Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

А. М. Бородин

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МЕРЫ НА ГРАФЕ ШУРА

1. Введение

Центральные меры на графах, которые являются графами ветвления для семейства конечномерных полупростых алгебр

$$\mathbb{C} \simeq A_0 \hookrightarrow A_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow A_n \hookrightarrow \ldots,$$

находятся во взаимно-однозначном соответствии с характерами локально-полупростой алгебры $A_\infty = \varinjlim A_n$ (см. [2]). В работе [1] мультипликативные центральные меры на графе Юнга, для которого A_n есть групповая алгебра симметрической группы S_n, рассматривалась как характеры обобщенных регулярных представлений группы S_∞.

Граф Шура сдвинутых диаграмм является графом ветвления для истинно-проективных представлений симметрических групп (см. [5]). В этой работе мы находим все мультипликативные центральные меры на этом графе. В работе [3] с помощью аналогичной техники получена классификация всех мультипликативных центральных мер на графе Юнга.

Автор искренне благодарит Г. И. Ольшанского за постановку задачи, постоянное внимание и полезные обсуждения.

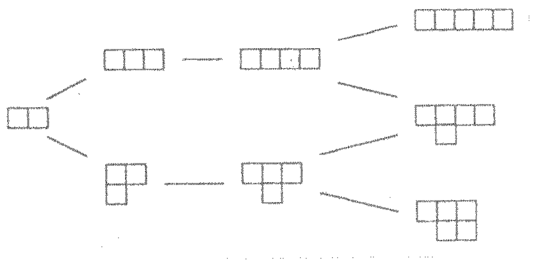
2. Граф Шура. Планшерелевское распределение

Графом сдвинутых диаграмм $\mathbb{S}$ называется $\mathbb{Z}_+$-градуированный граф $\mathbb{S} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}_n$, вершины n-го этажа которого параметризуются строгими разбиениями числа n на натуральные слагаемые

$$\mathbb{S}_n \simeq SP(n) = \big\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) : \lambda_i \in \mathbb{N}, \sum \lambda_i = n,\ \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k\big\}.$$

Сдвинутая диаграмма формы $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ состоит из k строк, в l-ой строке находится λ_l клеток, первая клетка $(l+1)$-ой строки

При поддержке Международной Соровской Программы Образования.



находится под второй клеткой l-ой строки. Две вершины графа соединяются ребром, если соответствующие диаграммы отличаются удалением одной клетки.

Если вершины λ и Λ соединены ребром, причем λ меньше (по числу клеток), чем Λ, мы будем писать $\lambda \nearrow \Lambda$ или $\Lambda \searrow \lambda$. Путями мы будем называть последовательности $\varnothing = \lambda^{(0)} \nearrow \lambda^{(1)} \nearrow \lambda^{(2)} \nearrow \dots$.

Определение 2.1. *Центральной мерой или распределением на $\mathbb{S}$ называется вероятностная мера на пространстве путей графа $\mathbb{S}$, удовлетворяющая следующему условию. Для любой цепочки $\varnothing = \lambda^{(0)} \nearrow \lambda^{(1)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n)} = \lambda$ мера всех путей, первые $(n+1)$ вершин которых суть $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n)} = \lambda$, зависит только от λ и не зависит от $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n-1)}$.*

Значением распределения в точке λ (обозначение $M(\lambda)$) мы будем называть меру множества всех путей, проходящих через λ.

Назовем распределение невырожденным, если $M(\lambda) \neq 0$ для любого разбиения λ. В дальнейшем мы рассматриваем только невырожденные распределения.

Определение 2.2. *Переходными вероятностями для центральной меры на $\mathbb{S}$ называется набор чисел*

$$p(\lambda, \Lambda) = \mathrm{Prob}\{\lambda^{(n+1)} = \Lambda | \lambda^{(n)} = \lambda\} = \frac{\mu\{\lambda^{(n+1)} = \Lambda,\, \lambda^{(n)} = \lambda\}}{\mu\{\lambda^{(n)} = \lambda\}},$$

т.е. $p(\lambda, \Lambda)$ – это условная вероятность попасть в Λ при условии попадания в λ, $\lambda \nearrow \Lambda$.

