{\sqrt{l}} - \frac{(\lambda^{(n_0)}_{[k]} + \xi^{(n_0+1)} + \ldots + \xi^{(l)}) - p_{[k]} l}{\sqrt{l}} \right\| < \varepsilon,$$

откуда ($S^{(l)} = \xi^{(1)} + \ldots + \xi^{(l)}$)

$$F_{\frac{S^{(l)} - p_{[k]} l}{\sqrt{l}}}(x - \vec{\varepsilon}) \leqslant F_{\frac{(\lambda^{(n_0)}_{[k]} + \xi^{(n_0+1)} + \ldots + \xi^{(l)}) - p_{[k]} l}{\sqrt{l}}}(x) \leqslant F_{\frac{S^{(l)} - p_{[k]} l}{\sqrt{l}}}(x + \vec{\varepsilon}),$$

где $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot (1, 1, \dots, 1)^T$. Из Леммы 4.1 следует, что существует $L_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при $l \geqslant L_2$ ($x \in \mathbb{R}^k$ фиксирован)

$$\max\left(\left| F_{\frac{S^{(l)} - p_{[k]} l}{\sqrt{l}}}(x - \vec{\varepsilon}) - \Phi(x - \vec{\varepsilon}) \right|, \left| F_{\frac{S^{(l)} - p_{[k]} l}{\sqrt{l}}}(x + \vec{\varepsilon}) - \Phi(x + \vec{\varepsilon}) \right| \right) < \frac{\delta}{4},$$

поэтому при $l \geqslant \max(n_0, L_1, L_2)$ получаем

$$\Phi(x - \vec{\varepsilon}) - \frac{\delta}{4} \leqslant F_{\frac{(\lambda^{(n_0)}_{[k]} + \xi^{(n_0+1)} + \ldots + \xi^{(l)}) - p_{[k]} l}{\sqrt{l}}}(x) \leqslant \Phi(x + \vec{\varepsilon}) + \frac{\delta}{4}.$$

Из леммы 4.2 следует, что при $l \geqslant \max(n_0, L_1, L_2)$

$$\Phi(x - \vec{\varepsilon}) - \delta \leqslant F_{\frac{\lambda^l_{[k]} - p_{[k]} l}{\sqrt{l}}}(x) \leqslant \Phi(x + \vec{\varepsilon}) + \delta.$$

В силу произвольности $\varepsilon, \delta > 0$ и непрерывности $\Phi(x)$ мы получаем поточечную сходимость функций распределения последовательностей $\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\lambda^l_{[k]} - p_{[k]} l\right)$ к непрерывной функции распределения вектора X, откуда следует (см. [4]) утверждение теоремы B.

Литература

1. A. A. Kirillov, *Variations on the triangular theme. Dynkin Seminar on Lie Groups.* — Adv. Math. Sci., Am. Math. Soc. (1995).
2. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **15**, № 4 (1981), 15–27.
3. А. Н. Ширяев, *Вероятность.* М, Наука, 1989.
4. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* М, Наука, 1977.

Borodin A. M. Law of large numbers and central limit theorem for Jordan normal form of large triangular matrices over a finite field.

We prove that for a typical stricly uppertriangular matrix of order n over a finite field with q elements the sequence of orders of Jordan blocks, divided by n, converges to the geometric progression $\{(q-1)q^{-k}, k = 1, 2 \ldots\}$, $n \to \infty$. We also show that the distribution of orders for a finite number of Jordan blocks is asymptotically normal. The corresponding covariance matrix is calculated.

Московский
Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 15 октября 1996 г.