Обозначим через g^λ число путей, соединяющих $\varnothing$ и λ. Ввиду свойства центральности, переходные вероятности можно вычислить через $M(\lambda)$, g^λ, $M(\Lambda)$, g^Λ.

$$p(\lambda,\Lambda)=\frac{\mu\{\lambda^{(n+1)}=\Lambda,\ \lambda^{(n)}=\lambda\}}{\mu\{\lambda^{(n)}=\lambda\}}=\frac{g^\lambda\cdot\frac{M(\Lambda)}{g^\Lambda}}{M(\lambda)}=\frac{M(\Lambda)\cdot g^\lambda}{M(\lambda)\cdot g^\Lambda}. \tag{2.1}$$

Отсюда видно, что при $\varnothing=\lambda^{(0)}\nearrow\lambda^{(1)}\nearrow\ldots\nearrow\lambda^{(n)}=\lambda$

$$M(\lambda)=g^\lambda\cdot p(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)})p(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\ldots p(\lambda^{(n-1)},\lambda^{(n)}), \tag{2.2}$$

и произведение в правой части не зависит от $\lambda^{(0)},\ldots,\lambda^{(n-1)}$. Кроме того, из определения переходных вероятностей следует, что

$$\sum_{\Lambda:\Lambda\searrow\lambda}p(\lambda,\Lambda)=1. \tag{2.3}$$

Согласно (2.2), распределение однозначно определяется своими переходными вероятностями. Более того, если задан набор чисел $\{p(\lambda,\Lambda)>0\}$, удовлетворяющий условию (2.3), то мы можем построить меру на путях $\mathbb{S}$, задавая ее на цилиндрических множествах. Полагаем меру множества путей, первые n вершин которых суть $\varnothing=\lambda^{(0)}\nearrow\lambda^{(1)}\nearrow\ldots\nearrow\lambda^{(n-1)}$, равной $p(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)})\cdot\ldots\cdot p(\lambda^{(n-2)},\lambda^{(n-1)})$. Равенство (2.3) обеспечивает корректность этого определения. Если, кроме того, при $\varnothing=\lambda^{(0)}\nearrow\ldots\nearrow\lambda^{(n)}=\lambda$ произведение $p(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)})\cdot\ldots\cdot p(\lambda^{(n-1)},\lambda)$ не зависит от $\lambda^{(0)},\ldots,\lambda^{(n-1)}$, то полученная мера будет центральной. Ее значения будут задаваться формулой (2.2), и переходные вероятности совпадут с исходным набором $\{p(\lambda,\Lambda)\}$. Таким образом, мы установили взаимно-однозначное соответствие невырожденных центральных мер и наборов $\{p(\lambda,\Lambda)>0,\ \lambda\nearrow\Lambda\}$, удовлетворяющих условию (2.3) и условию независимости произведения $p(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)})\cdot\ldots\cdot p(\lambda^{(n-1)},\lambda)$ от $\lambda^{(0)},\ldots,\lambda^{(n-1)}$. Последнее условие будем в дальнейшем обозначать через (C).

Определение 2.3. *Планшерелевским распределением на $\mathbb{S}$ называется распределение со значениями ($l(\lambda)$-длина-количество ненулевых частей – разбиения λ)*

$$M(\lambda)=\frac{1}{n!}2^{n-l(\lambda)}\cdot\left(g^\lambda\right)^2,\ \lambda\in\mathbb{S}_n.$$

Переходные вероятности планшерелевского распределения имеют вид (см. (2.1))

$$p(\lambda,\Lambda)=\frac{g^\Lambda}{g^\lambda(n+1)}2^{\delta(l(\lambda)-l(\Lambda))},\ \ \lambda\in\mathbb{S}_n,\ \Lambda\searrow\lambda, \tag{2.4}$$

где $\delta(\cdot)$ – символ Кронекера.

Замечание 2.4. Доказательство того, что выписанные формулы задают центральную меру (т.е. равенства (2.3); условие (C), очевидно, выполнено) будет проведено позднее (см. Теорему 3.2 при $x = \infty$).

3. Мультипликативные распределения. Существование

Определение 3.1. *Невырожденное распределение на графе $\mathbb{S}$ мы будем называть мультипликативным, если существуют такие функции $f : \{(i,j) \in \{1,2,\ldots\}^2 | i \leqslant j\} \to \mathbb{C}$ и $g : \{0,1,2,\ldots\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$, что переходные вероятности этого распределения имеют вид*

$$p(\lambda, \Lambda) = \frac{f(i,j)}{g(n)} \cdot p_\infty(\lambda, \Lambda), \ \lambda \nearrow \Lambda, \ \lambda \in \mathbb{S}_n. \tag{3.1}$$

Здесь (i,j) – номера строки и столбца клетки $\Lambda \setminus \lambda$ (i возрастает сверху вниз, j – слева направо), $p_\infty(\lambda, \Lambda)$ – переходные вероятности планшерелевского распределения (см. (2.4)).

Если в Определении 3.1 обойтись только функцией $f(i,j)$ (т.е. считать $g \equiv 1$), то единственным таким распределением будет планшерелевское при $f \equiv 1$; это указано в [6].

Теорема 3.2. *Для всякого $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ формулы*

$$f_x(i,j) = (j-i)(j-i+1) + x, \ g_x(n) = 2n + x \tag{3.2}$$

задают мультипликативное распределение.

Замечание 3.3. При $x = \infty$ функции f_x и g_x формально не определены, однако, их отношение равно 1, что доставляет планшерелевское распределение. Этим объясняется значок ∞ в переходных планшерелевских вероятностях.

Лемма 3.4. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, и $\lambda_i + \lambda_j + 1 \neq 0$ при $i \neq j$.*

1) *(см. [4, глава 3, пример 8 к §7])*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \prod_{k \neq i} \frac{(\lambda_i - \lambda_k + 1)(\lambda_i + \lambda_k)}{(\lambda_i + \lambda_k + 1)(\lambda_i - \lambda_k)} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i. \tag{3.3}$$

2) *Пусть, кроме того,* $\lambda_i + 1 \neq 0$, $i = 1, \dots, r$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{2}{\lambda_i + 1} \cdot \prod_{k \neq i} \frac{(\lambda_i - \lambda_k + 1)(\lambda_i + \lambda_k)}{(\lambda_i + \lambda_k + 1)(\lambda_i - \lambda_k)} + \prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i + 1} = 1. \tag{3.4}$$

Доказательство. 1) Требуемое равенство следует из подсчета вычета рациональной функции

$$f_1(z) = (2z-1) \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{(z+\lambda_i - 1)(z - \lambda_i)}{(z - \lambda_i - 1)(z + \lambda_i)}$$

в точке $z = \infty$ двумя разными способами: разложение $f_1(z)$ на простейшие дроби и разложение $f_1(z)$ в ряд Лорана в точке $z = \infty$.

2) Аналогично пункту 1) для функции

$$f_2(z) = \frac{2z-1}{z(z-1)} \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{(z+\lambda_i - 1)(z - \lambda_i)}{(z - \lambda_i - 1)(z + \lambda_i)}.$$

Доказательство теоремы 3.2. Согласно предыдущему параграфу, необходимо проверить равенство (2.3) и условие (C). Но условие (C), очевидно, выполнено, поскольку из (3.1)

$$p(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}) \dots p(\lambda^{(n-1)}, \lambda) =$$

$$\prod_{\square=(i,j)\in\lambda} f(i,j) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{g(k)} \cdot p_\infty(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}) \dots p_\infty(\lambda^{(n-1)}, \lambda)$$

не зависит от $\lambda^{(0)}, \dots, \lambda^{(n-1)}$ ввиду выполнения условия (C) для меры Планшереля. Остается доказать (2.3). Воспользуемся формулой (см. [4, там же]), $\lambda \in \mathbb{S}_n$, $\lambda = (\lambda_1 > \dots > \lambda_r)$,

$$g^\lambda = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_r!} \cdot \prod_{i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}. \tag{3.5}$$

Заметим, что правая часть равна нулю, если разбиение λ не строгое (т.е. найдутся $i \neq j : \lambda_i = \lambda_j$). Имеем

$$\sum_{\Lambda \searrow \lambda} p_x(\lambda, \Lambda) = \sum_{\Lambda \searrow \lambda} \frac{f(\Lambda \setminus \lambda)}{g(n)} \cdot p_\infty(\lambda, \Lambda) =$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{g^{\Lambda(k)}}{g^\lambda (n+1)} \cdot 2 \frac{\lambda_k(\lambda_k + 1) + x}{2n + x} + \frac{g^{\tilde{\Lambda}}}{g^\lambda (n+1)} \cdot \frac{x}{2n+x},$$

где $\Lambda(k) \searrow \lambda$, $\Lambda_k(k) = \lambda_k + 1$ в k-м слагаемом суммы, и $\tilde{\Lambda} = (\lambda, 1)$. Требуемое равенство имеет вид

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{g^{\Lambda(k)}}{g^{\lambda}(n+1)} \cdot 2(\lambda_k(\lambda_k+1)+x) + \frac{g^{\tilde{\Lambda}}}{g^{\lambda}(n+1)} \cdot x = 2n + x. \qquad (3.6)$$

Сравнивая в равенстве (3.6) коэффициенты при иксе и свободные члены, пользуясь формулой (3.5), мы получим равенства (3.4) и (3.3). Теорема доказана.

4. Мультипликативные распределения. Единственность

Мы покажем, что никаких других, кроме описанных в параграфе 3, мультипликативных распределений на графе $\mathbb{S}$ не бывает.

Лемма 4.1. *Пусть заданы функции* $F : \{(i,j) \in \{1,2,\dots\}^2 | i \leqslant j\} \to \mathbb{C}$ *и* $g : \{0,1,2,\dots\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *такие, что выполнено равенство (2.3), где* $p(\lambda, \Lambda)$ *определяются из (3.1), при любых* $\lambda \nearrow \Lambda$. *Тогда набор* $\{p(\lambda,\Lambda), \lambda \nearrow \Lambda\}$ *однозначно определяется значениями* $f(i,j)$ *и* $g(n)$ *при*

$$(i,j) = (1,3), (2,2), (1,4), (2,3); \quad n = 2,3,4.$$

Доказательство. Заметим, что значения $f(1,1)$, $f(1,2)$, $g(0)$, $g(1)$ не влияют на значения $p(\lambda, \Lambda)$, поскольку они участвуют лишь в вычислении $p(\varnothing, \square)$ и $p(\square, \square\square)$, которые равны единице (см. (2.3)). Далее мы покажем, что еще не упомянутые значения $f(i,j)$ и $g(n)$ (нас интересуют пары (i,j) при $j \geqslant i$, поскольку только они отвечают клеткам диаграммам) могут быть получены из заданных. Значение $f(5,1)$ получим из (2.3) при $\lambda = (4)$:

$$p_1 \cdot f(5,1) + p_2 \cdot f(2,2) = g(4),$$

где $p_1 = p_\infty((4),(5)) > 0$, $p_2 = p_\infty((4),(4,1))$ – планшерелевские переходные вероятности.

Далее будем рассуждать индукцией по этажам. Предположим, мы уже определили значения $f(i,j)$ для клеток, которые встречаются в диаграммах на этажах $\mathbb{S}_1, \dots, \mathbb{S}_n$, и для $g(k)$ при $k = 2,3,\dots,n-1$. База индукции, $n = 5$, обоснована выше. Воспользуемся (2.3) при $\lambda = (n-1,1)$. Получим

$$p_1 \cdot f(1,n) + p_2 \cdot f(2,3) = g(n),$$

где $p_1, p_2 > 0$ – соответствующие планшерелевские переходные вероятности. По предположению индукции, $f(1,n)$ и $f(2,3)$ нам известны (клетка $(1,n)$ встречается в диаграмме $(n) \in \mathbb{S}_n$, а $f(2,3)$ дано по условию). Таким образом, нам известно и $g(n)$. Далее, рассмотрим какую-нибудь клетку (i,j), впервые появляющуюся на $(n+1)$-м этаже. Соответствующее разбиение $\Lambda \in \mathbb{S}_n$ обязательно имеет вид

$$\Lambda = (j, j-1, \dots, j-i+1); \quad (2j-i+1)i = 2(n+1).$$

Возможны 3 случая: $j = i$, $, j > i \geqslant 2$, и $j > i = 1$.

Предположим, что $j = i$. Тогда $i(i+1) = 2(n+1)$, и $i \geqslant 3$, поскольку $n \geqslant 5$ по предположению индукции. Запишем условие (2.3) для диаграммы $\lambda = \Lambda \setminus \{(i,j)\} \in \mathbb{S}_n$.

$$p_1 f(1, i+1) + p_2 f(i,i) = g(n)$$

Так как $i+1 \leqslant n$, то значение $f(1,i+1)$ нам известно. Поскольку $g(n)$ также известно, отсюда мы получаем $f(i,i)$.

Предположим, что $1 \leqslant i < j$. Условие (2.3) для $\lambda = \Lambda \setminus \{(i,j)\}$ имеет вид

$$p_1 f(1, j+1) + p_2 f(i,j) + p_3 f(i+1, i+1) = g(n)$$

Клетки $(1, j+1)$ и $(i+1, i+1)$ появляются в диаграммах с не более, чем n клетками, поэтому $f(1, j+1)$ и $f(i+1, i+1)$ нам известны. Отсюда получаем $f(i,j)$.

Наконец, если $1 = i < j$, то соотношение (2.3) дает

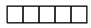
$$p_1 f(1,j) + p_2 f(2,2) = g(n)$$

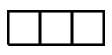
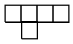
Так как $f(2,2)$ известно по условию, отсюда находим $f(1,j)$. Лемма доказана.

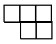
Замечание 4.2 Набор $\{p_x(\lambda, \Lambda)\}$, полученный из функций f_x и g_x (см. (3.2)), будет удовлетворять равенству (2.3) при произвольном $x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Доказательство этого факта совпадает с доказательством теоремы 3.2. Однако, условие $p_x(\lambda, \Lambda) > 0$ при любых $\lambda \nearrow \Lambda$ равносильно условию $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Для доказательства достаточно рассмотреть $p_x(\lambda, \Lambda)$ при $\lambda = (m > m-1 > \ldots > 2)$, $\Lambda = (m > m-1 > \ldots > 2 > 1)$, $m = 2, 3, \ldots$.

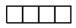
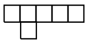
Теорема 4.3. *Для всякого невырожденного мультипликативного распределения на графе $\mathbb{S}$ найдется $x \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ такой, что переходные вероятности этого распределения совпадают с переходными вероятностями $p_x(\lambda, \Lambda)$ (см.* (3.2), (3.1)*).*

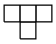
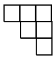
Доказательство. Пусть исходное распределение задается некоторыми функциями f и g. Запишем соотношение (2.3) для некоторых диаграмм.

 $2f(1,3) + f(2,2) = 3g(2)$  $f(1,6) + 2f(2,2) = 3g(5)$

 $f(1,4)+f(2,2) = 2g(3)$  $4f(1,5) + 5f(2,3) = 9g(5)$

 $f(1,3) = g(3)$  $5f(1,4) + f(3,3) = 6g(5)$

 $2f(1,5) + 3f(2,2) = 5g(4)$  $5f(1,6) + 9f(2,3) = 14g(6)$

 $3f(1,4) + 2f(2,3) = 5g(4)$  $f(1,4) = g(6)$

Выписанные соотношения можно рассматривать как однородную систему из 10-ти уравнений с 12-ю неизвестными. Общее решение этой системы задается двумя свободными параметрами, за которые удобно принять $g(2)$ и $g(3)$. (Чтобы в этом убедиться, можно действовать так. Из первых трех и последнего уравнений выразим $f(1,3)$, $,f(2,2)$, $,f(1,4)$ и $g(6)$ через $g(2)$ и $g(3)$. После этого остаются 6 уравнений с 6-ю неизвестными, и нетрудно проверить, что соответствующая матрица невырождена.) Если $g(2) = g(3)$, то, несложно показать, все участвующие в системе величины равны между собой. Набор $f \equiv g \equiv \mathrm{const}$ удовлетворяет (2.3), поэтому из леммы 4.1 следует, что $f \equiv g \equiv \mathrm{const}$, и исходное распределение является планшерелевским, т.е. соответствует $x = \infty$. Пусть $g(2) \neq g(3)$. Тогда можно считать, что $g(3) - g(2) = 2$, поскольку домножение функций f и g на ненулевую константу (равную $\frac{2}{g(3)-g(2)}$) не меняет переходных вероятностей. Положим $x = 2g(3) - g(2) - 8$. С помощью выписанной системы несложно проверить, что участвующие в лемме 4.1 значения $f(i,j)$ и $g(n)$ вычисляются по формулам (3.2). Но тогда из замечания 4.2 и леммы 4.1 следует утверждение теоремы.

Литература

1. S. Kerov, G. Olshanskii, and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation.* — C.R.Acad. Sci. Paris **316** Série I (1993), 773–778.
2. A. M. Vershik and S. V. Kerov, *The Grothendieck group of infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of K_0-functor of AF-algebras).* Representation of Lie groups and Related Topics (A. M. Vershik and D. P. Zhelobenko, eds), Advanced Studies in Contemp. Math., Vol. 7, Gordon and Breach Science Publishers, New York etc., 1990, pp. 39–117.
3. Н. А. Рожковская, *Мультипликативные распределения на графе Юнга.* — Записки научных семинаров ПОМИ **240**.
4. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* Москва, Мир, 1985.
5. P. N. Hoffmann and J. F. Humpreys, *Projective representations of the symmetric groups.* Oxford Univ. Press, 1992.
6. S. Fomin, *Duality of Graded Graphs.* — J. Alg. Comb. **3** (1994), 357–404.

Borodin A. M. Multiplicative central measures on Schur graph.

We define the Schur graph as the graph of shifted Young diagrams. Multiplicative central measures on this graph have a characteristic property: their transition probabilities differ from those of standard Plancherel's measures by a factor that depends on the added box and on the order of the diagram. We found all such measures and show that they are parametrized by one positive real number.

Московский
Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило 20 сентября 1996 г.